

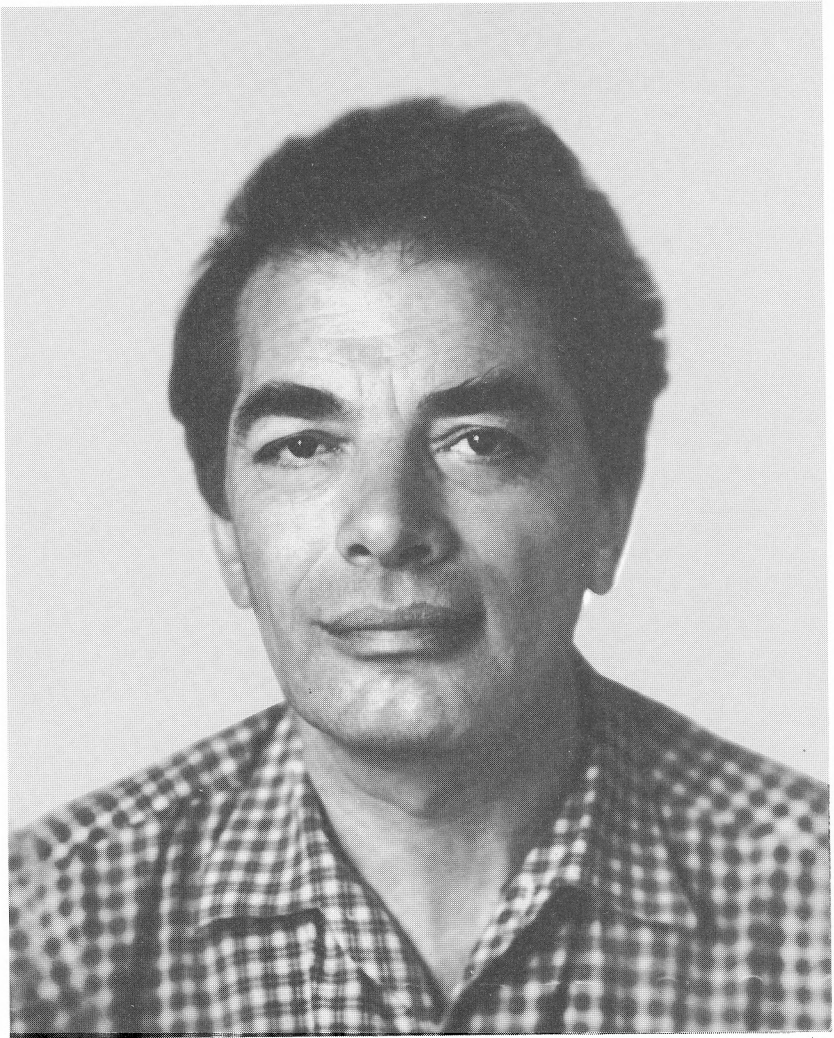
Л. С. СОЛОВЬЕВ

Собрание
трудов

I

РАВНОВЕСИЕ
И УСТОЙЧИВОСТЬ
ПЛАЗМЕННЫХ
КОНФИГУРАЦИЙ





Handwritten signature

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА, ИОНОСФЕРЫ
И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

L.S. SOLOV'EV

Collected Works
in two volumes

Volume I

EQUILIBRIUM AND STABILITY OF PLASMA CONFIGURATIONS

Edited by

V.N. ORAYEVSKY, Dr. Sc. (Phys. & Math.)

Compiled by

L.I. STARKOVA



MOSCOW
NAUKA
2001

Л. С. СОЛОВЬЕВ

Собрание трудов в двух томах

Том I

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
В.Н. ОРАЕВСКИЙ

Составитель
Л.И. СТАРКОВА



МОСКВА
«НАУКА»
2001

УДК 533
ББК 22.333
С 60

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук *В.Н. Ораевский* (председатель),
доктор физико-математических наук *М.М. Молоденский*,
В.А. Кутвицкий, Л.И. Старкова (составитель)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *К.В. Брушлинский*,
доктор физико-математических наук *И.А. Молотков*

Соловьев Л.С.

Собрание трудов. Т. I. Равновесие и устойчивость плазменных конфигураций. –
М.: Наука, 2001. – 396 с.

ISBN 5-02-002572-0

ISBN 5-02-002506-2 (Т. I)

В книге представлены научные труды известного советского физика-теоретика, одного из пионеров работ по управляемому термоядерному синтезу Леонида Сергеевича Соловьева, опубликованные в 1955–1978 гг. В настоящий том включены ставшие классическими исследования, посвященные структуре магнитных полей, дрейфовому движению заряженных частиц и МГД-анализу равновесия и устойчивости горячей плазмы.

Для специалистов и широкого круга научных работников, интересующихся теорией плазмы и ее приложениями.

ТП–2000–II–132

Solov'ev L.S.

Collected works. Equilibrium and stability of plasma configurations. Vol. I. – М.: Nauka, 2001. – 396 p.

ISBN 5-02-002572-0

ISBN 5-02-002506-2 (Vol. I)

The book contains main scientific works written by the outstanding Soviet physicist-theorist Leonid Sergeevich Solov'ev, one of the pioneers of nuclear fusion in the USSR. This volume includes his papers, published in 1955–1978 and recognized as classical works on plasma physics. These publications cover the problems of geometry of the magnetic field, drift motion of charged particles in the magnetic fields, and MHD-analysis of plasma equilibrium and stability.

This book is of interest for specialists and all researches, interested in plasma theory and its applications.

ISBN 5-02-002572-0

ISBN 5-02-002506-2 (Т. I)

© Издательство "Наука", 2001

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Первый том собрания трудов крупного советского ученого, одного из создателей современной физики плазмы доктора физико-математических наук Леонида Сергеевича Соловьева составлен из статей, опубликованных в 1955–1978 гг. Работы этого периода посвящены в основном общим проблемам геометрии магнитного поля, движению, заряженных частиц, развитию магнитогидродинамических и газодинамических неустойчивостей в различных равновесных и стационарных конфигурациях плазмы. Эти работы сравнительно малоизвестны, и публикация их в данной книге представляется актуальной даже в наше время, когда методы численного моделирования получили широчайшее распространение.

Научные работы Л.С. Соловьева отличаются четкой постановкой задач и содержательными результатами. Будучи собраны в одном томе, они дадут возможность в полном объеме познакомиться с научным наследием автора. В целом издание собрания трудов Л.С. Соловьева представляется весьма полезным и интересным не только для специалистов, но и для широкого круга научных работников, интересующихся развитием теории плазмы и ее приложениями.

ЛЕОНИД СЕРГЕЕВИЧ СОЛОВЬЕВ

Леонид Сергеевич Соловьев (1927–1997) – крупный ученый, известный физик-теоретик, специалист в области теории плазмы, один из тех, кто стоял у истоков проблемы управляемого термоядерного синтеза. Работы Л.С. Соловьева получили широкое признание как в России, так и за ее пределами. Ряд принципиальных исследований, выполненных им и вошедших в фундаментальные обзоры серии "Вопросы теории плазмы", принесли Л.С. Соловьеву мировую известность.

В двухтомное издание избранных трудов Л.С. Соловьева вошли научные работы, написанные в 1955–1997 гг. В первый том включены работы 1955–1978 гг., во второй – 1980–1997 гг. по теории магнитных полей, теории движения заряженных частиц в электромагнитных полях, магнитной электродинамике (стационарные течения, равновесие и устойчивость плазмы), релятивистской электромагнитной газодинамике, общей теории относительности, а также работы по астрофизике.

Л.С. Соловьев родился 22 мая 1927 г. в Минске в семье вузовских преподавателей. В 1930 г. семья переезжает в Москву. На юношеские годы Леонида Сергеевича приходится война, эвакуация, поступление в военное летное училище, вынужденный уход из него по состоянию здоровья, сдача экстерном экзаменов за среднюю школу и поступление в 1945 г. на физический факультет Московского государственного университета. По окончании кафедры теоретической физики МГУ в 1950 г. его распределяют в КБ ведомственного института. Огромное желание заниматься теоретической физикой приводит Л.С. Соловьева в 1954 г. в Лабораторию измерительных приборов АН СССР (ЛИПАН – в то время так назывался Институт атомной энергии) к академику М.А. Леонтовичу, который руководил теоретическими исследованиями по управляемому термоядерному синтезу и собрал в своем секторе коллектив талантливых физиков, каждый из которых внес крупный вклад в теорию плазмы.

В конце 50-х годов большой практический и теоретический интерес приобретает вопрос о конфигурации магнитного поля в связи с развитием работы по управляемому термоядерному синтезу (УТС) с магнитным удержанием плазмы в стеллараторах. Леонид Сергеевич включается в разработку фундаментальных вопросов термоядерной плазмы, ее динамики и удержания. В 1957–1964 гг. им была выполнена серия теоретических работ по ключевым проблемам физики магнитного удержания плазмы. Прежде всего это работы по структуре тороидальных магнитных полей сложных конфигураций, радикально изменившие существовавшие о них представления. После работ Л. Спитцера и М. Крускала утвердилось представление о тороидальных плазменных конфигурациях как о системах вложенных магнитных поверхностей. Результаты исследований Л.С. Соловьева и А.И. Морозова показали, что такие конфигурации являются вырожденными, а в общем случае поверхности расщепляются, образуя так называемые магнитные острова. Это привело к возрождению стеллараторов и заложило основу для объяснения и понимания многих особенностей токамаков, способствовало прогрессу магнитного удержания плазмы для целей УТС. Одновременно с этим Л.С. Соловьев занимается вопросами динамики одиночных заряженных частиц в тороидальных электромагнитных полях. В частности, анализ дрейфовых уравнений позволил придать им новую форму, из которой следовали неизвестные ранее законы сохранения, ставшие предметом дальнейшего интенсиф-

ного анализа. Особое значение имеет полученная Л.С. Соловьевым новая (лагранжева) форма дрейфовых уравнений, впоследствии способствовавшая развитию гамилтонова формализма при анализе траекторий дрейфа.

В конце 60-х годов начинается активная разработка стационарных плазменных ускорителей как инжекторов в установках УТС, а также как космических двигателей. Исследования принципа стационарного плазменного ускорителя с собственным магнитным полем, проводившиеся под руководством А.И. Морозова, привели к ряду совершенно неожиданных результатов, потребовавших глубокого теоретического анализа. Леонид Сергеевич принял самое активное участие в этом анализе. К началу 70-х годов Л.С. Соловьев и А.И. Морозов создают теорию симметричных течений идеальной двухкомпонентной плазмы. На основе выведенной ими изящной трехпоточковой системы уравнений на примере стационарных течений впервые удалось выявить фундаментальные особенности эффекта Холла в плазме и объяснить наблюдавшиеся на опыте его нетривиальные проявления, в частности вмерзновенность магнитного поля в электронную (а не в ионную) компоненту магнитного поля. Теория осесимметричных течений способствовала созданию принципиально новых коаксиальных квазистационарных плазменных ускорителей с уникальными параметрами. Результаты этих исследований отражены в ряде статей и подытожены в специальных обзорах в серии "Вопросы физики плазмы" в соавторстве с А.И. Морозовым и с В.Д. Шафрановым.

Научные результаты Л.С. Соловьева в области теории течений газа и плазмы и их устойчивости представляют значительный вклад в механику сплошной среды. В 1962 г. Л.С. Соловьев защищает кандидатскую диссертацию "Нелинейные гидромагнитные колебания плазменного шнура", в которой рассматривается гидромагнитная устойчивость по отношению к возмущениям конечной амплитуды. В 1972 г. он защищает докторскую диссертацию "К теории устойчивости плазмы в магнитном поле", а в "Вопросах теории плазмы" выходит его обзор "Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций". В этих работах в рамках модели идеальной магнитной гидродинамики проводится теоретический анализ равновесия и устойчивости замкнутых плазменных конфигураций высокотемпературной плазмы в магнитном поле. Здесь с достаточной полнотой и обстоятельностью проанализированы как стабилизирующие, так и дестабилизирующие факторы, получен новый точный достаточный критерий устойчивости, доказывающий что основным стабилизирующим механизмом в замкнутых плазменных конфигурациях со сложной геометрией магнитного поля является магнитная яма.

Чисто теоретические исследования Л.С. Соловьева удачно дополняются математическим моделированием и расчетами, проведенными им совместно с сотрудниками из Института прикладной математики АН СССР. Основная часть работ относится к исследованию устойчивости плазменных конфигураций в тороидальных установках (токамак, стелларатор) для удержания плазмы.

Большая серия работ посвящена вопросам устойчивости конфигураций в плазменном цилиндре, распрямленной модели тороидальных установок с винтовым магнитным полем, в частности с азимутальным (Z-пинч). Построена строгая линейная теория устойчивости с привлечением спектральных свойств дифференциальных операторов и расчетами собственных значений, получены некоторые общие критерии устойчивости и их параметрические зависимости.

От исследования линейных возмущений Леонид Сергеевич переходит к изучению нелинейной стадии развития двумерной неустойчивости конвективного типа в плазменных и газовых конфигурациях в рамках обычной газодинамики, классической магнитной гидродинамики (МГД) и двухжидкостной электромагнитной газодинамики. При сочетании аналитического рассмотрения с методами численного моделирования в рамках двумерных МГД-уравнений было подробно исследовано нелинейное развитие двумерных неустойчивостей в плазме и нейтральном газе. Найденная при этом

закономерность – конвективный характер неустойчивости с перемешиванием разных участков конфигурации – характерна для широкого класса задач газодинамики и МГД и связана с наличием инварианта – "вмороженной функции", сохраняющей свои первоначальные значения вдоль траекторий течения. Этот большой и продолжительный цикл исследований был систематизирован Л.С. Соловьевым и Н.М. Зуевой в сводном препринте Института атомной энергии имени И.В. Курчатова "Газодинамические неустойчивости конвективного типа".

В 1987 г. Леонид Сергеевич переходит в Институт инновационных и термоядерных исследований (филиал Курчатовского института атомной энергии). Тематика дальнейших работ обусловлена переходом к более общему математическому аппарату теоретических исследований, необходимому для учета двухжидкостной структуры плазмы, а также релятивистских эффектов, имеющих астрофизические приложения.

Еще одна серия исследований посвящена релятивистской газодинамике и релятивистским обобщениям результатов, полученных в теории равновесия и устойчивости плазменных конфигураций. Л.С. Соловьев считал, что выход за рамки классической газодинамики диктуется современными потребностями физики как в астрофизических приложениях, так и в технических задачах ускорения потоков частиц высоких энергий. При этом основное внимание он уделял не развитию сложных математических методов решения уравнений газодинамики в общей теории относительности, а построению сравнительно простых физических моделей, допускающих их полный анализ и позволяющих прояснить суть релятивистских эффектов. В частности, именно в рамках такой упрощенной модели он вместе с соавторами рассмотрел вопрос о возможности генерации сильных электрических полей во встречных пучках заряженных частиц при развитии в них неустойчивости типа плазменного типа. Исторически интерес к этой проблеме был связан с генерацией "ускорительных" нейтронов в Z-пинче, впервые рассмотренных Б.А. Трубниковым в 1952–1956 гг. Позже эта задача рассматривалась также в связи с проблемой происхождения космических частиц высоких энергий.

В 1991 г. Леонида Сергеевича приглашают в Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн АН СССР на должность главного научного сотрудника. Проведенные здесь теоретические разработки связаны в основном с астрофизическими проблемами, в частности с приложениями теории МГД-равновесия и устойчивости к солнечным объектам. Среди этих исследований сам Л.С. Соловьев выделял работы, посвященные теории равновесного солнечного пятна и анализу равновесия и устойчивости коронального плазмоида – необычного объекта солнечной атмосферы, открытого в 1991 г. Последняя проблема, которой занимался Леонид Сергеевич, связана с крупномасштабным строением магнитосферы Солнца. Это исследование, касающееся весьма актуальной и стремительно развивающейся области космической электродинамики, к сожалению, осталось фактически незавершенным.

При подготовке издания были исправлены замеченные опечатки, соблюдена современная орфография. Библиографические ссылки всюду, где это было возможно, уточнены и приведены к современному стандарту.

Предлагаемое издание представляет интерес для специалистов в области физики плазмы и ее приложений.

*А.И. Морозов,
В.Н. Ораевский*

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ*

Целью настоящей работы является определение фазовой скорости¹ и лучей основной волны², распространяющейся между двумя параллельными идеально проводящими поверхностями.

Пусть средняя поверхность, находящаяся на одинаковом расстоянии от рассматриваемых поверхностей, задана в параметрическом виде уравнением

$$\rho = \rho(u, v), \quad (1)$$

где за координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ приняты линии кривизны данной поверхности. Включим поверхность (1) в триортогональную систему поверхностей

$$\mathbf{r} = \rho(u, v) + w\mathbf{n}(u, v), \quad (2)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности (1). Как известно [1] при этом u, v, w образуют ортогональную систему координат, в которой коэффициент Ламе h_3 , соответствующий w , равен единице.

Уравнения Максвелла $\text{rot rot } \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}$ в принятой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial v} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_2}{h_1} \left[\frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial w} - \frac{\partial H_3}{\partial u} \right] \right) \right\} &= k_0^2 H_1, \\ \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1}{h_2} \left[\frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial w} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial v} \right] \right) \right\} &= k_0^2 H_2, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2}{h_1} \left[\frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial w} - \frac{\partial H_3}{\partial u} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1}{h_2} \left[\frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial w} \right] \right) \right\} &= k_0^2 H_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения поставленной задачи необходимо решить уравнения (3) с граничными условиями, заданными на поверхностях $w = \pm d/2$, где d – расстояние между граничными поверхностями.

Слабую искривленность ограничивающих поверхностей будем, следуя методу С.М. Рытова [2], характеризовать постоянными малыми параметрами, входящими множителями при u, v, w в уравнение (2), т.е. уравнением, определяющим координатные поверхности, считаем уравнение

$$\mathbf{r} = \rho(\lambda u, \nu v) + \mu w \mathbf{n}(\lambda u, \nu v). \quad (4)$$

Малые параметры μ, λ, ν указывают на медленное изменение свойств поверхностей при изменении координат u, v, w . Выясним более определенный для нашего случая смысл малых параметров μ, λ, ν .

* Совместно с Э.Л. Бурштейном // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. С. 465–468.

¹ Под фазовой скоростью понимается скорость распространения фазы по средней поверхности.

² Основной волной мы называем волну, которая в предельном случае плоских ограничивающих поверхностей переходит в однородную плоскую волну.

Из (4) следует, что коэффициенты Ламе также являются функциями $\lambda u, \nu v, \mu w$:

$$h_1 = h_1(\lambda u, \nu v, \mu w), \quad h_2 = h_2(\lambda u, \nu v, \mu w). \quad (5)$$

Представим коэффициенты Ламе в виде разложения около некоторой точки M средней поверхности $w = 0$, координаты которой u и v примем за нулевые:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{10} \left(1 + \lambda \frac{h_{1u}}{h_{10}^2} h_{10} u + \nu \frac{h_{1v}}{h_{10} h_{20}} h_{20} v + \mu \frac{h_{1w}}{h_{10}} w + \dots \right), \\ h_2 &= h_{20} \left(1 + \lambda \frac{h_{2u}}{h_{10} h_{20}} h_{10} u + \nu \frac{h_{2v}}{h_{20}^2} h_{20} v + \mu \frac{h_{2w}}{h_{20}} w + \dots \right); \end{aligned} \quad (6)$$

здесь h_{10}, h_{20} – значения коэффициентов Ламе в точке M ; $h_{1u}, h_{1v}, h_{1w}, \dots$ – производные коэффициентов Ламе в точке M по медленно меняющимся аргументам $\lambda u, \nu v, \mu w$. Будем считать отклонения от точки M h_{1u}, h_{2v}, w порядка 1, тогда из соотношений (6) следует, что λ, ν и μ характеризуют малость сравнительно с 1 членов $\lambda h_{2u} / h_{10} h_{20}, \nu h_{1v} / h_{10} h_{20}$ и $\mu h_{1w} / h_{10}, \mu h_{2w} / h_{20}$, или, переходя к производным по u, v, w , членов:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u} = -\gamma_{g1}, \quad \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial v} = \gamma_{g2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial w} = \gamma_1, \quad \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial w} = \gamma_2, \quad (7)$$

где γ_{g1} и γ_{g2} – геодезические кривизны координатных линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, а γ_1 и γ_2 – кривизны нормальных сечений вдоль линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ средней поверхности (1).

Таким образом, параметр μ характеризует кривизны главных нормальных сечений средней поверхности γ_1 и γ_2 , а параметры λ и ν характеризуют кривизны ее координатных линий (линий кривизны).

Решая (3) методом разложения в ряд по малым параметрам, ищем решение в виде ряда по μ, λ, ν . Соответственно и волновое число представляется рядом по μ, λ, ν :

$$k = k_0 + \mu k_1 + \lambda k_2 + \nu k_3 + \dots + \mu^n \lambda^m \nu^p k_N + \dots \quad (8)$$

Легко видеть, однако, что в разложении волнового числа отсутствуют члены, не содержащие μ . Действительно, полагая $\mu = 0$, мы переходим к случаю ограничивающих поверхностей, обе главные кривизны которых равны 0, т.е. к задаче распространения основной волны между параллельными плоскостями. Очевидно, фазовая скорость при этом равна скорости света и, следовательно, $k = k_0$.

Используя инвариантность уравнений (3) относительно одновременного изменения знака μ, w и H_3 и симметрию граничных условий по w , можно показать, что компоненты H_1 и H_2 магнитного поля основной волны не меняются при одновременном изменении знаков μ и w , а H_3 меняет знак на обратный. Отсюда следует, что фазовая скорость основной волны (при $w = 0$) должна зависеть только от четных степеней μ . Следовательно, для нахождения волнового числа k с точностью до μ^2 в предположении, что λ и ν малы ($\lambda, \nu \ll 1$), достаточно собрать члены, не содержащие λ и ν .

Таким образом, нам остается решить уравнение (3) с коэффициентами Ламе, в которых координаты u и v фиксированы. Волновые уравнения (3), переписанные в виде $\text{grad div } \mathbf{H} - \text{rot rot } \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0$, при $h_1 = h_1(w), h_2 = h_2(w)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 (h_1 H_1)}{\partial w^2} + \left(\frac{h_2'}{h_2} - \frac{h_1'}{h_1} \right) \frac{\partial (h_1 H_1)}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 (h_1 H_1)}{\partial v^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 (h_1 H_1)}{\partial v^2} + 2 \frac{h_1'}{h_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} + h_1 H_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2(h_2 H_2)}{\partial w^2} + \left(\frac{h'_1}{h_1} - \frac{h'_2}{h_2} \right) \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2(h_2 H_2)}{\partial u^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2(h_2 H_2)}{\partial v^2} + 2 \frac{h'_2}{h_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} + h_2 H_2 = 0, \\
& \frac{\partial^2 H_3}{\partial w^2} + \left(\frac{h'_1}{h_1} + \frac{h'_2}{h_2} \right) \frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 H_3}{\partial u^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 H_3}{\partial v^2} + \\
& + \frac{1}{h_1} \left(\frac{h'_2}{h_2} - \frac{h'_1}{h_1} \right) \frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{1}{h_2} \left(\frac{h'_1}{h_1} - \frac{h'_2}{h_2} \right) \frac{\partial H_2}{\partial v} + H_3 = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тройку функций $F_1 = h_1 H_1$, $F_2 = h_2 H_2$, $F_3 = H_3$, удовлетворяющих уравнениям (9) и граничным условиям $\partial F_1 / \partial w = \partial F_2 / \partial w = F_3 = 0$ при $w = \pm d/2$, ищем в виде

$$F_j = f_j(w) e^{ik_0(\alpha h_{10} u + \beta h_{20} v)} \quad (j = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Разлагая коэффициенты уравнений (9) в ряд по медленно меняющейся переменной μw , а постоянные распространения α и β в ряд по четным степеням μ :

$$\alpha = \alpha_0 + \mu^2 \alpha_1 + \dots, \quad \beta = \beta_0 + \mu^2 \beta_1 + \dots,$$

где α_0 , β_0 – направляющие косинусы волны в рассматриваемой точке ($\alpha_0 = \cos \theta$, $\beta_0 = \sin \theta$), ищем решение $f_j(w)$ в виде ряда

$$f_j(w) = f_{j,0}(w) + \mu f_{j,1}(w) + \mu^2 f_{j,2}(w) + \dots$$

Уравнение (9) распадается на системы обыкновенных дифференциальных уравнений (различных порядков по μ) для функций $f_{j,n}$. В нулевом приближении f_j имеют вид $f_{1,0} = -\beta_0$, $f_{2,0} = \alpha_0$, $f_{3,0} = 0$. Подставляя эти значения в уравнения первого приближения, находим $f_{j,1}$ и т.д., используя при этом граничные условия и указанную выше инвариантность f_j относительно одновременной замены знака w и μ . В процессе нахождения последовательных приближений f_j определяются также последовательные приближения α и β .

Не приводя значений для функций f_j , напомним полученное выражение для волнового вектора волны, распространяющейся под углом θ к линиям $v = \text{const}$:

$$k = k_0 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k_0 - k_0 \left(\gamma_1^2 \alpha_0^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2 \beta_0^2 - \frac{2}{5} \gamma^2 k_0^2 d^2 \right) \frac{d^2}{24}, \tag{11}$$

где $\gamma = \gamma_1 \alpha_0^2 + \gamma_2 \beta_0^2$. Частный случай этой формулы, относящийся к распространению волны между параллельными цилиндрическими поверхностями, приведен в ряде работ (см., например, [3, 4]).

Зная фазовую скорость, можно найти распределение фазы на средней поверхности и "лучи" (нормальные траектории к линиям постоянной фазы). Пусть распределение фазы задается функцией $\Psi(u, v) = \text{const}$, а уравнение лучей функцией $\Phi(u, v) = \text{const}$. Представим $\Psi(u, v)$ и $\Phi(u, v)$ в виде $\Psi = \Psi_0 + \psi$, $\Phi = \Phi_0 + \phi$, где $\Psi_0(u, v) = \text{const}$ определяет эквифазные линии в нулевом приближении (по μ^2), а $\Phi_0(u, v) = \text{const}$ являются лучами нулевого приближения, т.е. геодезическими линиями средней поверхности. Переписывая уравнение (11) в виде

$$\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)^2 = (\nabla \Psi)^2 = k_0^2 + 2k \Delta k$$

и считая $\nabla \psi$ и $\nabla \phi$ малыми порядка Δk , в первом приближении по μ^2 найдем $\nabla \Psi_0 \nabla \psi = k \Delta k$, т.е. $d\psi / ds = \Delta k$, где $d\psi / ds$ – производная вдоль луча в нулевом при-

ближении. Интегрируя, получим

$$\psi = \int \Delta k ds, \quad (12)$$

где α_0, β_0 , входящие в Δk , приближенно считаются равными направляющим косинусам луча нулевого приближения.

Для нахождения φ воспользуемся уравнением $\nabla\psi\nabla\Phi = 0$. В первом приближении получаем $\nabla\psi_0\nabla\varphi + \Phi_0\nabla\psi = 0$, откуда $k d\varphi/ds = -\nabla\Phi_0\nabla\psi$ и

$$\varphi = -\frac{1}{k} \int \nabla\Phi_0\nabla\psi ds; \quad (13)$$

отсюда легко найти отклонение луча в первом приближении от геодезической.

Действительно, рассмотрим луч первого приближения $\Phi_0(u, v) + \varphi(u, v) = c$. Представляя $\Phi_0(u, v)$ в виде разложения около близкой к u, v точки u_1, v_1 , принадлежащей тому же лучу в нулевом приближении $\Phi_0(u, v) = c$, получим с точностью до первого порядка отклонения $\overline{\Delta l}$: $\Phi_0(u_1, v_1) + \nabla\Phi_0\overline{\Delta l} + \varphi(u_1, v_1) = c$. Отсюда, считая $\overline{\Delta l}$ направленным вдоль $\nabla\Phi_0$, получаем отклонение луча по нормали к геодезической:

$$\Delta l = -\frac{\varphi(u, v)}{|\nabla\Phi_0|}.$$

Интегрирование в формулах (12) и (13) производится вдоль лучей нулевого приближения от точек известной фазы до точек, в которых ищется приращение фазы или нормальное отклонение луча Δl .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.: ОНТИ-КНТЛ, 1935.
2. Рытов С.М. // Труды ФИАН. М.: Наука, 1940. Т. 2. С. 1.
3. Buchholz H. // Elektr. Nachr. Techn. 1939. Bd. 16. S. 73.
4. Rice S.O. // Bell Syst. Techn. J. 1948. Vol. 27, N 2. P. 305.

О ДИФРАКЦИИ КОНЕЧНОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРЕПЯТСТВИИ*

Диаграмму направленности плоского раскрыва приходится обычно вычислять приближенно, пренебрегая искажением падающего поля в плоскости раскрыва. Так, если раскрыв представляет собой отверстие в плоском экране, то поле в раскрыве отождествляется с полем при отсутствии экрана¹; если раскрывом является обрез волновода, то поле в раскрыве отождествляется с полем при отсутствии обреза. Точное решение имеется лишь для простейших двумерных случаев падения плоской волны на бесконечную щель в экране [1] и излучения плоской волны из системы двух параллельных полуплоскостей [2]. В настоящей работе, исходя из известных решений двумерных задач о дифракции плоской волны, падающей нормально на цилиндрическое препятствие, и используя метод суперпозиции плоских волн для представления произвольного поля в раскрыве, рассчитывается дифракция пучка конечной ширины на цилиндрическом препятствии.

Ограничимся рассмотрением пучка падающих волн, в котором распределение поля в сечении $z = 0$ (для составляющих E_y и H_y) зависит лишь от координат x и определяется функцией $\Phi(x)$ (ось Ox параллельна образующей цилиндрического препятствия). Распределение поля $\Phi(x)$ представим интегралом Фурье

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{iux} dv, \quad (1)$$

или, после замены $v = k \sin \beta$ ($k = \omega / c$),

$$\Phi(x) = k \int_C f(\beta) \cos \beta e^{ikx \sin \beta} d\beta, \quad (2)$$

где $\varphi(v) \equiv f(\beta)$. Контур интегрирования соединяет в комплексной плоскости точки $-\pi/2 - i\infty$ и $\pi/2 + i\infty$. Если в подынтегральное выражение включить множитель $e^{ikz \cos \beta}$ (обращающийся в единицу при $z = 0$), то получится разложение падающей волны $\Phi(x, z)$ по плоским волнам

$$\Phi(x, z) = k \int_C f(\beta) \cos \beta e^{ik(x \sin \beta + z \cos \beta)} d\beta$$

с плотностью распределения $k f(\beta) \cos \beta$.

Пусть азимутальная составляющая дифрагированного поля (E_φ или H_φ) при падении плоской волны единичной амплитуды нормально к плоскости $z = 0$ представляется известной функцией

$$u_\varphi = F(k, r, \varphi) e^{ikr}, \quad (3)$$

* Совместно с Э.Л. Бурштейном // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 473–476.

¹ При этом в зависимости от того, будем ли мы рассчитывать по электрическому или магнитному полю в раскрыве, формула Кирхгофа дает различные результаты, что связано с различными приближениями: при расчете по электрическому полю мы пренебрегаем его искажением в раскрыве, при расчете по магнитному полю искажения поля в раскрыве нет, но зато мы пренебрегаем токами на экране.

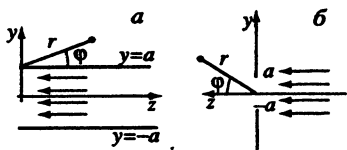


Рис. 1

где r и φ – цилиндрические координаты точки наблюдения. Тогда азимутальная составляющая дифрагированного поля при падении плоской волны под углом β к оси x будет [3]

$$u_{\varphi}(\beta) = F(k \cos \beta, r, \varphi) e^{ik(x \sin \beta + r \cos \beta)}. \quad (4)$$

Заметим, что если точка наблюдения находится в волновой зоне излучения, то единственной компонентой дифрагированного поля в рассматриваемом случае будет u_{φ} . Введем расстояние R от начала координат до точки наблюдения и угол θ между направлением R и плоскостью yOz согласно формулам

$$r = R \cos \theta, \quad x = R \sin \theta;$$

тогда соотношение (4) переписывается в виде

$$u_{\varphi}(\beta) = F(k \cos \beta, R \cos \theta, \varphi) e^{ikR \cos(\beta - \theta)}. \quad (5)$$

Очевидно, дифрагированное поле при падении конечного пучка представится интегралом

$$u_{\varphi}(\theta) = k \int_C f(\beta) \cos \beta u_{\varphi}(\beta) d\beta. \quad (6)$$

Для поля в волновой зоне (при $kR \rightarrow \infty$) интеграл (6) можно вычислить при помощи метода перевала, что приводит к

$$u_{\varphi}(\theta) = \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} e^{i(kR - \pi/4)} F(k \cos \theta, R \cos \theta, \varphi) k \cos \theta \cdot f(\theta). \quad (7)$$

Функция $f(\theta)$ определяется из обратного к (1) преобразования Фурье

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-ikx \sin \theta} dx. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) дают точное решение задачи дифракции на препятствии с цилиндрической симметрией для падающей волны, распределение по оси x которой задается функцией $\Phi(x)$, если известно решение $F(k, r, \varphi) e^{ikr}$ для дифракции плоской прямой волны.

Применим полученные формулы к задаче дифракции на открытом конце плоского волновода и на бесконечной щели в металлическом экране.

1. В монографии Л.А. Вайнштейна [2] приводится выражение для характеристики излучения $\Sigma(k, \varphi)$ при падении плоской прямой волны E_{00} на открытый конец плоского волновода:

$$\Sigma(k, \varphi) = \frac{cr}{8\pi} |F(k, r, \varphi)|^2. \quad (9)$$

Принятая система координат показана на рис. 1, а. Согласно (9) формулу (7) можно преобразовать к виду

$$|E_{\varphi}|^2 \equiv |u_{\varphi}(\theta)|^2 = \frac{16\pi^2 k \cos \theta}{cR^2} \Sigma(k \cos \theta, \varphi) \cdot |f(\theta)|^2. \quad (10)$$

Точное выражение характеристики излучения для падающей волны единичной амплитуды при $n < q < n + 1$ имеет вид

$$\Sigma(k, \varphi) = \frac{ca}{4\pi^2} e^{-\pi q(1 + \cos \varphi)} \frac{\sin(\pi q \sin \varphi)}{\sin \varphi} \prod_{m=1}^n \frac{q + \gamma_m}{q - \gamma_m} \frac{q \cos \varphi + \gamma_m}{q \cos \varphi - \gamma_m}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

где $q = ka / \pi = 2a / \lambda$, $\gamma_m = \sqrt{q^2 - m^2}$. Согласно (10) и (11) квадрат модуля поля в волновой зоне при падении на раскрыв конечного пучка представляется формулой

$$|E_\varphi|^2 = \frac{4\pi q \cos \theta}{R^2} e^{-\pi q \cos \theta (1 + \cos \varphi)} \frac{\sin(\pi q \cos \theta \sin \varphi)}{\sin \varphi} \times \\ \times \prod_{m=1}^n \frac{q \cos \theta + \gamma_m}{q \cos \theta - \gamma_m} \frac{q \cos \theta \cos \varphi + \gamma_m}{q \cos \theta \cos \varphi - \gamma_m} |f(\theta)|^2, \quad (12)$$

где $\gamma_m = \sqrt{q^2 \cos^2 \theta - m^2}$, а целое число n определяется из неравенства $n < q \cos \theta < n + 1$. В частности, при $0 < q < 1$ формула (12) записывается в виде

$$|E_\varphi|^2 = \frac{4\pi q \cos \theta}{R^2} e^{-\pi q \cos \theta (1 + \cos \varphi)} \frac{\sin(\pi q \cos \theta \sin \varphi)}{\sin \varphi} |f(\theta)|^2. \quad (12')$$

Исследуем угловую зависимость характеристики излучения (12) в "главных сечениях".

А. В плоскости магнитного вектора xOz имеем ($\varphi = \pi$)

$$|E|^2 = \frac{q^2 \cos^2 \theta}{R^2} \left| \int \Phi(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \right|^2. \quad (13)$$

По сравнению с обычно используемой формулой здесь входит множитель $\cos^2 \theta$. Заметим, что такое же выражение для диаграммы направленности получается для щели в плоском экране, в котором поле (не падающее, а истинное поле) распределено по закону $\Phi(x)$ (см., например, [4]).

Б. В плоскости электрического вектора yOz характеристика излучения не зависит от распределения падающего поля по x и совпадает с характеристикой излучения нормально падающей волны, подробно исследованной в [2].

2. Согласно А. Зоммерфельду [5], при падении плоской прямой волны на бесконечную узкую щель в бесконечно тонком металлическом экране, при поляризации падающей волны $E \parallel Oy$ (см. рис. 1, б) для азимутальной составляющей электрического поля в волновой зоне имеем

$$E_\varphi = -\frac{i}{2p} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \left(1 + \frac{k^2 a^2}{4} \cos^2 \varphi \right), \quad (14)$$

где $p = \gamma ka / 4i$, $\gamma = 1,781\dots$. Выражение (14) получено разложением по параметру ka , причем сравнение с точным решением показывает его применимость для значений $ka < 2$.

Подставляя (14) в формулу (7) и сохраняя члены до порядка $(ka)^2$ включительно, получим для дифракции на щели конечного пучка выражение

$$|E_\varphi|^2 = \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{1 + \frac{k^2 a^2}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\pi^2 + 4 \left(\ln \frac{\gamma ka \cos \theta}{4} \right)^2} |f(\theta)|^2. \quad (15)$$

В частности, в плоскости xOz характеристика излучения имеет вид

$$|E|^2 = \frac{1}{R^2} \frac{1 + \frac{(ka)^2}{2} \cos^2 \theta}{\pi^2 + 4 \left(\ln \frac{\gamma ka \cos \theta}{4} \right)^2} \left| \int \Phi(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \right|^2. \quad (15')$$

Таким образом, строгое рассмотрение задачи о дифракции конечного пучка на узкой щели в плоском экране приводит в плоскости H к выражению (15'), отличающемуся от полученного в [4] в предположении, что истинное поле в щели совпадает с падающим полем $\Phi(x)$. В последнем случае, как указывалось выше, получается выражение типа (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Morse P., Rubenstein P. // Phys. Rev. 1935. Vol. 54. P. 895.
2. Вайнштейн Л.А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М.: Сов. радио, 1953.
3. Потехин А.И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1948.
4. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Л.: ВКАС, 1949.
5. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

К ТЕОРИИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ФОКУСИРОВКИ*

Расчет знакопеременной фокусировки в ускорителях [1], а также некоторые другие задачи приводят к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{x} + \varepsilon p(\varepsilon t, \theta)\dot{x} + q(\varepsilon t, \theta)x = 0, \quad (1)$$

где ε – малый параметр, p и q – периодические функции аргумента θ , $d\theta/dt = v(\varepsilon t)$. Как функции от t коэффициенты уравнения (1) являются "периодическими" с медленно меняющимися "амплитудой" и "периодом".

Мы будем предполагать известными два линейно независимых решения $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ уравнения (1) на любом n -м "периоде" изменения по t коэффициентов p и q . Условимся отсчитывать t на каждом "периоде" от его начала и обозначим через τ_n продолжительность n -го "периода" коэффициентов. В силу линейности (1) произвольное (искомое) решение на n -м "периоде" и его производная представляется в виде

$$x = af_n(t) + b\varphi_n(t), \quad \dot{x} = af'_n(t) + b\varphi'_n(t). \quad (2)$$

Выберем f_n и φ_n удовлетворяющими начальным условиям $f_n(0) = \varphi'_n(0) = 1$, $f'_n(0) = \varphi_n(0) = 0$; тогда требование непрерывности x и \dot{x} на границе n -го и $n + 1$ -го "периодов" приводит к уравнениям

$$x_{n+1} = \alpha_{11}x_n + \alpha_{12}\dot{x}_n, \quad \dot{x}_{n+1} = \alpha_{21}x_n + \alpha_{22}\dot{x}_n, \quad (3)$$

где через x_n и \dot{x}_n обозначены значения искомого решения и его производной в начале n -го "периода", а матрица коэффициентов $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(n)$ есть

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} f_n(\tau_n) & \varphi_n(\tau_n) \\ f'_n(\tau_n) & \varphi'_n(\tau_n) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Нашей дальнейшей задачей является определение x_n и \dot{x}_n . При известных $x_n = a$ и $\dot{x}_n = b$ решение внутри любого "периода" τ_n находится при помощи формул (2).

В силу малого отличия коэффициентов уравнения (1) на двух соседних "периодах" коэффициенты α_{ik} являются медленно меняющимися функциями номера n . Таким образом, соотношения (3) можно рассматривать как систему двух линейных урав-

* Совместно с Э.Л. Буриштейном // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 721–724.

нений в конечных разностях относительно неизвестных функций x_n и \dot{x}_n с медленно меняющимися коэффициентами α_{ik} .

Рассмотрим сначала случай постоянных α_{ik} (что соответствует уравнению (1) с чисто периодическими по t коэффициентами). Решение системы разностных уравнений (3) с постоянными коэффициентами ищется, как известно, в виде [2]

$$x_n = c_1 \lambda^n, \quad \dot{x}_n = c_2 \lambda^n. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получим однородную систему уравнений для определения постоянных c_1 и c_2 :

$$(\alpha_{11} - \lambda)c_1 + \alpha_{12}c_2 = 0, \quad \alpha_{21}c_1 + (\alpha_{22} - \lambda)c_2 = 0.$$

Требование существования нетривиальных решений приводит к уравнению для λ :

$$\lambda^2 - 2g\lambda + D = 0, \quad (6)$$

где $g = (\alpha_{11} + \alpha_{22}) / 2$, $D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. Обозначая $\cos \mu = g/\sqrt{D}$, получим

$$\lambda = \sqrt{D}e^{\pm i\mu}. \quad (7)$$

Общее решение системы (3) записывается в виде

$$x_n = D^{n/2}(c_1 e^{i\mu n} + c_1^* e^{-i\mu n}), \quad \dot{x}_n = D^{n/2}(c_2 e^{i\mu n} + c_2^* e^{-i\mu n}). \quad (8)$$

А. При условии $|g/\sqrt{D}| < 1$ величина μ вещественна. Переходя к тригонометрическим функциям и удовлетворяя начальным условиям, получим

$$x_n = D^{n/2} \left[x_0 \cos \mu n + \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2\sqrt{D} \sin \mu} x_0 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{D} \sin \mu} \dot{x}_0 \right) \sin \mu n \right], \quad (9)$$

$$\dot{x}_n = D^{n/2} \left[\dot{x}_0 \cos \mu n + \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2\sqrt{D} \sin \mu} \dot{x}_0 + \frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D} \sin \mu} x_0 \right) \sin \mu n \right].$$

Б. При условии $|g/\sqrt{D}| > 1$ величина μ чисто мнимая, и решение получается из (9) заменой тригонометрических функций на гиперболические и μ на $|\mu|$, где $|\mu|$ определяется равенством $\text{ch } |\mu| = g/\sqrt{D}$.

В. В случае кратных корней характеристического уравнения (6) $|g/\sqrt{D}| = 1$, решение (9) теряет смысл, однако соответствующие решения могут быть получены из него предельным переходом:

1) при $g \rightarrow \sqrt{D}$, $\mu \rightarrow 2m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$

$$x_n = D^{n/2} \left[x_0 + \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2\sqrt{D}} x_0 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{D}} \dot{x}_0 \right) n \right],$$

$$\dot{x}_n = D^{n/2} \left[\dot{x}_0 + \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2\sqrt{D}} \dot{x}_0 + \frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D}} x_0 \right) n \right];$$

2) при $g \rightarrow -\sqrt{D}$, $\mu \rightarrow (2m + 1)\pi$

$$x_n = D^{n/2} \cos \pi n \left[x_0 - \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2\sqrt{D}} x_0 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{D}} \dot{x}_0 \right) n \right],$$

$$\dot{x}_n = D^{n/2} \cos \pi n \left[\dot{x}_0 - \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2\sqrt{D}} \dot{x}_0 + \frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D}} x_0 \right) n \right].$$

Заметим, что детерминант матрицы (α_{ik}) является определителем Вронского уравнения (1) и равен $D = \exp\left(-\varepsilon \int_0^{\tau_n} p_n(t) dt\right)$, где $p_n(t)$ – коэффициент при первой

производной в уравнении (1) в n -м "периоде". В том случае, когда $p_n(t)$ или его среднее значение по "периоду" τ_n равно нулю, $D = 1$.

Перейдем к построению решения разностных уравнений (3) для медленно меняющихся $\alpha_{ik}(n)$. По аналогии с методом ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений ищем решение (3) в виде

$$x_n = c_1(n)\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}, \quad \dot{x}_n = c_2(n)\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}, \quad (10)$$

где λ_n – корни характеристического уравнения (6) для $g = g(n)$, $D = D(n)$. Величины $c(n)$ и λ_n предполагаем медленно меняющимися функциями n . Подставляя (10) в (3) и заменяя приращения производными, получаем

$$c_1'\lambda = (\alpha_{11} - \lambda)c_1 + \alpha_{12}c_2, \quad c_2'\lambda = \alpha_{21}c_1 + (\alpha_{22} - \lambda)c_2,$$

где штрихами обозначены производные по n и опущены индексы n . Разделяя переменные c_1 и c_2 , подставляя вместо λ его значение (7) и пренебрегая при этом произведениями производных и вторыми производными медленных функций c и λ , в результате интегрирования найдем

$$c_1 = \text{const} \left(\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{D} \sin \mu} \right)^{1/2} \exp \left[\mp i \int_0^n \frac{\alpha_{12}}{4\sqrt{D} \sin \mu} \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{12}} \right)' dn \right],$$

$$c_2 = \text{const} \left(\frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D} \sin \mu} \right)^{1/2} \exp \left[\mp i \int_0^n \frac{\alpha_{21}}{4\sqrt{D} \sin \mu} \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{21}} \right)' dn \right].$$

Произведение корней характеристического уравнения, входящее в (10), приближенно равно

$$\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1} = \sqrt{D_0 D_1 \dots D_{n-1}} \exp \left[\pm i \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \right] =$$

$$\approx \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^n [\ln D - (\ln D)'/2] dn \right] \exp \left[\pm i \int_0^n \left(\mu - \frac{\mu'}{2} \right) dn \right].$$

Будем для простоты считать μ действительным. Составив линейные комбинации решений (10) и перейдя от экспоненциальных функций к тригонометрическим, получим общее решение системы (3):

$$x_n = \left(\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{D} \sin \mu} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^n [\ln D - (\ln D)'/2] dn \right) (A_1 \cos \Phi_1 + B_1 \sin \Phi_1),$$

$$\dot{x}_n = \left(\frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D} \sin \mu} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^n [\ln D - (\ln D)'/2] dn \right) (A_2 \cos \Phi_2 + B_2 \sin \Phi_2),$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^n \left[\mu - \mu'/2 - \frac{\alpha_{12}}{4\sqrt{D} \sin \mu} \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{12}} \right)' \right] dn,$$

$$\Phi_2 = \int_0^n \left[\mu - \mu'/2 - \frac{\alpha_{21}}{2\sqrt{D} \sin \mu} \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{21}} \right)' \right] dn.$$

Постоянные A и B определяются из начальных условий. Опуская величины первого порядка малости, окончательно получим

$$\begin{aligned} x_n &= P_1(n) \left[x_0 \cos \Phi_1 + \left(\frac{\alpha_{11}^0 - \alpha_{22}^0}{2\sqrt{D_0} \sin \mu_0} x_0 + \frac{\alpha_{12}^0}{\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \dot{x}_0 \right) \sin \Phi_1 \right], \\ \dot{x}_n &= P_2(n) \left[\dot{x}_0 \cos \Phi_2 + \left(\frac{\alpha_{22}^0 - \alpha_{11}^0}{2\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \dot{x}_0 + \frac{\alpha_{21}^0}{\sqrt{D_0} \sin \mu_0} x_0 \right) \sin \Phi_2 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(\alpha_{12} / \alpha_{12}^0)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^n [\ln D - (\ln D)'/2] dn \right)}{(D/D_0)^{1/4} (\sin \mu / \sin \mu_0)^{1/2}}, \\ P_2 &= \frac{(\alpha_{21} / \alpha_{21}^0)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^n [\ln D - (\ln D)'/2] dn \right)}{(D/D_0)^{1/4} (\sin \mu / \sin \mu_0)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Здесь величины с индексом 0 относятся к начальному (нулевому) "периоду", а величины без индекса – к n -му "периоду" коэффициентов p и q . Формулы (11) дают погрешность порядка ϵ/μ на интервале $n \sim 2\pi/\epsilon\mu$. При помощи (11) можно написать приближенную формулу для произведения четырехэлементных матриц с медленно меняющимися элементами:

$$\begin{aligned} &(\alpha)_{n-1}(\alpha)_{n-2} \dots (\alpha)_0 = \\ &= \begin{pmatrix} P_1 \left(\cos \Phi_1 + \frac{\alpha_{11}^0 - \alpha_{22}^0}{2\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \sin \Phi_1 \right) & P_1 \frac{\alpha_{12}^0}{\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \sin \Phi_1 \\ P_2 \frac{\alpha_{21}}{\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \sin \Phi_2 & P_2 \left(\cos \Phi_2 + \frac{\alpha_{22}^0 - \alpha_{11}^0}{2\sqrt{D_0} \sin \mu_0} \sin \Phi_2 \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные соотношения позволяют рассчитывать знакопеременную фокусировку в ускорителях при медленном изменении ее параметров. Иногда представляется более удобным пользоваться непосредственно формулой (12) для перемножения матриц, безотносительно к исходному дифференциальному уравнению (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Courant E.D., Livingston M.S., Snyder H.S. // Phys. Rev. 1952. Vol. 88. P. 1190.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ*

Г.И. Будкером [1] предложена магнитная ловушка, представляющая собой аксиально-симметричное магнитное поле, минимальное в центре и возрастающее в обе стороны вдоль оси. В настоящей работе рассматривается движение заряженных частиц в такой ловушке в дрейфовом приближении. При задании параболической аппроксимации поля на оси удастся в замкнутом виде проинтегрировать уравнения движения частицы.

1. УРАВНЕНИЯ ДРЕЙФОВОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Полная система уравнений дрейфовой теории для движения центра ларморовской окружности в магнитном поле есть [2]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = u \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{mc(v^2 + u^2)}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H], \quad v^2 = u^2 + w^2, \quad w^2/H = A = \text{const}, \quad (1.1)$$

где $v = \text{const}$ – полная скорость частицы, а u и w ее параллельная и перпендикулярная H составляющие ($u \parallel H$, $w \perp H$). Система (1.1) эквивалентна векторному уравнению

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sqrt{v^2 - AH} \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{mc(2v^2 - AH)}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H], \quad (1.2)$$

правая часть которого полностью определяется заданием магнитного поля \mathbf{H} . В аксиально-симметричном магнитном поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_\varphi$

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi), \quad A_\varphi = \frac{1}{2} rh(z) - \frac{r^3}{16} h''(z) + \dots,$$

где $h(z)$ – магнитное поле на оси симметрии z . Ограничиваясь членами порядка r^2 , получаем

$$H_r = -\frac{r}{2} h'(z), \quad H_z = h - \frac{r^2}{4} h'',$$

$$H = h - \frac{r^2}{4} \left(h'' - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{h} \right), \quad \nabla H = \mathbf{e}_z h' - \frac{r}{2} \mathbf{e}_r \left(h'' - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{h} \right),$$

а величина $[\mathbf{H}\nabla H]$ получается в виде

$$[\mathbf{H}\nabla H] = \frac{r}{4} \mathbf{e}_\varphi (-2hh'' + 3h'^2).$$

* Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 4. С. 32–41.

При учете только линейных по r членов векторное уравнение (1.2) записывается в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sqrt{v^2 - Ah(z)}, \\ \dot{r} &= -\frac{r}{2} \frac{h'}{h} \dot{z}, \\ \dot{\phi} &= \frac{mc}{2e} \frac{2v^2 - Ah}{h^3} \left(-\frac{hh''}{2} + \frac{3}{4} h'^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Второе уравнение (1.3) непосредственно интегрируется:

$$r^2 h(z) = \text{const},$$

т.е. движение по r происходит по поверхности вращения, образованной магнитными силовыми линиями, так как уравнение силовых линий, как нетрудно убедиться, есть $rA_\phi(z, r) = \text{const}$.

Первое уравнение (1.3) после дифференцирования по t записывается в виде

$$\ddot{z} + \frac{A}{2} h'(z) = 0. \quad (1.4)$$

Если поле на оси $h(z)$ имеет форму потенциальной ямы, то решение уравнения (1.4) является колебательным.

1.1. Параболическая аппроксимация поля на оси

Наиболее простое выражение для решения (1.4) получается, если принять квадратичную аппроксимацию поля на оси:

$$h(z) = h_0(1 + z^2/l^2), \quad (1.5)$$

тогда уравнение (1.4) является уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{z} + \frac{Ah_0}{l^2} z = 0.$$

Его решение есть

$$z = l \sqrt{\frac{v^2}{Ah_0} - 1} \sin \frac{\sqrt{Ah_0}}{l} t, \quad (1.6)$$

где начало отсчета t соответствует моменту прохождения частицей плоскости $z = 0$.

Деля третье уравнение (1.3) на первое, для принятой аппроксимации $h(z)$ получим

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\sqrt{Ah_0}}{\omega_0 l^2} \frac{(2a^2 + 1 - z^2/l^2)(1/2 - z^2/l^2)}{(1 + z^2/l^2)^3 \sqrt{a^2 - z^2/l^2}},$$

где $\omega_0 = \frac{eh_0}{mc}$, $a^2 = \frac{v^2}{Ah_0} - 1$. Принимая начало отсчета ϕ от момента прохождения частицей $z = 0$, с помощью подстановки $z = al \sin x$ получим для ϕ выражение

$$-\phi = \frac{\sqrt{Ah_0}}{\omega_0 l} \int_0^x \frac{(2a^2 + 1 - a^2 \sin^2 x)(1/2 - a^2 \sin^2 x)}{(1 + a^2 \sin^2 x)^3} dx.$$

Вычисление интеграла приводит к следующей зависимости $\Phi = \Phi(z)$:

$$\Phi(z) = -\frac{\nu}{8\omega_0 l} \left\{ \frac{z\sqrt{1-c^2(1+z^2/l^2)}[4+3c^2(1+z^2/l^2)]}{l(1+z^2/l^2)^2} + (1+3c^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{z/l}{\sqrt{1-c^2(1+z^2/l^2)}} \right\}, \quad (1.7)$$

где $c^2 = Ah_0/\nu^2$. При инъекции в плоскости $z = 0$ величина $c = \cos \alpha$, где α – угол начальной скорости с нормалью к силовой линии **H**.

Исследуем поведение траектории $\Phi = \Phi(z)$.

1. Начальный угол ее с осью z определяется при $z \rightarrow 0$:

$$-\Phi = \frac{\nu}{2\omega_0 l} \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} z.$$

2. В плоскостях $z = \pm l/\sqrt{2}$ (точка перегиба силовых линий **H**) траектория параллельна оси z .

3. Точки возврата траектории соответствуют $z_n = \pm l \operatorname{tg} \alpha$,

$$-\Phi = \frac{\nu}{8\omega_0 l} (1 + 3 \cos^4 \alpha) \frac{2n+1}{2} \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. Частица возвращается к плоскости $z = 0$ при азимутах

$$-\Phi_n = \frac{\nu}{8\omega_0 l} (1 + 3 \cos^4 \alpha) n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

Частица совершает колебательные движения по z , если амплитуда колебаний $a = l \operatorname{tg} \alpha$ не превышает z_m , в котором достигается максимальное поле на оси h_m , отсюда

$$\cos \alpha > \sqrt{h_0 / h_m}.$$

Записывая формулы (1.7) и (1.8) в виде

$$-\Phi = \frac{\nu}{8\omega_0 l} \Phi(z), \quad -\Phi_1 = \frac{\nu}{8\omega_0 l} \Phi(0),$$

получим числовые данные для азимута возвращения частицы к плоскости $z = 0$ и основных точек траектории, представленные в таблице:

α°	$\Phi(l/\sqrt{2})$	z_n	Φ_n	$\Phi(0)$	$\Phi'(0)$	$\frac{1}{8}\Phi(0)$	α°	$\Phi(l/\sqrt{2})$	z_n	Φ_n	$\Phi(0)$	$\Phi'(0)$	$\frac{1}{8}\Phi(0)$
0	–	–	–	–	–	1,57	50	–	–	–	–	–	0,59
10	–	0,18	6	12	23,7	1,50	60	–	–	–	–	–	0,47
20	–	–	–	–	–	1,31	66	2,98	2,24	1,7	3,4	8,1	–
30	–	0,58	4,2	8,4	10	1,05	70	–	–	–	–	–	0,41
35	3,7	0,71	3,7	7,4	9,25	–	80	–	–	–	–	–	0,39
40	–	–	–	–	–	0,80	90	2,96	–	1,57	3,14	8,0	0,39
45	3,3	1,0	2,75	5,5	8,5	–							

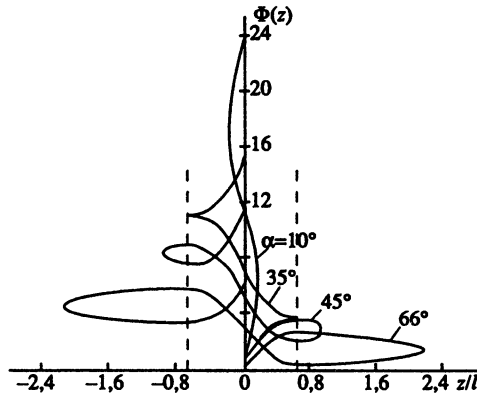


Рис. 1

На рис. 1 приведены траектории $\varphi(z)$ для различных начальных углов α .

1.2. Влияние дополнительных провалов поля

Рассмотрим кратко движение в поле с дополнительными провалами. Распределение поля на оси представлено на рис. 2. Основной провал в центре, а также дополнительные провалы по бокам и периферийное возрастание от h_1 до h_m будем аппроксимировать параболлами, характеризующимися параметрами $h_0, l; h_{01}, l_1; h_1, l_2$.

Для расчета траекторий φ удобно выразить как функцию от h :

$$-\varphi(h) = \frac{mc\nu}{8eh_0l} \left[\frac{\sqrt{h/h_0 - 1} \sqrt{1 - Ah/\nu^2} (4 + 3Ah/\nu^2)}{(h/h_0)^2} + \left(1 + \frac{3A^2 h_0^2}{\nu^4} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h/h_0 - 1}{1 - Ah/\nu^2}} \right]. \quad (1.9)$$

Так как A – величина, постоянная для данной траектории и определяющаяся начальными условиями при $z = 0$: $A = (w^2/h)_{z=0} = (\nu^2 \cos^2 \alpha)/h_0$, то $\varphi(h)$ зависит только от двух параметров, определяющих яму, – от минимального поля h_{0i} и l_i :

$$\varphi = \varphi(h, h_{0i}, l_i).$$

При этом следует помнить, что для каждой ямы начало отсчета z и φ принято в ее центре.

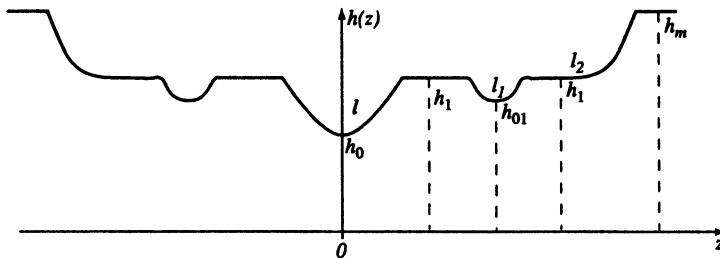


Рис. 2

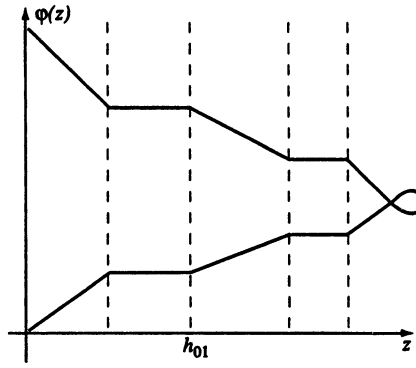


Рис. 3

На участках постоянного поля дрейфа не происходит, поэтому для схемы рис. 2 получим для азимута при первом возвращении частицы к плоскости $z = 0$

$$-\varphi_1 = 2\varphi(h_1, h_0, l) + 4\varphi(h_1, h_{01}, l_1) + \left(1 + \frac{3A^2 h_1^2}{v^4}\right) \frac{mcv}{8eh_1 l} \pi. \quad (1.10)$$

Средний член в (1.10) определяет набег азимута из-за наличия дополнительного провала l_1 . Траектория $\varphi = \varphi(z)$ для поля с провалом (см. рис. 2) схематически показана на рис. 3.

2. ДЛИНА ПУТИ ЧАСТИЦЫ

Длина траектории частицы в магнитном поле вычисляется очень просто, благодаря постоянству ее скорости:

$$S = vt.$$

При движении в параболической "потенциальной" яме время возвращения частицы к плоскости $z = 0$ определяется из (1.6): $(\sqrt{Ah_0}/l) t = \pi$, откуда

$$S = \pi l / \cos \alpha. \quad (2.1)$$

Вообще путь от точки $z = 0$ до произвольной точки z есть

$$S = \frac{vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \frac{z/l}{\sqrt{v^2/(Ah_0) - 1}} = \frac{vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \sqrt{\frac{h/h_0 - 1}{v^2/(Ah_0) - 1}}.$$

Отсюда предельным переходом $l \rightarrow \infty$ получаем путь в однородном поле с напряженностью h :

$$S = \frac{z}{\sqrt{1 - Ah/v^2}}.$$

Приведенные формулы позволяют написать выражение и для длины траектории в поле, схематически изображенном на рис. 2:

$$S = \frac{2vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \sqrt{\frac{h_1/h_0 - 1}{v^2/(Ah_0) - 1}} + \frac{2z_1}{\sqrt{1 - Ah_1/v^2}} +$$

$$+ \frac{4v l_1}{\sqrt{Ah_{01}}} \arcsin \sqrt{\frac{h_1/h_{01} - 1}{v^2/(Ah_{01}) - 1}} + \frac{2z_2}{\sqrt{1 - Ah_1/v^2}} + \frac{\pi l_2 v}{\sqrt{Ah_1}}, \quad (2.2)$$

где z_1 и z_2 – длины участков однородного поля с напряженностью h_1 .

3. ДОПУСК НА ИСКРИВЛЕНИЕ ОСИ СОЛЕНОИДА

Предположим, что ось ловушки представляет собой окружность радиуса R . Найдем сначала представление магнитного поля вблизи такой искривленной оси. С этой целью запишем компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат r, θ, z в виде разложения по степеням z и $\rho = r - R$:

$$\begin{aligned} H_\theta &= h + \alpha_1 \rho + \alpha_2 z + \alpha_3 \rho^2 + \alpha_4 z^2 + \alpha_5 \rho z + \dots, \\ H_z &= \beta_1 \rho + \beta_2 z + \beta_3 \rho^2 + \beta_4 z^2 + \beta_5 \rho z + \dots, \\ H_r &= \gamma_1 \rho + \gamma_2 z + \gamma_3 \rho^2 + \gamma_4 z^2 + \gamma_5 \rho z + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Компоненты H_z и H_r не содержат нулевых членов, так как по предположению центральная силовая линия имеет форму окружности $r = R$. Величины h, α, β и γ будем считать функциями $s = R\theta$. Линейные члены при $R = \infty$ имеют порядок малости $\varepsilon \sim h\rho/h$, квадратичные члены $\sim \varepsilon^2$. Будем предполагать, что

$$\rho/R \sim \varepsilon^2$$

или еще меньше, тогда, вследствие того что соответствующие члены в (3.1) исчезают при $R \rightarrow \infty$, заключаем, что

$$\beta_3, \beta_5, \gamma_3, \gamma_4 \sim \varepsilon^3$$

или меньше, и, аналогично,

$$\alpha_4 \approx \alpha_3, \quad \beta_2 \approx \gamma_1.$$

Кроме того, из соображений симметрии H_θ и H_r – четные функции z , а H_z – нечетная, отсюда

$$\alpha_2 = \alpha_5 = \beta_4 = \gamma_2 = \gamma_5 = 0.$$

Таким образом (3.1) с точностью до ε^2 включительно может быть записано в виде

$$H_\theta = h + \alpha_1 \rho + \alpha_3 (\rho^2 + z^2), \quad H_z = \beta_1 \rho + \gamma_1 z, \quad H_r = \gamma_1 \rho.$$

Связь между оставшимися коэффициентами находится с помощью уравнений $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$, в результате получаем:

$$\begin{aligned} H_\theta &= h \left(1 - \frac{\rho}{R} \right) - \frac{h''}{4} (\rho^2 + z^2), \\ H_z &= -\frac{h'}{2} z, \quad H_r = -\frac{h'}{2} \rho, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где штрихи обозначают производные по s .

Согласно формулам (3.2) получим уравнения движения центра ларморовской окружности [2] с принятой ранее точностью в виде

$$\dot{s} = \sqrt{v^2 - Ah(s)}, \quad \dot{z} = \varepsilon - \beta\rho - \gamma z, \quad \dot{\rho} = \beta z - \gamma\rho, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon = \frac{h^2}{R} \frac{mc(2v^2 - Ah)}{2eh^3}$, $\beta = \left(\frac{3h'^2}{4} - \frac{hh''}{2} \right) \frac{mc(2v^2 - Ah)}{2eh^3}$, $\gamma = \frac{h'}{2h} \dot{s}$, а $h = h(s)$ – распределение поля на оси $r = R$.

Умножая второе из уравнений (3.3) на мнимую единицу и складывая его с третьим, получим, обозначая $\rho + iz = P$,

$$\dot{P} + (\gamma + i\beta)P = i\varepsilon.$$

Отсюда согласно известным формулам для решения линейного уравнения

$$P = \left\{ P_0 + i \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp \left[\int_0^\tau (\gamma + i\beta) dt \right] d\tau \right\} \exp \left[- \int_0^t (\gamma + i\beta) dt \right]. \quad (3.4)$$

При заданной функции $h(s)$ функция (3.4) дает решение задачи о движении частицы, если известна зависимость $s = s(t)$. Эта зависимость определяется решением первого уравнения (3.3). Отклонение x от оси $r = R$ и азимут φ вокруг этой оси определяются формулами

$$x = \sqrt{\rho^2 + z^2} = |P|, \quad \varphi = \arg P. \quad (3.5)$$

Для невозмущенного движения ($R \rightarrow \infty$) $\varepsilon = 0$ получаем

$$P = P_0 \exp \left[- \int_0^t (\gamma + i\beta) dt \right].$$

Полагая $P_0 = x_0 e^{i\varphi_0}$, найдем x и φ для этого случая:

$$x = x_0 \exp \left[- \int_0^t \gamma dt \right] = x_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad \varphi = \varphi_0 - \int_0^t \beta dt, \quad (3.6)$$

т.е. те же формулы, что и раньше. Влияние искривления центральной силовой линии дает добавку к комплексному вектору P вида

$$\Delta P = i \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp \left[\int_i^\tau (\gamma + i\beta) dt \right] d\tau = i \int_0^t \varepsilon(\tau) \sqrt{\frac{h(\tau)}{h(t)}} \exp \left[i \int_i^\tau \beta dt \right] d\tau. \quad (3.7)$$

При параболической аппроксимации поля на оси $r = R$

$$h(s) = h_0(1 + s^2/l^2), \quad s = l \operatorname{tg} \alpha \sin \left(\frac{v}{l} \cos \alpha \cdot t \right),$$

интеграл в экспоненте (3.7) равен

$$\int_i^\tau \beta(\xi) d\xi = \varphi[s(t)] - \varphi[s(\tau)],$$

где функция $\varphi(s)$ определяется формулой (1.7). Таким образом, подынтегральное выражение в (3.7) представляется через элементарные функции. В общем случае интеграл в (3.7) достаточно сложен, поэтому мы ограничимся его вычислением при малых α , отбрасывая члены $\sim \alpha^2$. В этом приближении

$$h \approx h_0, \quad h'^2 \approx 0, \quad h'' \approx 2h_0/l^2, \quad 2v^2 - Ah \approx v^2,$$

величины ϵ и β являются постоянными:

$$\epsilon \approx v^2 / (2\omega_0 R), \quad \beta \approx -v^2 / (2\omega_0 l^2).$$

Вычисляя интеграл в (3.7), получим

$$\Delta P = i \frac{2\epsilon}{\beta} \exp\left(-\frac{i\beta t}{2}\right) \sin \frac{\beta t}{2},$$

отсюда

$$\Delta x = \frac{2l^2}{R} \sin \frac{v^2 t}{4\omega_0 l^2}, \quad \Delta z = \frac{l^2}{R} \sin \frac{v^2 t}{4\omega_0 l^2}, \quad \Delta \rho = \frac{l^2}{R} \left(1 - \cos \frac{v^2 t}{2\omega_0 l^2}\right). \quad (3.8)$$

Для однородного по θ магнитного поля ($l \rightarrow \infty$) непосредственно из уравнений (3.3) нетрудно получить

$$\Delta z = \frac{v^2(2 - \cos^2 \alpha)}{2\omega_0 R} t, \quad \Delta \rho = 0,$$

что совпадает с предельным случаем (3.8) $l \rightarrow \infty$ для $\alpha^2 \approx 0$.

При $l \rightarrow \infty$ дрейф по z является неограниченным. При конечном же l амплитуда отклонения от невозмущенной траектории не превышает

$$\Delta x_{\max} = 2l^2 / R. \quad (3.9)$$

Последняя формула позволяет задать допуск на радиус искривления соленоида R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Будкер Г.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 3.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1955.

О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА*

1. ВВЕДЕНИЕ

В тороидальных системах плазменный шнур может существовать значительные промежутки времени. Под действием как внутренних, так и внешних причин этот шнур непрерывно колеблется. Спектр этих колебаний теоретически изучен достаточно хорошо [1, 2], однако вопрос о гашении этих колебаний фактически не исследовался. В данной работе рассмотрено гашение колебаний плазменного шнура с помощью джоулевых потерь в кожухе. Мы увидим, что можно так подобрать условия, чтобы волна затухала за время нескольких колебаний.

В работе исследуются только высокочастотные колебания шнура и не исследуются медленные "ползания" шнура. Последние должны подавляться совсем другими средствами, хотя бы так, как они подавляются теперь, т.е. с помощью толстого медного кожуха.

* Совместно с А.И. Морозовым // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 391–415.

Прежде чем переходить к исследованию электромагнитного гашения колебаний плазменного шнура, остановимся кратко на некоторых результатах [3], касающихся взаимодействия нитей с током, движущихся вблизи поверхности среды с заданными $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Рассмотрим прямую нить с током J , движущуюся параллельно границе раздела, на расстоянии l от нее, со скоростью u . Введем систему координат, направив ось z вдоль v , ось x вдоль нити и ось y вдоль внешней нормали к среде. Если нить бесконечно тонкая, то

$$j_x = J\delta(\xi)\delta(y-l), \quad \xi = z - ut, \quad (1.1)$$

и поле такой нити в вакууме может быть описано с помощью x -компоненты векторного потенциала:

$$A_x^\delta = \int a^\delta e^{ik\xi - s(y-l)} dk, \quad a^\delta = \frac{J}{cs}, \quad (1.2)$$

где

$$s^2 - (1 - \beta^2)k^2 = 0, \quad \text{Re } s > 0. \quad (1.3)$$

Наличие вещества в левом полупространстве искажает поле нити. В области $y > 0$ его теперь можно представить как $A = A^\delta + A^s$, где A^s – "отраженное" поле, равное

$$A^s = \int a^\delta \frac{1 - \chi}{1 + \chi} e^{ik\xi - s(y+l)} dk, \quad (1.4)$$

а в области $y < 0$ поле имеет вид

$$A' = \int a^\delta \frac{2}{1 + \chi} e^{ik\xi - sl + s'y} dk, \quad s'^2 - (1 - \mu\epsilon\beta^2)k^2 = 0. \quad (1.5)$$

Величина

$$\chi = \frac{s'}{\mu s} = \frac{\sqrt{1 - \mu\epsilon\beta^2}}{\mu\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.6)$$

при $\beta = 0$ переходит в обычное в магнитостатике выражение $1/\mu$.

Характер закономерностей, которые имеют здесь место, особенно отчетливо выступает при движении шнура с током вблизи среды с вещественными ϵ и μ , т.е. среды без поглощения. В этом случае при скорости нити, меньшей скорости света в среде, величина χ падает с ростом скорости, оставаясь вещественной. Из этого вытекает интересный факт, что независимо от свойств среды при $u \rightarrow c/\sqrt{\mu\epsilon}$ в области $y > 0$ отраженное поле стремится к тому, которое создается идеальным магнетиком с $\mu \rightarrow \infty$. При переходе через скорость света в среде величина χ становится мнимой, а поле A' – чисто волновым, т.е. появляется черенковское излучение. "Отраженное" поле A^s действует на нить с силой

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \nabla A^s \Big|_{y=l; \xi=0}. \quad (1.7)$$

Подставляя сюда (1.4), получим

$$\mathbf{F} = \frac{J^2}{c^2} \int \frac{1}{s} \nabla e^{ik\xi - s(y+l)} \frac{1 - \chi}{1 + \chi} dk \Big|_{y=l, \xi=0}. \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что сила притяжения пропорциональна $\operatorname{Re} \frac{1-\chi}{1+\chi}$, тогда как сила торможения пропорциональна $\operatorname{Im} \frac{1-\chi}{1+\chi}$.

Если движение происходит около непоглощающей среды, то торможение появляется только при переходе через скорость света в среде. Очевидно, полная мощность электромагнитных потерь при движении нити равна

$$P = -F_z v. \quad (1.9)$$

Если движение происходит около непоглощающей среды, то при $|\chi| = 1$ сила притяжения меняет знак, т.е. становится силой отталкивания. Скорость, соответствующую $|\chi| = 1$, будем называть скоростью инверсии. Она равна

$$u_{\text{инв}} = c \sqrt{\frac{1+\mu^2}{\mu\epsilon + \mu^2}}. \quad (1.10)$$

При $\mu = 1$ $u_{\text{инв}} = c\sqrt{2}/\sqrt{\epsilon}$, а при $\epsilon \gg \mu \gg 1$

$$u_{\text{инв}} = c\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv u_\mu. \quad (1.11)$$

На рис. 1 изображена зависимость компоненты силы F_y , действующей на бесконечно тонкую нить, движущуюся вблизи диэлектрика, от скорости v . Если нить движется в щели, то, очевидно, ее движение будет устойчиво, только когда $v > u_{\text{инв}}$. При скорости нити $v \gg u_{\text{инв}}$ мощность излучения около непоглощающей среды стремится в нерелятивистском случае к постоянному пределу:

$$P \rightarrow \frac{2j^2}{c^2 l} c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что для получения больших мощностей излучения желательно выбирать u_μ как можно большим.

Если движение происходит около металла, то и в этом случае можно ввести скорости, аналогичные скорости света в диэлектрике и скорости инверсии u_μ [3]. Первая из них равна

$$u_1 = \frac{c^2}{4\pi\sigma l},$$

а вторая

$$u_2 = \mu^2 u_1.$$

Следует иметь в виду, что только при $\mu > 1$ вторая скорость соответствует по порядку величины скорости, при которой происходит перемена знака F_y .

Мощность потерь при движении нити вдоль металлической поверхности со скоростью $v \gg u_2$ равна $P = \frac{j^2}{2lc^2} \sqrt{\pi}(u_2 v)^{1/2} = \left(\frac{j^2}{2c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v\right) \frac{\delta\mu}{l}$. Здесь $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu}(v/l)}$ — ха-

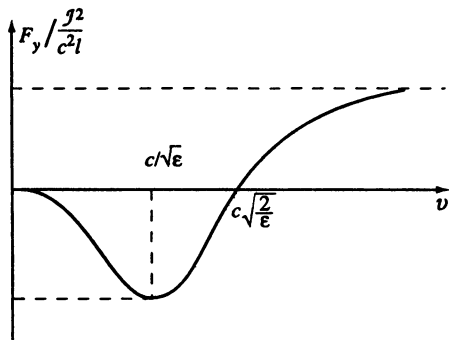


Рис. 1

ракторная толщина скин-слоя. Отсюда видно, что максимум потерь при соблюдении требования устойчивости $\nu > u_2$ будет иметь место в том случае, если $\delta\mu/l \sim 1$.

Наибольший практический интерес представляет тот случай, когда скорость шнура с током значительно превосходит скорость света в среде. При этом режиме решение задач резко упрощается в связи с возможностью использовать граничные условия М.А. Леонтовича [4] и тем самым ограничиться расчетом поля только в той среде, где находится источник волн. В [3] показано, что применение этих условий эквивалентно для плоской границы раздела разложению по степеням $\frac{c^2}{\mu\epsilon\nu^2}$, а вблизи кривой границы раздела параметром малости является

$$\frac{c^2}{\sqrt{\mu\epsilon\nu}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{k},$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности раздела, k – волновое число. Условия М.А. Леонтовича позволяют ввести в ряде случаев скорость потока энергии магнитного поля. Она может быть определена как

$$v_s = \frac{S_n}{W} = \frac{c}{4\pi} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]_n}{\frac{1}{8\pi} H^2} = 2c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{H_t}{H^2}.$$

Если $\nu \gg u_\mu$, магнитное поле произвольно движущегося контура на границе раздела обладает той особенностью, что нормальная составляющая поля много меньше тангенциальной составляющей $H_n/H_t \sim \nu/u_\mu$, и поэтому $v_s \approx 2c\sqrt{\mu/\epsilon} = 2u_\mu$.

2. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть плазма, ограниченная цилиндрической поверхностью S_0 , находится в равновесии во внешнем поле \mathbf{H}_{20} , которое касательно к поверхности плазмы.

Магнитное поле внутри плазмы \mathbf{H}_{10} будем считать однородным и направленным вдоль оси z цилиндра.

Малые колебания плазмы могут быть описаны линеаризованной системой уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H}_1 &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}_{10}], \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_1^2}{\rho_0} \nabla \rho - \frac{1}{4\pi\rho_0} [\mathbf{H}_{10} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь нулевым индексом отмечены невозмущенные значения величин; $c_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ – гидродинамическая скорость звука.

Известно [1], что в плазменном цилиндре существуют только волны, распространяющиеся с возмущением плотности. Поэтому эти уравнения для наших целей удобно преобразовать таким образом, чтобы получить одно уравнение для ρ и найти выражения для \mathbf{v} и \mathbf{H} через ρ . Используя равенства

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_{10} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1] &= \nabla(\mathbf{H}_{10}\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_{10}\nabla)\mathbf{H}_1, \\ \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}_{10}] &= (\mathbf{H}_{10}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{H}_{10} \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

дифференцируя второе и третье уравнения (2.1) по t и подставляя в них четвертое уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= c_1^2 \nabla^2 \rho + \frac{H_{10}}{4\pi} \nabla^2 H_{1z}, \\ \frac{\partial^2 H_{1z}}{\partial t^2} &= -\frac{c_1^2 H_{10}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{H_{10}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Отсюда, дифференцируя еще два раза по t , найдем

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} = L \nabla^2 \rho, \quad (2.4)$$

где через L обозначен оператор

$$L = (c_1^2 + v_1^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$v_1 = \mathbf{H}_{10} / \sqrt{4\pi\rho_0}$ – альфвеновская скорость, соответствующая внутреннему магнитному полю \mathbf{H}_{10} . Введем еще оператор L_1 :

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применяя к четвертому уравнению (2.1) оператор L_1 и используя (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \left(L \nabla \rho - v_1 v_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right). \quad (2.5)$$

Аналогично из третьего уравнения (2.1) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1 \mathbf{H}_1 = -\sqrt{\frac{4\pi}{\rho_0}} \left(v_1 \frac{\partial}{\partial z} L \nabla \rho - v_1 \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} \right). \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) и (2.6) выражают \mathbf{H}_1 и \mathbf{v} через скалярную функцию ρ , удовлетворяющую уравнению (2.4).

На поверхности S идеально проводящей плазмы должны быть выполнены два условия: равенство нулю нормальной составляющей поля и равенство давлений с обеих сторон поверхности:

$$(\mathbf{H}_2 \mathbf{n})_S = 0, \quad p + \frac{H_1^2}{8\pi} = \frac{H_2^2}{8\pi} \Big|_S, \quad (2.7)$$

где через \mathbf{n} обозначена внешняя нормаль к поверхности S . Считая эти условия выполненными для невозмущенных величин ρ_0 , \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} на невозмущенной поверхности S_0 с нормалью \mathbf{n}_0 :

$$(\mathbf{H}_{20} \mathbf{n}_0)_{S_0} = 0, \quad p_0 + \frac{H_{10}^2}{8\pi} = \frac{H_{20}^2}{8\pi} \Big|_{S_0}, \quad (2.8)$$

получим с точностью до членов первого порядка малости

$$(\mathbf{H}_2 \mathbf{n}_0) = (\mathbf{H}_{20} \nabla \xi_n) \Big|_{S_0}, \quad c_1^2 \rho + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_{10} \mathbf{H}_1) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_{20} \mathbf{H}_2) + \frac{\xi_n}{8\pi} (\mathbf{n}_0 \nabla H_{20}^2) \Big|_{S_0}. \quad (2.9)$$

Здесь ξ_n – расстояние между поверхностями S и S_0 по нормали \mathbf{n}_0 . Для нормали к возмущенной поверхности S использована приближенная формула $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - \nabla \xi_n$, где ξ_n – функция от координат на поверхности S_0 . Формулы (2.8), (2.9) и являются граничными условиями, заданными на невозмущенной поверхности S_0 . Целесообразно преобразовать (2.9) таким образом, чтобы они выражались только через ρ и возмущенное магнитное поле \mathbf{H}_2 .

Для преобразования граничных условий (2.9) воспользуемся уравнениями (2.3) и (2.5):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{H}_{10}}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rho, \quad \frac{\partial}{\partial t} (L_1 v_n) = -\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{n}_0 \nabla L \rho). \quad (2.10)$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1 \xi_n = -\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{n}_0 \nabla L \rho). \quad (2.11)$$

Применяя оператор $L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к обоим уравнениям (2.9), с учетом (2.10), (2.11) окончательно получим

$$L \left[L_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_0 \nabla v_2^2) (\mathbf{n}_0 \nabla) \right] \rho = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_2 \mathbf{H}_2) \Big|_{S_0}, \quad (2.12)$$

$$L (v_2 \nabla (\mathbf{n}_0 \nabla)) \rho = -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2) \Big|_{S_0};$$

через v_2 аналогично v_1 обозначена величина $v_2 = \mathbf{H}_{20} / \sqrt{4\pi \rho_0}$. Невозмущенные поля \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} считаются заданными и связаны соотношениями (2.8). Уравнения (2.4) и (2.12) составляют полную систему уравнений и граничных условий на поверхности невозмущенной плазмы S_0 , если к ним добавить еще уравнения Максвелла для возмущенного поля \mathbf{H}_2 во внешней по отношению к плазме области. Величины v и \mathbf{H}_1 определяются через ρ посредством соотношений (2.5) и (2.6). Отметим, что из (2.5) и (2.6) следует, что v и \mathbf{H}_1 удовлетворяют тому же уравнению (2.4), что и ρ .

3. ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим случай, когда \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} параллельны оси z и однородны. Они должны быть связаны условием равенства давлений (2.8). Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_2 можно выразить через векторный потенциал \mathbf{A} , имеющий одну компоненту $A = A_y$:

$$H_{2x} = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad H_{2z} = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Тогда граничные условия на поверхности плазмы $x = 0$ запишутся согласно (2.12) в виде

$$L \rho = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} v_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial A}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$v_2 L \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A.$$

Скалярные функции ρ и A удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} - L \nabla \rho = 0, \quad \nabla^2 A = 0. \quad (3.2)$$

Решения (3.2) ищем в виде

$$\rho = \rho_1 e^{\alpha x + ikz - i\omega t} \quad (x < 0), \quad A = A_1 e^{\beta x + ikz - i\omega t} \quad (x > 0).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.2), найдем α и β :

$$\alpha^2 = -k^2 \frac{(u^2 - v_1^2)(u^2 - c_1^2)}{(c_1^2 + v_1^2)u^2 - c_1^2 v_1^2}, \quad \beta^2 = k^2. \quad (3.3)$$

Здесь через $u = \omega/k$ обозначена фазовая скорость волны возмущения поверхности. Если плазма занимает все нижнее полупространство $x < 0$, то необходимо выбирать $\text{Re } \alpha > 0$. Аналогично, если пространство над плазмой $x > 0$ неограничено, то следует выбирать $\text{Re } \beta < 0$. Величина $k = 2\pi/\lambda$ определяет длину волны колебаний плазмы. Для несжимаемой жидкости ($c_1 \rightarrow \infty$) из (3.3) получаем $\alpha^2 = k^2$.

При наличии экранов над поверхностью плазмы векторный потенциал A можно записать в виде

$$A = f_2(x) e^{ikz - i\omega t}.$$

Подстановка в граничные условия (3.1) приводит к соотношению

$$\alpha = -k^2 \left(\frac{u^2 - v_1^2}{v_2^2} \right) \frac{f_2(0)}{f_2'(0)}, \quad (3.4)$$

которое вместе с (3.3) определяет фазовую скорость волны u . Таким образом, для получения дисперсионного уравнения остается только определить $f_2(0)/f_2'(0)$.

Добавление однородных магнитных полей, как внешнего, так и внутреннего, перпендикулярных направлению z распространения волн, не влияет на законы распространения волн, а сказывается только на условии равновесия (2.8). Действительно, граничные условия (2.9) останутся выполненными для возмущений H_{1y} и H_{2y} , равных нулю.

3.1. Свободные колебания плоской поверхности плазмы

Магнитное поле над свободной поверхностью плазмы описывается векторным потенциалом $A = A_1 e^{-kx + ikz - i\omega t}$. Отсюда $f_2/f_2' = -1/k$, и для α согласно (3.4) получаем

$$\alpha = k(u^2 - v_1^2)/v_2^2. \quad (3.5)$$

Исключая α из (3.3) и (3.5), получим для фазовой скорости волн выражение

$$u^2 = \frac{2c_1^2 v_1^2 + v_1^4 - v_2^4 + \sqrt{4c_1^4 v_2^4 + (v_1^4 - v_2^4)^2}}{2(c_1^2 + v_1^2)}. \quad (3.6)$$

При выводе (3.6) опущен корень $u = v_1$, соответствующий плоской альфвеновской волне $\alpha = 0$. Квадратный корень выбран со знаком (+) в силу того, что знак (-) дает $\alpha < 0$.

Отметим предельные случаи:

а) для несжимаемой жидкости ($c_1 \rightarrow \infty$)

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2;$$

б) для плазмы без внутреннего магнитного поля ($u_1 \rightarrow 0$)

$$u^2 = v_2^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{v_2^2}{2c_1^2} \right)^2} - \frac{v_2^2}{2c_1^2} \right].$$

3.2. Колебания плоской поверхности плазмы при наличии диэлектрической стенки, параллельной этой поверхности

Электромагнитное поле в области 2 между плазмой и диэлектриком и в области 3 – в диэлектрике с характеристиками μ и $\epsilon = \epsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ описывается векторным потенциалом $A = A_y$:

$$H_{2z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad H_{2x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad E_{2y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}.$$

Решения волнового уравнения в области 3 и уравнения Лапласа в области 2 для A_y выбираем в виде

$$A_{3y} = C e^{-\beta x + ikz - i\omega t}, \quad A_{2y} = (A e^{-kx} + B e^{kx}) e^{ikz - i\omega t},$$

где $\beta^2 = k^2 - \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}$. Из условия непрерывности A_y и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x}$ на границе диэлектрика $x = b$ можно выразить A и B через C ; таким образом, получаем

$$-k \frac{f_2}{f_2'} = \frac{A - B}{A + B} = \frac{1 + \frac{\beta}{\mu k} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb + \frac{\beta}{\mu k}}$$

или, вводя фазовую скорость волн $u = \omega/k$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{1 + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - u^2/c_\phi^2} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - u^2/c_\phi^2}}. \quad (3.7)$$

Здесь $c_\phi = c/\sqrt{\mu\epsilon}$.

Это выражение показывает, что если экран является непроводящим, т.е. μ и ϵ – вещественны, то затухание волн начнется в том случае, если фазовая скорость волн станет больше фазовой скорости света в диэлектрике. А это означает, что отвод энергии при этих условиях осуществляется с помощью черенковского эффекта.

Проанализируем подробнее дисперсионное уравнение для несжимаемой плазмы при условии, что $u/c_\phi \gg 1$. В этом случае

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{1 - i \frac{u}{u_\mu} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb - i \frac{u}{u_\mu}}, \quad u_\mu = c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (3.8)$$

Полагая $u = u_0 + iw$ и считая $\frac{w}{u_0} \ll 1$, а $\frac{w}{u_\mu} \ll 1$, получим

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{\operatorname{cth} (kb u_0^2 / u_\mu^2 + 1)}{\operatorname{cth}^2 kb + u_0^2 / u_\mu^2}, \quad (3.9)$$

$$w = -\frac{1}{2} \frac{v_2^2}{u_\mu} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb} \left(\operatorname{cth}^2 kb + \frac{u_0^2}{u_\mu^2} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

При этом мы дополнительно предположили, что $\frac{w}{u_\mu} \operatorname{cth} kb \ll 1$. Рассмотрим (3.9), (3.10)

для двух крайних случаев:

1. Пусть $\operatorname{cth} kb \ll u_0 / u_\mu$ ("короткие волны"), тогда

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \operatorname{cth} kb, \quad (3.11)$$

$$w = -\frac{1}{2} v_2^2 \frac{u_\mu}{u_0^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb}. \quad (3.12)$$

Если $kb \gg 1$, то $u_0^2 \approx v_1^2 + v_2^2$ и

$$w = -u_\mu \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb}. \quad (3.13)$$

Интересующий нас режим сильного гашения может быть определен из условия $w \sim u_0$. Но, как видно из (3.13), это возможно лишь при условии $u_\mu \sim u_0 \operatorname{sh}^2 kb$, что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, при $kb \gg 1$ сильное гашение невозможно. Если же $kb \ll 1$, то

$$u_0^2 \approx v_1^2 + v_2^2 \frac{1}{kb}, \quad w = -\frac{1}{2} v_2^2 \frac{u_\mu}{k^2 b^2 \left(v_1^2 + v_2^2 \frac{1}{kb} \right)}.$$

Если $kb v_1^2 \ll v_2^2$, то $w \ll u_0$ при условии $\frac{u_0 kb}{u_\mu} \gg 1$. Последнее соотношение можно

записать в двух формах:

$$\omega b \geq u_\mu, \quad b \geq \mu \delta, \quad (3.14)$$

первое из которых относится к непроводящей среде, а второе к проводящей среде со скин-слоем, равным $\delta = c / \sqrt{4\pi\sigma\omega}$.

Структуру соотношения (3.14) легко понять, если учесть, что $u_0 \gg u_\mu$, и поэтому в данном случае можно использовать выражение для скорости потока энергии, данное во введении. Считая, что энергия возмущения поля между плазмой и средой порядка

энергии колебаний плазмы, мы получим выражение для порядка времени τ_0 затухания колебаний

$$\tau_0 \sim b/u_\mu,$$

которое находится в полном согласии с (3.14).

2. Рассмотрим теперь случай столь длинных волн, что $\text{cth } kb \gg u_0/u_\mu$. В этом случае

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{u_0^2}{u_\mu^2} \text{th } kb, \quad w = -\frac{1}{2} \frac{v_2^2}{u_\mu}.$$

В общем случае (3.10) показывает, что максимум поглощения при данных u_0 и kb имеет место при $\text{cth } kb \sim u_0/u_\mu$. Если $kb \ll 1$, то это условие совпадает с (3.14), а если $kb \gg 1$, то оно совпадает с условием $u_0 \sim u_\mu$, указанным во введении.

4. ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ КРУГЛОГО ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

При исследовании колебаний круглого плазменного цилиндра, в отличие от плоской задачи, представляет интерес рассмотрение влияния обеих компонент внешнего поля, как H_z , так и H_ϕ . Будем считать, что невозмущенное внешнее поле имеет две компоненты: $(H_{0z})_z$ и $(H_{0z})_\phi$, удовлетворяющие условию равновесия на поверхности плазменного цилиндра $r = a$:

$$(H_{0z})_z^2 + (H_{0z})_\phi^2 = 8\pi p_0 + H_{10}^2.$$

Поле $(H_{0z})_z$ – однородно, а $(H_{0z})_\phi \sim \frac{1}{r}$, соответственно $\frac{\partial v_{2z}^2}{\partial r} = -\frac{2}{a} v_{2\phi}^2$ при $r = a$. Граничные условия (2.12) для волн на поверхности круглого цилиндра запишутся в виде

$$L \left\{ L_1 - \frac{1}{a} v_{2\phi}^2 \frac{\partial}{\partial r} \right\} \rho = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_2 \mathbf{H}_2), \quad (4.1)$$

$$L(v_2 \nabla) \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_{2r}).$$

Уравнение (2.4) для ρ в цилиндрической системе координат имеет решения

$$\rho = [A_n I_n(\alpha r) + B_n K_n(\alpha r)] e^{ikz + in\phi - i\omega t}, \quad (4.2)$$

где α определяется той же формулой (3.3), что и для плоской задачи. Если ρ и \mathbf{H}_2 представлены в виде

$$\rho = f_1(r) e^{ikz + in\phi - i\omega t}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{F}_2 e^{ikz + in\phi - i\omega t},$$

то, подставляя в граничные условия (4.1), получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[i \left(k v_{2z} + \frac{nv_{2\phi}}{a} \right) \frac{(\mathbf{F}_2 \mathbf{v}_2)}{k^2 F_{2r}} - \frac{v_{2\phi}^2}{k^2 a} \right], \quad (4.3)$$

где $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2(a)$. Уравнение (4.3) вместе с (3.3), определяющим α , дают дисперсионное уравнение. Для случая, когда плазма заполняет весь цилиндр $0 < r < a$, которым мы ограничимся, $f_1'(a)/f_1(a) = \alpha I_n'(\alpha a)/I_n(\alpha a)$. Член в (4.3), содержащий $\mathbf{F}_2(a)$, определяется характером внешнего возмущенного магнитного поля. Если представить \mathbf{H}_2

через магнитный потенциал ψ : $\mathbf{H}_2 = -\nabla\psi$, а ψ записать в виде

$$\psi = f_2(r)e^{ikz+in\varphi-i\omega t},$$

то вместо уравнения (4.3) получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[-\frac{f_2(a)}{f_2'(a)} \left(v_{2z} + \frac{nv_{2\varphi}}{ka} \right)^2 - \frac{v_{2\varphi}^2}{k^2 a^2} \right]. \quad (4.4)$$

Так возмущенное магнитное поле вне цилиндрического плазменного столба, находящегося в "свободном" пространстве, описывается скалярным потенциалом

$$\psi = C_1 K_n(kr)e^{ikz+in\varphi-i\omega t}.$$

Отсюда $f_2(a)/f_2'(a) = K_n(ka)/kK_n'(ka)$, и согласно (4.4) получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{\alpha}{k} \frac{I_n'(\alpha a)}{I_n(\alpha a)} \left[-\frac{K_n(ka)}{K_n'(ka)} \left(v_{2z} + n \frac{v_{2\varphi}}{ka} \right)^2 - \frac{v_{2\varphi}^2}{ka} \right]. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) и (3.3) определяют зависимость фазовой скорости волн u от волновых чисел k и n . Эквивалентное уравнение получено и подробно исследовано В.Д. Шафрановым [1].

4.1. Плазменный цилиндр внутри цилиндрического канала в диэлектрике при условии применимости граничных условий М.А. Леонтовича

Для описания поля в пространстве между плазменным цилиндром и диэлектриком необходимо использование двух скалярных функций [5], удовлетворяющих уравнению Лапласа. Магнитное и электрическое поле в этой области можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial r}, & E_r &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} - i \frac{\omega n}{kcr} \psi_1, \\ H_z &= -ik\psi_1, & E_z &= -ik\psi_2, \\ H_\varphi &= -\frac{in}{r} \psi_1, & E_\varphi &= -\frac{in}{r} \psi_2 + \frac{\omega}{kc} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \end{aligned}$$

где ψ_i – решения уравнения Лапласа

$$\psi_i = [A_i I_n(kr) + B_i K_n(kr)] e^{ikz+in\varphi-i\omega t},$$

ψ_1 является скалярным потенциалом для магнитного поля: $\mathbf{H} = -\nabla\psi_1$. Члены с функцией ψ_2 обязаны наличию "поперечно-магнитного" поля. Граничные условия при $r = b$ возьмем в форме М.А. Леонтовича:

$$E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi; \quad E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Эти условия дают связь между A_1 и B_1 , с помощью которой определяется отношение $f_2(a)/f_2'(a)$:

$$\frac{f_2(a)}{f_2'(a)} = \frac{1}{k} \frac{\left(1 + \frac{n^2}{k^2 b^2} \right) (K_{nb} I_{na} - I_{nb} K_{na}) - \frac{i\omega}{kc} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (K_{nb}' I_{na} - I_{nb}' K_{na})}{\left(1 + \frac{n^2}{k^2 b^2} \right) (K_{nb} I_{na}' - I_{nb} K_{na}') - \frac{i\omega}{kc} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (K_{nb}' I_{na}' - I_{nb}' K_{na}')}, \quad (4.6)$$

где $I_{na} = I_n(ka)$; $K'_{nb} = K'_n(kb)$ и т.д. Для идеально проводящего экрана отсюда получается [1]

$$\frac{f_2(a)}{f'_2(a)} = \frac{1}{k} \frac{K'_{nb} I_{na} - I'_{nb} K_{na}}{K'_{nb} I'_{na} - I'_{nb} K'_{na}}. \quad (4.7)$$

Поскольку рассмотренный в предыдущем разделе случай плоской границы соответствует $a/b \rightarrow 1$, $kb \rightarrow \infty$, здесь мы ограничимся обратным случаем – длинноволновыми колебаниями тонких шнуров. При условии $kb \ll 1$ дисперсионное уравнение (4.4), (4.6) записывается в виде

$$\frac{f_2(a)}{f'_2(a)} = -a \frac{1 - D \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 + D \left(\frac{a}{b}\right)^n}, \quad D = \frac{1 + i \frac{u}{u_\mu} \frac{kb}{n^2}}{1 - i \frac{u}{u_\mu} \frac{kb}{n^2}}. \quad (4.8)$$

Здесь, как обычно, $u = \omega/k$, $u_\mu = c\sqrt{\mu/\epsilon}$.

Упростим (4.8), еще раз считая $n = 1$ и $a/b \ll 1$. В этом случае из (4.4), (4.8) вытекает:

$$u^2 = v_1^2 + 2 \frac{v_{2\varphi} v_{2z}}{ka} - 2D \frac{v_{2\varphi}^2}{k^2 b^2}. \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) указывают, что при $ka \ll k^2 b^2$ максимум поглощения будет иметь место при $\frac{u}{u_\mu} kb \sim 1$, что совпадает с условием (3.14) предыдущего раздела. Заметим, что если $kb \frac{u}{u_\mu} \ll 1$ и kb очень мало, то колебания неустойчивы, тогда как при $\frac{u}{u_\mu} \gg 1$ они устойчивы при любых kb , при которых верно (4.9). Используя (4.9), найдем время затухания колебаний при условии, что $\frac{2v_2 v_{2z}}{ka} \gg v_1^2$:

$$\tau_0 \sim T \frac{b}{a} kb \left(\frac{v_{2z}}{v_{2\varphi}} \right). \quad (4.10)$$

Мы видим отсюда, что затухание колебаний тонкого шнура в оптимальном режиме, вообще говоря, достаточно быстрый процесс.

В заключение заметим, что применение условий Леонтовича к цилиндру эквивалентно разложению по степеням $\frac{1}{kb} \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}u}$.

4.2. Плазменный цилиндр в цилиндрическом канале в диэлектрике; поперечные колебания

Поперечными колебаниями плазменного цилиндра мы будем называть колебания, не зависящие от продольной координаты z . В этом случае электромагнитное поле над поверхностью плазмы может быть описано векторным потенциалом $A = A_z$:

$$H_z = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad E_r = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

В областях 2 и 3 между плазмой и диэлектриком и внутри диэлектрика векторный потенциал равен

$$A_{2z} = \left[A \left(\frac{r}{a} \right)^n + B \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] e^{in\varphi - i\omega t}, \quad A_{3z} = CH_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\varphi - i\omega t}, \quad (4.11)$$

где через γ обозначена величина $\gamma^2 \equiv \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2}$, $(\text{Re } \gamma)(\text{Re } \omega) > 0$.

Дисперсионное уравнение для волн на поверхности плазмы получается из (4.3) предельным переходом $k \rightarrow 0$:

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[1 - in \frac{F_{2\varphi}(a)}{F_{2r}(a)} \right]. \quad (4.12)$$

Функция $f_1(r)$ равна $I_n(\alpha r)$, где α согласно (4.3) определяется формулой $\alpha^2 = -\omega^2 / (c_1^2 + v_1^2)$. В дисперсионном уравнении (4.12) остается определить величину $F_{2\varphi} / F_{2r} = H_\varphi(a) / H_r(a)$. Для ее определения достаточно потребовать непрерывности A_z и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}$ на границе диэлектрика $r = b$. Дисперсионное уравнение получается в виде

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[1 + n \frac{\left(H_n + \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{a}{b} \right)^n - \left(H_n - \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{b}{a} \right)^n}{\left(H_n + \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{a}{b} \right)^n + \left(H_n - \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{b}{a} \right)^n} \right], \quad (4.13)$$

где $H_n = H_n^{(1)}(\gamma b)$. Для поперечных колебаний плазменного цилиндра без диэлектрического экрана, устремляя $\gamma \rightarrow 0$ (или $b \rightarrow \infty$), найдем

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} (1 - n). \quad (4.14)$$

При наличии идеально -проводящего экрана получим при $\gamma \rightarrow \infty$

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[1 - n \frac{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}}{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}} \right]. \quad (4.15)$$

Эти предельные случаи можно получить и из формул (4.4), (4.5) и (4.7), устремляя k к нулю.

Свободные колебания (4.14) являются устойчивыми при $n > 1$ в силу положительности $f_1'(a) / f_1(a)$. Случай $n = 1$ соответствует колебаниям плазменного цилиндра как целого, без изменения его формы. При этом в "свободном" пространстве плазменный цилиндр находится в безразличном равновесии: $\omega = 0$. При наличии идеально проводящего экрана

$$\omega^2 = \frac{2v_{2\varphi}^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \frac{(a/b)^2}{1 - (a/b)^2} \quad (4.16)$$

и плазменный цилиндр устойчиво колеблется около $r = 0$.

Для тонкого плазменного шнура ($a/b \ll 1$) в первом приближении $f_1'/f_1 \approx 1/a$, и для наиболее интересного случая $n = 1$

$$\omega^2 = -\frac{2v_\phi^2}{b^2} \frac{H_1(\gamma b) + \frac{\gamma b}{\mu} H_1'(\gamma b)}{H_1(\gamma b) - \frac{\gamma b}{\mu} H_1'(\gamma b)}. \quad (4.17)$$

Поведение колебаний шнура становится значительно более прозрачным в том случае, когда $\gamma b = 2\pi b/\lambda_3 = b/\delta \gg 1$. В этом случае из (4.17) вытекает простое дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -\frac{2v_\phi^2}{b^2} \frac{1 + i\frac{b\gamma}{\mu}}{1 - i\frac{b\gamma}{\mu}} = \frac{2v_\phi^2}{b^2} \frac{\left(\frac{b^2\gamma^2}{\mu^2} - 1\right) - 2i\frac{b\gamma}{\mu}}{1 + \frac{b^2\gamma^2}{\mu^2}}. \quad (4.18)$$

Из этого выражения видно, что колебания неустойчивы, если $\frac{b\gamma}{\mu} = \frac{b\omega}{u_\mu} \ll 1$, и устойчивы, если $\frac{b\gamma}{\mu} \gg 1$.

Максимум поглощения, очевидно, приходится на промежуточный режим, при котором $\frac{b\gamma}{\mu} \sim 1$. Если кожух является проводящим, то последнее условие принимает обычный вид: $\frac{b}{\mu\delta} \sim 1$.

Разумеется, практически естественно выбирать $\frac{b}{\mu\delta} \sim 2 + 3$. При этом условии колебание будет затухать за 2–3 периода, который с достаточной степенью точности можно считать равным $\frac{2\pi b}{\sqrt{2}v_\phi}$.

Полученные в данном пункте критерии устойчивости и максимума гашения совпадают, как и следовало ожидать, с полученными ранее (3.14).

Если плазменный шнур толстый, т.е. $a/b \sim 1$, а $\gamma b \gg 1$, то дисперсионное уравнение (4.13) может быть записано в ином виде. Полагая $1 + \frac{i\gamma b}{\mu} = e^{i\psi}$, запишем

$$\omega^2 = -\frac{2v_\phi^2}{b^2} a \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \frac{e^{2i\psi} + (a/b)^2}{1 + (a/b)^4 + 2(a/b)^2 \cos 2\psi}. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что переход от устойчивых колебаний к неустойчивым происходит в окрестности

$$\cos 2\psi + (a/b)^2 = 0.$$

Этим же условием определяется, очевидно, и максимум поглощения.

В заключение отметим, что "область уползания", о которой мы говорили выше, может быть уничтожена с помощью хорошо проводящего экрана, охватывающего гасящий кожух. Этому и посвящен следующий пункт.

4.3. Поперечные колебания плазменного цилиндра внутри диэлектрической трубы

В этом пункте рассматриваются два предельных случая двухслойного диэлектрического экрана:

1. Диэлектрическая труба, окруженная идеальным проводником.
2. Диэлектрическая труба в свободном пространстве.

Случай 1. Обозначим через b и l внутренний и внешний радиусы диэлектрической трубы и через $d = l - b$ ее толщину. Векторный потенциал $A = A_z$ внутри трубы (область 3) и между трубой и плазменным цилиндром (область 2) представляется формулами

$$A_{3z} = C \left[H_n^{(1)}(\gamma r) H_n^{(2)}(\gamma l) - H_n^{(2)}(\gamma r) H_n^{(1)}(\gamma l) \right] e^{in\varphi - i\omega t},$$

$$A_{2z} = \left[A \left(\frac{r}{a} \right)^n + B \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] e^{in\varphi - i\omega t}.$$

Дисперсионное уравнение (4.12) можно записать через A и B в виде

$$\omega^2 = - \frac{v_\Phi^2}{a} \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left[1 - n \frac{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \frac{A}{B}}{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \frac{A}{B}} \right].$$

Отношение $\frac{A}{B}$, как обычно, определяется из граничных условий непрерывности A_z и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}$ на границе $r = b$. Таким образом, находим

$$\frac{A}{B} = \frac{H'_{1b} H_{2l} - H'_{2b} H_{1l} + \frac{\mu n}{\gamma b} (H_{1b} H_{2l} - H_{2b} H_{1l})}{H'_{1b} H_{2l} - H'_{2b} H_{1l} - \frac{\mu n}{\gamma b} (H_{1b} H_{2l} - H_{2b} H_{1l})},$$

где через H_{ib} и H_{il} обозначены $H_n^{(i)}(\gamma b)$ и $H_n^{(i)}(\gamma l)$, штрихи означают производные по всему аргументу. Полученная формула существенно упрощается при условии $\gamma b \gg 1$. Заменяя ханкелевы функции на экспоненты, для этого случая получим

$$\frac{A}{B} = - \frac{1 - \frac{\mu n}{\gamma b} \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{\mu n}{\gamma b} \operatorname{tg} \gamma d}.$$

Для колебаний плазменного цилиндра как целого ($n = 1$) формула для частоты имеет вид

$$\omega^2 = \frac{2v_\Phi^2}{b^2} \frac{af_1'(a)}{f_1(a)} \frac{1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}{1 + \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d) - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left[1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d) \right]}.$$

Определение $f_1(r)$ содержится в п. 4.2. Для поперечных колебаний тонкого плазмен-

ного шнура $\frac{a}{b} \rightarrow 0$, $\frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \rightarrow \frac{1}{a}$ и при $n = 1$ для ω^2 получается выражение

$$\omega^2 = \frac{2\nu_\phi^2}{b^2} \frac{1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}{1 + \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}. \quad (4.20)$$

При вещественных μ и ϵ здесь будут иметь место резонансные эффекты. Чтобы их избежать, мы будем считать $\epsilon\mu$ мнимым.

Если $\gamma d \rightarrow \infty$, то $\omega^2 \rightarrow \frac{2\nu_\phi^2}{b^2}$, т.е. к частоте колебаний в идеально проводящем коаксиале радиуса b .

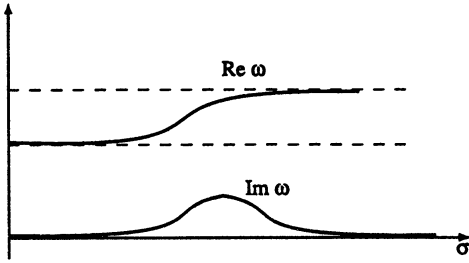


Рис. 2

Если же $\mu = 1$ и $\gamma d \rightarrow \infty$, то $\omega^2 \rightarrow \frac{2\nu_\phi^2}{(b+d)^2}$, т.е. также к частоте колебаний в идеально коаксиале, но уже радиуса $b + d$. Очевидно, переход от одной частоты к другой происходит при $|\gamma d| \sim 1$, т.е. при $d \sim \delta$. В этой переходной области будет наблюдаться и максимум поглощения, который, как видно из (4.20), будет иметь место при $b/\mu \sim 1$ (рис. 2).

Случай 2. Для случая диэлектрической трубы в свободном пространстве векторный потенциал внутри трубы (A_{3z}) и вне (A_{4z}) записывается в виде

$$A_{3z} = [AH_n^{(1)}(\gamma r) + BH_n^{(2)}(\gamma r)]e^{in\varphi - i\omega t}, \quad A_{4z} = Cr^{-n}e^{in\varphi - i\omega t}.$$

В области 2 векторный потенциал определяется той же формулой, что и в области 1.

Сшивание решений на границах $r = b$ и $r = l$ приводит к следующей формуле для $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{\left(H'_{2l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{2l}\right) \left(H_{1b} + \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{1b}\right) - \left(H'_{1l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{1l}\right) \left(H_{2b} + \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{2b}\right)}{\left(H'_{2l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{2l}\right) \left(H_{1b} - \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{1b}\right) - \left(H'_{1l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{1l}\right) \left(H_{2b} - \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{2b}\right)}. \quad (4.21)$$

При условии $\gamma b \gg 1$ из этой формулы получаем

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{n\mu}{\gamma l} + \frac{\gamma b}{n\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{b}{l} + \left(\frac{n\mu}{\gamma l} - \frac{\gamma b}{n\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}. \quad (4.22)$$

Для бесконечно тонкого плазменного шнура получаем ($n = 1$)

$$\omega^2 = - \frac{2\nu_\phi^2}{b^2} \frac{1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{\mu}{\gamma l} + \frac{\gamma b}{\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{b}{l} + \left(\frac{\mu}{\gamma l} - \frac{\gamma b}{\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}. \quad (4.23)$$

Наконец, для частоты колебаний бесконечно тонкого плазменного шнура в тонкой диэлектрической трубе (при условии $\gamma d \ll 1$) из формулы (4.23) находим (для $\mu \ll \gamma^2 b^2$)

$$\omega^2 = -\frac{2v_\phi^2}{b} \frac{\gamma^2 d}{2\mu - \gamma^2 bd}.$$

Для идеально проводящей трубы ($\gamma \rightarrow \infty$) получаем прежнюю формулу $\omega^2 = 2v_\phi^2/b$, а при условии $\gamma^2 bd \ll \mu$ $\omega^2 = v_\phi^2 \gamma^2 d / (\mu b)$. Если труба металлическая не идеально проводящая, то $\gamma^2 = i4\pi\sigma\omega/c^2$, $\mu = 1$ и последняя формула дает $\omega = -i\omega_0$, где $\omega_0 = 0$ и

$$\omega_0 = \frac{4\pi\sigma d}{c^2 b} v_\phi^2(a). \quad (4.24)$$

Полученные выражения для частот колебаний плазменного шнура как целого в металлической идеально проводящей трубе и с учетом конечной проводимости (4.24) совпадают с результатами, полученными в [6], где рассматривались силы, действующие на проводник с током внутри металлической трубы при малом его смещении от оси трубы.

Смещение шнура от оси трубы при идеальной проводимости трубы и в случае (4.24) описывается уравнениями

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \xi = \xi_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega_0} (1 - e^{-\omega_0 t}),$$

т.е. в первом случае шнур колеблется около положения равновесия, а во втором случае приближается к $\xi_\infty = \xi_0 + \dot{\xi}_0 / \omega_0$.

5. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ

Граничные условия (2.8) и (2.9) на поверхности цилиндрической плазмы справедливы и для изменяющегося во времени внешнего магнитного поля \mathbf{H}_{20} . Для получения граничных условий типа (2.12), но справедливых для переменного \mathbf{H}_{20} исключим сначала ξ_n из второго уравнения (2.9). Применяя к нему оператор $\frac{1}{H_{20}}(\mathbf{H}_{20}\nabla)$, с учетом первого уравнения (2.9) получим

$$\left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}}\nabla_p\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}}\nabla\right)(\mathbf{H}_{10}\mathbf{H}_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}}\nabla\right)(\mathbf{H}_{20}\mathbf{H}_2) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}_0\nabla H_{20})(\mathbf{n}_0\mathbf{H}_2).$$

При дифференцировании учтено, что $(\mathbf{H}_{20}\nabla)(\mathbf{n}_0\nabla\mathbf{H}_{20}^2) = 0$, так как \mathbf{H}_{20} вдоль поверхности плазмы постоянно. Ограничимся случаем, когда внешнее магнитное поле меняется только по величине, но не по направлению: $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_{20}/H_{20}) = 0$, тогда можно

исключить \mathbf{H}_1 из полученного уравнения применением к нему оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и подстановкой $\frac{\partial^2 H_{1z}}{\partial t^2}$ из (2.10).

Аналогично, записывая первое уравнение (2.9) в виде

$$\left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}} \nabla \xi_n \right) = \left(\frac{\mathbf{H}_2}{H_{20}} \mathbf{n}_0 \right),$$

исключим из него ξ_n , применив к нему оператор $L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и используя (2.11). Таким образом, получим граничные условия типа (2.12), справедливые в случае несжимаемой плазмы и для переменного внешнего поля $\mathbf{H}_{20}(t)$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_2 \nabla) L_1 p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \left[(\mathbf{v}_2 \nabla) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{v}_2 \mathbf{H}_2) + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{n}_0 \nabla \nu_2) (\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2) \right], \\ (\mathbf{v}_2 \nabla) (\mathbf{n}_0 \nabla p) &= -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2)}{\nu_2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ограничиваясь случаем плазмы с плоской границей, запишем условия (5.1) в виде

$$\begin{aligned} L_1 p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{v}_2 \mathbf{H}_2), \\ \left(\frac{\mathbf{v}_2 \nabla}{\nu_2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2)}{\nu_2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если внешнее магнитное поле параллельно оси z ($\mathbf{v}_2 \parallel oz$) и задано с помощью векторного потенциала $A = A_y$, то (5.2) могут быть представлены как

$$\begin{aligned} L_1 p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nu_2 \frac{\partial A_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{A_y}{\nu_2} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнение (2.4) для p в случае несжимаемой плазмы переходит в уравнение $\nabla^2(L_1 p) = 0$ для p . Опуская решения, соответствующие альфвеновским волнам, распространяющимся со скоростью ν_1 , получим, что p , как и A_y , удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2 A_y = 0. \quad (5.4)$$

Решения уравнений (5.4), удовлетворяющие граничным условиям (5.3), ищем в виде

$$p = p_t e^{kx+ikz}, \quad A_y = A_t e^{-kx+ikz},$$

где p_t и A_t – неизвестные функции времени t . Подставляя в (5.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_t}{dt^2} + \nu_1^2 k^2 p_t &= -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} k \frac{d^2}{dt^2} (\nu_2 A_t), \\ p_t &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{1}{k} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{A_t}{\nu_2} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Исключая сначала p , найдем уравнения для A_i :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{A_i}{v_2} \right) + k^2 (v_1^2 + v_2^2) \left(\frac{A_i}{v_2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Для определения p , введем вспомогательную функцию P_i такую, что $p_i = \ddot{P}_i P_i$ удовлетворяет тому же уравнению, что и A_i/v_2 . При медленном изменении внешнего поля решение (5.6) можно получить по методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна, что приводит к следующим формулам для A_i и p_i :

$$A_i = \frac{\text{const} \cdot v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^{3/4}} \exp \left[-ik \int_0^t \sqrt{v_1^2 + v_2^2} dt \right],$$

$$p_i = \text{const} (v_1^2 + v_2^2)^{3/4} \exp \left[-ik \int_0^t \sqrt{v_1^2 + v_2^2} dt \right].$$

Для плазмы без внутреннего поля ($v_1 = 0$) при возрастании внешнего поля H_{20} амплитуда колебаний внешнего поля растет как $(H_{20})^{1/2}$, а амплитуда колебаний давления p как $(H_{20})^{3/4}$.

Однако амплитуда колебаний поверхности плазмы ξ_n , как это видно из первой формулы (2.9), уменьшается $\sim (H_{20})^{-1/2}$.

При наличии идеально-проводящей стенки, параллельной поверхности плазмы, решение ищется в виде

$$p = p_i e^{kx+ikz}, \quad A_y = A_i \text{sh } k(x-b) e^{ikz}.$$

Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к тому, что в этом случае в предыдущих формулах следует заменить v_2^2 на $v_2^2 \text{cth } kb$, т.е. внешнее поле как бы увеличивается в $\sqrt{\text{cth } kb}$ раз, так же, как в разд. 3.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе различные случаи колебаний плазмы указывают на то, что эти колебания могут эффективно гаситься с помощью соответствующим образом подобранного кожуха. Если кожух является непроводящим, то гашение происходит за счет эффекта Черенкова, причем для интенсивного гашения при выполнении требования устойчивости необходимо, чтобы отношение b/u_μ было в 2–10 раз меньше периода волны (3.14):

$$b/u_\mu \leq T; \quad (6.1)$$

здесь b – расстояние от плазмы до экрана, $u_\mu = c\sqrt{\mu/\epsilon}$, T – период данной волны.

Если кожух является проводящим, то для эффективного гашения необходимо, чтобы скин-слой, соответствующий частоте колебаний волны, был в 2–10 раз меньше b/μ :

$$\delta \leq b/\mu, \quad (6.2)$$

где μ – магнитная проницаемость экрана.

Учитывая, что реально наблюдаемые частоты в тороидальной камере лежат в пределах от $\omega_1 \sim \omega_i$ до $\omega_2 \sim \frac{\omega_i}{\sqrt{\pi\Pi}} \sqrt{\frac{a}{R}}$ (см. [3, 6]), где R – большой радиус тора,

$\Pi \equiv \frac{e^2 N}{Mc^2}$, M – масса протона, N – число частиц в сечении, ω_i – ионная ларморовская частота, мы видим, что практически этот интервал частот достаточно узкий, так как обычно $\Pi \sim 10$ [2]. Это позволяет получить эффективное гашение волн всего диапазона с помощью плохо проводящего слоя, толщина которого ограничена (6.1) и равна толщине скин-слоя для частоты ω_2 . Оценим требуемую проводимость этого слоя. Если $H_i \sim 2 \cdot 10^3$ Гс, $b \sim 10^2$ см, $\mu \sim 10$, то $\delta \sim 10$ см, $\sigma \sim 10^{10}$ CGSE.

Мы, отмечали, что не обязательно гасить колебания с помощью проводящего слоя и, следовательно, джоулевого нагрева этого слоя. Возможно гашение волн и с помощью черенковского эффекта, при котором энергия колебаний плазмы отводится в виде высокочастотных электромагнитных волн.

Сказанное выше касалось только стабилизации высокочастотных колебаний плазмы. Медленное "уползание" плазменного шнура может быть стабилизировано внешним полем типа, описанного в [7], или толстым медным экраном. Слой, гасящий колебания, естественно нанести на внутреннюю поверхность такого экрана.

Отметим в заключение, что гасящий слой может эффективно выравнивать вихревое электрическое поле внутри тороидальной камеры с медным разрезанным кожухом и, таким образом, служить в качестве лайнера, если его вакуумные свойства окажутся достаточно хорошими.

Авторы приносят искреннюю благодарность М.А. Леонтовичу за полезные обсуждения данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. // Атом. энергия. 1956. Т. 5. С. 38.
2. Брагинский С.И. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1957. Т. 33. С. 459.
3. Морозов А.И. // Вестн. МГУ. 1957. № 1. С. 72.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
5. Стрэттон Д.А. Теория электромагнетизма. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
6. Леонтович М.А. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 1. С. 110.
7. Осовец С.М. // Там же. Т. 2. С. 238.

ИНТЕГРАЛЫ ДРЕЙФОВЫХ УРАВНЕНИЙ*

Если электромагнитное поле медленно меняется как в пространстве, так и во времени, то движение частиц в нем описывается приближенными, так называемыми дрейфовыми уравнениями. Эти уравнения получаются методом усреднения [1, 2] по быстрому вращению частицы по ларморовской окружности и могут быть записаны в виде следующих уравнений для движения центра ларморовской окружности (ведущего центра):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \frac{mc v_{\parallel}^2}{eH^4} [\mathbf{H}, (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}] + \frac{mc v_{\perp}^2}{2eH^3} [\mathbf{H}, \nabla H], \\ \frac{d}{dt}(mc^2) &= e\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{m v_{\perp}^2}{2H} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m^2 v_{\perp}^2}{H} \right) &= 0, \quad v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_{\parallel} и v_{\perp} — продольная и поперечная составляющие скорости частицы по отношению к направлению магнитного поля \mathbf{H} . При выводе (1) принята во внимание также зависимость от времени единичного вектора \mathbf{H}/H . Уравнения (1) описывают движение ведущего центра вдоль силовой линии \mathbf{H} со скоростью $v_{\parallel}\mathbf{H}/H$ и дрейф поперек силовых линий \mathbf{H} .

Для \mathbf{E} и \mathbf{H} , не зависящих от времени, второе и третье уравнения (1) представляются в форме законов сохранения

$$mc^2 + e\Phi = E = \text{const}, \quad \frac{m^2 v_{\perp}^2}{m_0^2 H} \equiv J_{\perp} = \text{const}. \quad (2)$$

Отсюда продольную скорость v_{\parallel} можно представить как функцию положения $v_{\parallel} = v_{\parallel}(\mathbf{r})$:

$$v_{\parallel} = \sqrt{v^2 - J_{\perp} H \frac{m_0^2}{m^2}}. \quad (3)$$

При фиксированных E и J_{\perp} функция $v_{\parallel}(\mathbf{r})$ определена на соответствующей траектории ведущего центра, однако мы далее будем понимать под v_{\parallel} функцию положения \mathbf{r} , формально определенную формулой (3). Тогда уравнения дрейфового движения в постоянных полях \mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть выражены через $\text{rot}(mv_{\parallel})$:

$$\text{rot} \left(mv_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H} \right) = mv_{\parallel} \text{rot} \frac{\mathbf{H}}{H} + \left[\nabla(mv_{\parallel}), \frac{\mathbf{H}}{H} \right].$$

* Совместно с А.И. Морозовым // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. С. 506–509.

Вычисляя $\nabla(mv_{\parallel})$, при учете формул (2) и (3) найдем, что уравнения (1) могут быть записаны в виде следующего уравнения:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{H}}{H} \left[v_{\parallel} - \frac{mc^2 v_{\parallel}^2}{eH} \left(\frac{\mathbf{H}}{H} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{H}}{H} \right) \right] + \frac{cv_{\parallel}}{eH} \operatorname{rot} \left(m v_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H} \right). \quad (4)$$

При получении интегралов дрейфовых уравнений ограничимся случаем $(\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{H}) = 0$, когда второй член в (4) обращается в нуль, и уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{H} \operatorname{rot} \left(\mathbf{A} + \frac{mcv_{\parallel}}{eH} \mathbf{H} \right). \quad (5)$$

Вводя "векторный потенциал" $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mcv_{\parallel}}{eH} \mathbf{H}$, замечаем, что семейство траекторий ведущего центра с фиксированными E и J_{\perp} совпадает с силовыми линиями "магнитного поля" $\mathbf{H}^* = \operatorname{rot} \mathbf{A}^*$, и если не интересоваться временной зависимостью движения, то эквивалентным по отношению к (5) является уравнение $[d\mathbf{r}/dt, \mathbf{H}^*] = 0$. Уравнение силовых линий поля \mathbf{H}^* (или, что то же самое, уравнение траекторий ведущего центра) можно записать в лагранжевой форме $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ для обобщенных координат q_i ведущего центра, если выбрать функцию Лагранжа в виде $L = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{A}^* \right)$. Такая функция Лагранжа формально совпадает с функцией Лагранжа, соответствующей движению в магнитном поле \mathbf{H}^* частицы с массой $m = 0$, и, следовательно, уравнениями движения для нее будет $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{H}^* \right] = 0$.

Используя лагранжеву форму уравнений движения, мы можем получать различные интегралы движения для системы дрейфовых уравнений, исходя из симметрии задачи, аналогично тому, как это делается в механике материальной точки [3]. Так как дрейфовые уравнения являются дифференциальными уравнениями первого порядка, то их интегралы дают уравнения траектории. Для случаев трансляционной ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(x, y)$), аксиальной ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, z)$) и винтовой ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, \varphi - \alpha z)$) симметрии поля получаем соответственно следующие интегралы дрейфовых уравнений:

$$A_z^* = \text{const}, \quad rA_{\varphi}^* = \text{const}, \quad A_z^* + \alpha rA_{\varphi}^* = \text{const}. \quad (6)$$

При $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ полученные таким образом формулы дают, очевидно, уравнения силовых линий магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, обладающего соответствующей симметрией. При отсутствии H_z в первом случае, H_{φ} во втором случае и продольного однородного поля в третьем случае частицы движутся по магнитным поверхностям соответственно

$$A_z = \text{const}, \quad rA_{\varphi} = \text{const}, \quad A_z + \alpha rA_{\varphi} = \text{const}.$$

Если $\operatorname{rot}\mathbf{H} \neq 0$, то даже при наличии соответствующей симметрии уравнения (4) не имеют, по-видимому, простых интегралов. Однако есть случай, когда один интеграл (4) находится тривиально. А именно, если магнитные поверхности являются эквипотенциальными поверхностями ($\Phi = \text{const}$) и совпадают с поверхностями, образованными линиями электрического тока и поверхностями $|\mathbf{H}| = \text{const}$, то точным интегралом системы (4) является, уравнение поверхности $|\mathbf{H}| = \text{const}$, так как при этом

$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \nabla H\right) = 0$. Следует отметить, что совпадение магнитных и токовых поверхностей следует из условия гидродинамического равновесия плазмы $-\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{H}] = 0$.

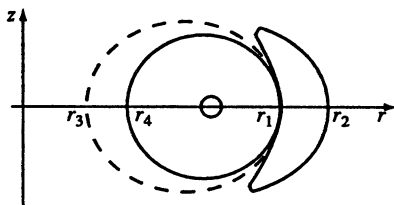


Рис. 1

Рассмотрим в качестве иллюстрации применения (6) движение частиц в поле кругового тока J , на которое наложено поле прямой нити с током I (рис. 1). Суммарное поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_I$ обладает аксиальной симметрией. Точные уравнения движения частицы в таком поле имеют два интеграла – энергии и момента. Из них следует [4], что, независимо от величины H_J , допустимая область колебаний частицы в плоскости (r, z) представляет собой кольцо шириною $\sim r_J$ – лармовского радиуса частицы в поле \mathbf{H}_J . Используя (6), можно уточнить этот вывод.

Частицы, движущиеся в поле $\mathbf{H}_J + \mathbf{H}_I$, можно разбить на две группы. Частицы первой группы имеют малую продольную скорость u_{\parallel} и колеблются на наружной стороне витка, другие имеют в точке r_1 значительную продольную скорость и обходят виток. Первую группу частиц мы будем называть запертыми, а вторую – пролетными. Найдем характерные точки траекторий этих частиц.

1. Рассмотрим сначала движение запертых частиц. Если r_1 и r_2 – точки пересечения траектории с плоскостью $z = 0$, то продольные скорости u_{\parallel} в этих точках имеют противоположные знаки. Обозначая одну из них через u_1 , а другую через u_2 , мы можем написать

$$r_1 A_{\varphi_1} + \frac{mc}{e} \frac{u_1 r_1 H_{\varphi_1}}{H_1} = r_2 A_{\varphi_2} - \frac{mc}{e} \frac{u_2 r_2 H_{\varphi_2}}{H_2},$$

где $(r A_{\varphi})_1 - (r A_{\varphi})_2 = \bar{r} \bar{H}_z$, $r_1 H_{\varphi_1} = r_2 H_{\varphi_2} = \bar{r} \bar{H}_{\varphi}$.

Отсюда следует общая формула для смещения $s = r_1 - r_2$:

$$s = -\frac{mc}{e} \frac{\bar{H}_{\varphi}}{\bar{H}_z} \left(\frac{u_1}{H_1} + \frac{u_2}{H_2} \right).$$

Если продольная скорость u_{\parallel} не слишком мала, то $u_1 \approx u_2$ и при $s \frac{\partial H}{\partial r} \ll H$ смещение

$$s = -2 \frac{mc}{e} \frac{H_{\varphi}}{H_z} \frac{u}{H},$$

где все величины берутся в одной точке r_1 .

2. Если пролетная частица выходит из точки r_1 (см. рис. 1) и после огибания витка приходит в точку r_4 , то отклонение $s = r_4 - r_3$, где r_3 – точка пересечения с плоскостью $z = 0$ силовой линии, вышедшей из r_1 , равно

$$s = \frac{mc}{e} \frac{\bar{H}_{\varphi}}{\bar{H}_z} \left(\frac{u_1}{H_1} - \frac{u_4}{H_4} \right), \quad u_1, u_4 > 0.$$

При $u_4^2 \gg J_{\perp} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|$ смещение $s = \frac{mc}{e} \frac{H_{\varphi_3}}{H_{z_3}} \left(\frac{u_1}{H_1} - \frac{u_3}{H_3} \right)$, где все величины взяты на одной силовой линии.

Применим полученные формулы к тонкому тору $|r_1 - R| \ll R$ с сильным продольным полем ($H_{\varphi} \gg H_z$). В этом случае смещение запертых частиц растет пропор-

ционально u и равно $s \approx -2 \frac{mc}{e} \frac{u}{H_z}$. Максимальная продольная скорость, при которой

частицы еще остаются запертыми, равна $u_{\max} \approx v_0 \sqrt{\frac{2|r_1 - R|}{R}}$, так что $(s_{\max})_1 \approx$

$\approx 2r_J \sqrt{\frac{2|r_1 - R|}{R}}$, где $r_J = \frac{v_0 mc}{eH_z}$. Если частицы пролетные, то максимальное смещение

имеет место при $u_4 = 0$ и равно $(s_{\max})_2 \approx r_J \sqrt{\frac{2|R - r_1|}{R}}$ (рис. 2). Если же $u_4 \approx u_1$, то получается формула

$$s = \frac{mc}{eH_z} \frac{v^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{\parallel}} \frac{|r_4 - r_1|}{R},$$

которая была выведена в [5].

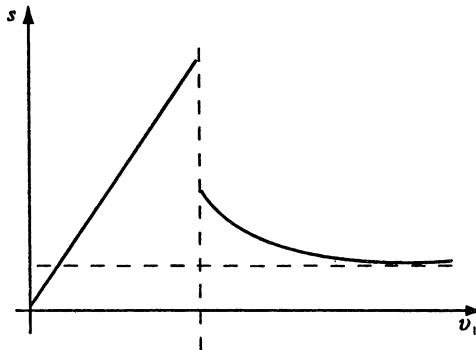


Рис. 2

Из сказанного следует, что максимальное смещение приходится на те частицы, которые "с трудом" обходят виток. Для тонких шнуров это смещение в $\sqrt{\frac{R}{2|r_1 - R|}}$ меньше величины r_J — смещения, которое допускают два известных точных закона сохранения.

Мы пользуемся случаем выразить благодарность акад. М.А. Леонтовичу и акад. Л.А. Арцимовичу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеоретиздат, 1958.
2. Бродгинский С.И. // Укр. мат. журн. 1956. Т. 8, № 2. С. 119.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Гостехтеоретиздат, 1958.
4. Тамм И.Е. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 31.
5. Будкер Г.И. // Там же. С. 66.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТОРОИДАЛЬНОМ ГОФРИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

ВВЕДЕНИЕ

Одночастичная магнитная ловушка называется абсолютной, если все частицы, выходящие из некоторой области V_0 внутри этой ловушки со скоростями произвольного направления, но ограниченными по модулю, остаются внутри конечного объема V_1 , находящегося в пределах ловушки. Примерами подобной ловушки может служить поле кольца с током [1] и другие аксиально-симметричные системы [2], в которых область, занятая частицами, охватывает область, занятую током. Ограниченных аксиально-симметричных ловушек без внутренних токов, по-видимому, не существует. Неограниченные вдоль оси z ("прямые поля") однородное, гофрированное или винтовое магнитные поля удерживают частицы внутри некоторой цилиндрической поверхности, причем токи, создающие эти поля, находятся вне данной поверхности. Естественно рассмотреть удержание частиц в подобных полях, замкнутых в тор [3-5] достаточно большого радиуса R . Замыкание в тор однородного поля приводит, как известно, к тороидальному дрейфу. В данной работе исследуются свойства гофрированного тора как одночастичной ловушки. Поскольку такая система не обладает симметрией, ее исследование с помощью точных уравнений движения очень сложно. Поэтому мы ограничимся рассмотрением этой задачи с точностью порядка точности дрейфовых уравнений. Однако мы будем исходить не из дрейфовых уравнений, а, следуя [4], из сохранения так называемого продольного адиабатического инварианта, введенного в работах [4, 6]:

$$J_{\parallel} = \oint v_{\parallel} dl. \quad (1)$$

Здесь v_{\parallel} — "продольная" скорость, направленная по силовой линии \mathbf{H} , а интеграл берется вдоль силовой линии \mathbf{H} по периоду поля, если частица "пролетная", т.е. движется вдоль всего тора, или между точками силовой линии, где v_{\parallel} обращается в нуль, если частица "запертая". Продольный инвариант определен только для почти периодических движений, каковым и является движение в гофрированном поле. При вычислении (1) следует каким-то образом задать рассматриваемую силовую линию. Мы задаем ее координатами x и ρ , отсчитываемыми от кольцевой оси тора $r = R$: $x = r - R$, $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$, $x = \rho \cos \varphi$ в некотором фиксированном сечении $\theta = \text{const}$ (рис. 1). Используя сохранение модуля скорости и поперечного адиабатического инварианта $J_{\perp} = v_{\perp}^2 / H$, мы можем записать (1) в виде

$$J_{\parallel}(\rho, x, J_{\perp}) = \oint \sqrt{v^2 - J_{\perp} H} dl. \quad (2)$$

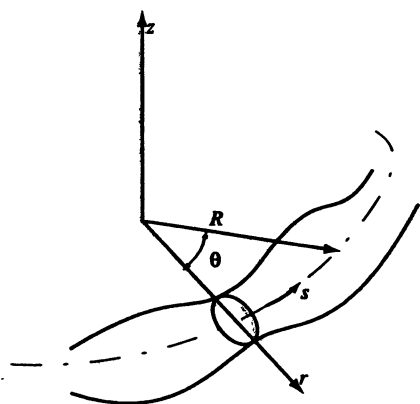


Рис. 1

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30, вып. 3. С. 261-270.

Уравнение $J_{\parallel}(\rho, x, J_{\perp}) = \text{const}$ является уравнением магнитной поверхности, по которой движется частица. Вопрос о точности такого описания рассматривается в разд. 3. Если в качестве сечения $\theta = \text{const}$ взять сечение, проходящее через максимум (или минимум) поля на оси $r = R$, то смещение частицы за период определяется следующими формулами Б.Б. Кадомцева:

$$\Delta\varphi = \frac{mc}{eH\rho} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial\rho}, \quad \Delta\rho = -\frac{mc}{eH\rho} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial\varphi}, \quad (3)$$

где $H(\rho, \varphi)$ – напряженность поля в сечении. Частицы, для которых $\Delta\varphi = 0$, мы будем называть резонансными.

1. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

А. Безвихревое магнитное гофрированное поле изображено на рис. 2. Оно содержит две различные области, границей между которыми является некоторая магнитная поверхность, которую мы будем называть сепаратрисой. Внутри сепаратрисы магнитные силовые линии обходят тор, вне сепаратрисы они замыкаются вокруг проводников с током. Нас будет интересовать область внутри сепаратрисы.

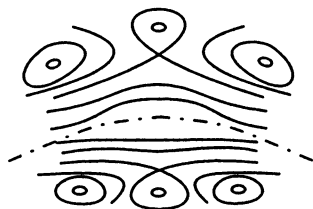


Рис. 2

Б. В общем случае трудно установить, при каких условиях, накладываемых на поле, траектории, определяемые уравнением

$$J_{\parallel}\left(\rho, \frac{x}{R}, J_{\perp}\right) = \text{const}^1, \quad (4)$$

будут удовлетворять требованиям абсолютности ловушки. Поэтому мы ограничимся исследованием лишь того случая, когда R конечно, но достаточно велико. В этом случае можно доказать, что при $\frac{1}{R} \rightarrow 0$ гофрированное тороидальное магнитное поле является абсолютной ловушкой в области применимости продольного инварианта.

Действительно, имеет место следующая теорема. Пусть функция $J(\rho, \xi)$ определена и непрерывна по ξ в прямоугольнике

$$0 \leq \rho \leq \rho_c, \quad -a < \xi < a, \quad (5)$$

а $J(\rho, 0)$ не является постоянной ни на одном участке отрезка $0 \leq \rho \leq \rho_c$, т.е. для любого $\Delta\rho_0 > 0$ существует число $\Theta(\Delta\rho_0) > 0$, такое, что всегда найдется $\Delta\rho_1$, модуль которого $|\Delta\rho_1| \leq \Delta\rho_0$ и

$$|J(\rho + \Delta\rho_1, 0) - J(\rho, 0)| \geq \Theta(\Delta\rho_0). \quad (6)$$

Тогда все точки любого непрерывного отрезка кривой

$$J(\rho, \xi) = J(\rho_0, \xi_0), \quad (7)$$

содержащего точку (ρ_0, ξ_0) и лежащего в полосе $-a < \xi_{\alpha} \leq \xi < \xi_{\omega} < a$, удалены от (ρ_0, ξ_0) сколь угодно мало, если ξ_{α} и $\xi_{\omega} \rightarrow 0$.

Эту теорему можно доказать от противного. Схема доказательства следующая. Пусть при любых сколь угодно малых ξ_{α} и ξ_{ω} существует такое ξ ($\xi_{\alpha} \leq \xi < \xi_{\omega}$), для которого $|\rho(\xi, \xi_0, \rho) - \rho_0| \geq \alpha(\rho_0)$. Тогда, взяв α в качестве $\Delta\rho_0$, мы можем

¹ "Прямое" поле предполагается аксиально-симметричным.

утверждать, что существует такое $|\Delta\rho_1| \leq \alpha$, что

$$\Theta(\alpha) \leq |J(\rho_0 + \Delta\rho_1, 0) - J(\rho_0, 0)| \leq |J(\rho_0 + \Delta\rho_1, 0) - J(\rho_0 + \Delta\rho_1, \xi)| + \\ + |J(\rho_0, \xi_0) - J(\rho_0, 0)| = \varepsilon_1(\xi_1) + \varepsilon_2(\xi_2). \quad (8)$$

Здесь учтено, что ρ и ξ удовлетворяют (7). Используя непрерывность J по ξ , мы видим, что справа стоит бесконечно малая величина, тогда как слева – конечная. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Применяя эту теорему к продольному инварианту $J_{\parallel}\left(\rho, \frac{x}{R}, J_{\perp}\right)$, мы можем заключить², что при $R \rightarrow \infty$ траектории частиц сколь угодно мало отклоняются от окружностей $\rho = \rho_0$, когда $\xi = x/R$ изменяется в пределах $(\xi_{\alpha} \approx -\rho_0/R) < \xi < (\xi_{\omega} \approx \rho_0/R)$.

Предполагаемое в теореме непостоянство $J_{\parallel}(\rho, 0, J_{\perp})$ по ρ и непрерывность $J_{\parallel}(\rho, \xi, J_{\perp})$ по ξ для гофрированного поля представляются (внутри сепаратрисы) очевидными из аналитического выражения (2)³. Однако для некоторых частиц при данных ρ, J_{\perp}, ν и $\frac{1}{R} = 0$ выражение $J_{\parallel}(\rho, 0, J_{\perp})$ не определено, поскольку в этом слу-

чае во всех точках данной силовой линии $\nu^2 < J_{\perp} H \Big|_{1/R} = 0$, тогда как при данном

$\frac{1}{R} \neq 0$ выражение $J_{\parallel}(\rho, \xi, J_{\perp})$ определено (2). Такие частицы колеблются вблизи плоскости минимума поля. Действительно, представляя поле на силовой линии в виде

$$H = H_0 \left(1 + \frac{l^2}{a^2}\right) + \frac{\partial H_0}{\partial \xi} \frac{x}{R}, \text{ получим}$$

$$J_{\parallel} = \int \sqrt{\nu^2 - J_{\perp} H} \, dl = \frac{\pi}{2} \frac{\nu^2 - J_{\perp} \left(H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \xi} \frac{x}{R} \right)}{\sqrt{J_{\perp} H_0 / a^2}}. \quad (9)$$

Здесь пределы интегрирования являются величинами $\sim \sqrt{x/R}$, и поэтому параболическая аппроксимация поля законна. Из выражения (9) видно, что для таких частиц при $x/R \rightarrow 0$ траектории также мало отклоняются от окружности.

Таким образом, можно считать доказанным, что в области справедливости продольного инварианта гофрированное тороидальное магнитное поле является абсолютной ловушкой при достаточно большом R .

В. Проследим теперь характер движения различных групп частиц в рассматриваемом поле. Если $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}$ не обращается в бесконечность, то $J_{\parallel}(\rho, \xi, J_{\perp})$ можно разложить по степеням $\xi = x/R$ и ограничиться первым членом разложения

$$J_{\parallel}^0(\rho, 0, J_{\perp}) + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}(\rho, J_{\perp})}{\partial \xi} = \text{const}. \quad (10)$$

² Доказанная теорема может быть обобщена и на случай

$$J_{\parallel} = J_{\parallel}(\rho, x/R, J_{\perp}, 1/R).$$

³ В качестве такой величины естественнее взять $J_{\parallel}(\rho, 0, J_{\perp}, 0)$ (см. примеч. 2).

Очевидно, здесь J_{\parallel}^0 определяется только "прямым" полем ($R \rightarrow \infty$). Уравнение $J_{\parallel}^0(\rho, 0, J_{\perp}) = \text{const}$ является уравнением концентрических окружностей.

Исследование (10) удобно провести отдельно для больших и малых ρ . В окрестности $\rho = 0$ функция $J_{\parallel}(\rho)$ разлагается в ряд по четным степеням ρ и (10) записывается в виде

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho^2} \rho^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial (\rho^2)^2} \rho^4 + \dots + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} = \text{const}. \quad (11)$$

Если $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho^2} \neq 0$, то, пренебрегая высшими членами разложения, получаем уравнение

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho^2} \rho^2 + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} = \text{const},$$

определяющее окружность, центр которой смещен от оси $\rho = 0$ на расстояние

$$\Delta = - \frac{1}{2R} \frac{\partial J_0 / \partial \xi}{\partial J_{\parallel} / \partial \rho^2}. \quad (12)$$

Случай $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho^2} = 0$, который соответствует $\Delta \varphi = 0$ (см. (3)), является резонансным. При этом уравнение (11) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^4 + \frac{x}{\lambda} = \text{const}; \quad \lambda = \left(\frac{2 \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}}{\frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial (\rho^2)^2}} \right)^{1/3}. \quad (13)$$

Характерным размером, определяющим смещение траектории, является величина λ .

Рассмотрим теперь траектории, для которых ρ много больше Δ в нерезонансном случае или λ в резонансном случае. При этом уравнение (4) можно решать методом возмущений, подставляя вместо ρ выражение $\rho_0 + \delta\rho$ и разлагая его по степеням $\delta\rho$. Таким образом, получим

$$\frac{\partial J_{\parallel}(\rho_0)}{\partial \rho} \delta\rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{\parallel}(\rho_0)}{\partial \rho^2} (\delta\rho)^2 + \dots + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}(\rho_0)}{\partial \xi} + \dots = \frac{x_0}{R} \frac{\partial J_{\parallel}(\rho_0)}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Здесь x_0, ρ_0 – координаты силовой линии, на которой частица находилась в начальный момент. Если $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho} \neq 0$, то смещение частицы при изгибании поля будет пропор-

ционально $\frac{1}{R}$, тогда как при $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho} = 0$, но $\frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial \rho^2} \neq 0$ оно пропорционально $\frac{1}{R^{1/2}}$. В первом случае траектории имеют вид смещенных окружностей, а во втором – вид "подков", расположенных с одной стороны от прямой $x = x_0$ (см. рис. 4). Картина траекторий в целом может быть получена из следующих геометрических соображений. В уравнении (10) в члене, пропорциональном $\frac{1}{R}$, вместо ρ можно подставить ρ_0 или нуль и записать его как условие пересечения поверхности вращения $Z =$

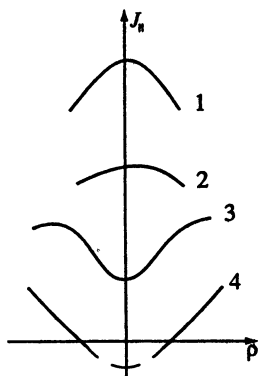


Рис. 3

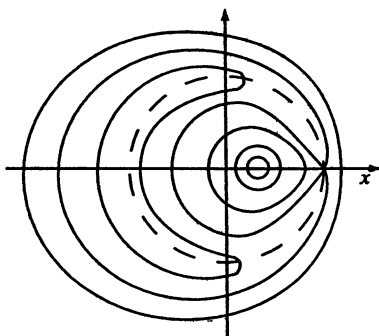


Рис. 4

$= J_{\parallel}(\rho, J_{\perp})$ с плоскостью $Z = J_{\parallel}^0(\rho, J_{\perp}) + \frac{x_0 - x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho}(\rho_0, J_{\perp})$. Проекция пересечения этих поверхностей на плоскость $Z = 0$ и определяет траекторию частицы. На рис. 3 изображены типичные поверхности $Z = J_{\parallel}(\rho, J_{\perp})$. Поверхность 1 соответствует отсутствию резонанса вблизи оси $\rho \approx 0$ ($J_{\parallel} \sim \rho^2$); поверхность 2 соответствует резонансному случаю ($J_{\parallel} \sim \rho^4$); кривая 3 соответствует наличию резонанса $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho} = 0$ при $\rho = \rho_r$, а поверхность 4 соответствует особому случаю, рассмотренному в конце п. Б. Проекции на плоскость $Z = 0$ траекторий, соответствующих поверхности 3, изображены на рис. 4.

Рассмотрим теперь движение частиц в том случае, когда $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} \rightarrow \infty$. Это имеет место для частиц, которые долго находятся в области максимума поля. В этом случае часть J_{\parallel} , ведущая к расходимости $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}$, а также $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \rho}$, может быть вычислена в общем виде, если аппроксимировать поле на силовой линии в окрестности максимума формулой $H = H_M \left(1 - \frac{l^2}{a^2}\right) + \frac{\partial H_M}{\partial \xi} \frac{x}{R}$. В результате вычисления получается следующее уравнение движения частицы:

$$H_M(\rho) + \frac{\partial H_M}{\partial \xi} \frac{x}{R} = \text{const},$$

структура которого совпадает с (10).

2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В СЛАБО ГОФРИРОВАННОМ ПОЛЕ

Пусть прямое гофрированное поле задается скалярным потенциалом $\psi = H_0 z - \frac{h}{\alpha} \sin \alpha z I_0(\alpha r)$, $h = \text{const}$, где $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, L – период структуры поля. Скалярный потенциал такого поля, изогнутого по окружности радиуса $R \gg L$, при условии, что $h \ll H_0$, можно записать в виде

$$\psi = H_0 s - \frac{h}{\alpha} \sin \alpha s I_0(\alpha \rho),$$

где $s = R\phi$, $\rho^2 = x^2 + z^2$, $x = r - R$. Начало отсчета s выбрано так, что оно совпадает с минимумом поля. Будем считать, что $\frac{\rho}{R} \ll \frac{h}{H_0}$, тогда уравнение силовых линий с точностью до первого порядка малой величины $\frac{h}{H_0}$ можно найти с помощью векторного потенциала для прямого поля $rA_\phi = \text{const}$. Таким образом, напряженность поля на силовой линии может быть вычислена с точностью до членов $\sim \frac{h^2}{H_0^2}$ включительно.

Рассмотрим сначала движение запертых частиц. В этом случае вычисление J_{\parallel} можно провести с точностью до членов порядка h :

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= \left(1 + \frac{x}{R}\right) \int \sqrt{v^2 - J_{\perp} \left[H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) - hI_0(\alpha\rho) \cos \alpha s \right]} ds = \\ &= J_{\parallel}^0 \left(\rho, x, H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) \right) \left(1 + \frac{x}{R}\right). \end{aligned}$$

Здесь ρ и x – координаты силовой линии в плоскости $s = 0$, а J_{\parallel}^0 – продольный инвариант для прямого поля; J_{\parallel}^0 выражается через полные эллиптические интегралы:

$$J_{\parallel}^0 = 4\sqrt{2I_0(\alpha\rho)J_{\perp}h} \left[E - (1 - k^2)K \right], \quad (15)$$

зависящие от аргумента $k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v^2 - J_{\perp}H_0}{2J_{\perp}hI_0} \right)$.

Условие резонанса $\frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial \rho^2} = 0$ приводит к уравнению $2E - K = 0$, которое удовлетворяется при $k_r^2 \approx 0,83$. Таким образом, зависимость $\cos^2\gamma = \frac{v_1^2}{v^2}$ от ρ_r дается

соотношением $\text{ctg}^2\gamma = \frac{1}{2k_r^2} \frac{1 - \frac{h}{H_0}I_0}{I_0} \approx \frac{0,6}{I_0(\alpha\rho_r)}$. Уравнение движения частицы с принятой точностью имеет вид

$$J_{\parallel}^0(\rho, \gamma) + \frac{x}{R} \left(J_{\parallel}^0 - \frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial H} H_0 \right) = \text{const}.$$

В окрестности оси $\rho = 0$ оно может быть разложено в ряд по степеням ρ^2 :

$$4K_0 \frac{x}{R} + \frac{h}{H_0} \left[\left(E - \frac{1}{2}K_0 \right) \left(2 + \frac{\alpha^2\rho^2}{8} \right) \alpha^2\rho^2 + \frac{E - (1 - k^2)K_0}{8k^2(1 - k^2)} \alpha^4\rho^4 \right] = \text{const}, \quad (16)$$

где $K_0 = K(\rho = 0)$. Отсюда следует, что при отсутствии резонанса смещение центра окружности, определенное в (12), равно $\Delta = \frac{2H_0}{\alpha^2 h R} \frac{K_0}{2E - K_0}$, а при резонансе

движение происходит по кривой (13) с параметром $\lambda = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{H_0}{\alpha h R} \right)^{1/3}$. Аналогично можно найти траектории вдали от оси, на чем мы не будем останавливаться.

Для исследования поведения пролетных частиц необходимо учитывать члены порядка $\frac{h^2}{H_0^2}$. Однако в общем виде вычисление J_{\parallel} с учетом квадратичных по h членов является достаточно громоздким, и поэтому мы ограничимся его вычислением при условии $v^2 - J_{\perp} H_0 \gg J_{\perp} h$, т.е. при $\frac{h}{H_0} \text{ctg}^2 \gamma \ll 1$. При этом условии J_{\parallel} вычисляется с помощью разложения по указанным малым параметрам, и мы получаем следующую формулу для траектории вблизи оси, справедливую, по крайней мере, в области резонанса и для более быстропрелетных частиц:

$$\left(1 + \frac{p}{2}\right) \frac{x}{R} + \frac{h^2}{32H_0^2} \left[(p - p^2 + 2)\alpha^2 \rho^2 + \frac{1}{16}(4p - 3p^2 + 8)\alpha^4 \rho^4 \right] = \text{const}, \quad (17)$$

где $p = \frac{J_{\perp} H_0}{v^2 - J_{\perp} H_0} = \text{ctg}^2 \gamma$. Резонансная область соответствует $p = 2$. Вне резонансной области траекторией является окружность с центром, смещенным от оси на величину $\Delta = \frac{8H_0^2}{\alpha^2 h^2 R} \frac{p+2}{p-p^2+2}$. В резонансном случае получается уравнение, совпадающее по форме с (13) с $\lambda = \frac{8}{\alpha} \left(\frac{H_0^2}{2\alpha R h^2} \right)^{1/3}$. Отсюда следует, что пролетные частицы как вне резонансной области, так и при резонансе смещаются больше, чем запертые частицы.

3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ДРЕЙФОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для того чтобы сравнить результаты, получаемые из уравнения $J_{\parallel} = \text{const}$, с тем, что дает дрейфовая теория, рассмотрим движение частиц в изогнутом гофрированном поле на основе дрейфовых уравнений. При этом мы ограничимся линейной по отклонению от оси $r = R$ теорией. В этом случае дрейфовые уравнения записываются в виде [7]

$$\dot{s} = \sqrt{v^2 - J_{\perp} h}, \quad \dot{z} = \varepsilon - px - qz, \quad \dot{x} = pz - qx, \quad (18)$$

где $h = h(s)$ – поле на оси тора $r = R$, $s = R\phi$, $J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{h}$, а через ε , p и q обозначены величины

$$\varepsilon = \frac{mc(2v^2 - J_{\perp} h)}{2ehR}, \quad p = \left(\frac{3h'^2}{4} - \frac{hh''}{2} \right) \frac{mc(2v^2 - J_{\perp} h)}{2eh^3}, \quad q = \frac{h'}{2h} \dot{s}, \quad (19)$$

являющиеся периодическими функциями s . Отклонение от оси тора определим как $|P|$, где $P = x + iz$, соответственно азимут вокруг этой оси будет равен $\arg P$. Введем новую переменную $\xi = \sqrt{\frac{h}{h_0}} P$, где $h = h_0$ при $t = 0$, и обозначим $i\varepsilon \sqrt{\frac{h_0}{h}} = b$, тогда

уравнение для ξ будет

$$\dot{\xi} + ip(t)\xi = b(t), \quad (20)$$

где p и b – неизвестные пока функции времени t . В обоих случаях – и когда частица колеблется в пределах одного периода гофра (запертые частицы), и когда она обращается вдоль всего тора (пролетные частицы) – коэффициенты уравнения (20) являются периодическими функциями t . Будем искать решение (20) в виде $\xi =$

$$= A(t) \exp\left(-i \int_0^t p dt\right). \text{ Используя периодичность коэффициентов уравнения (20), легко}$$

получить для A уравнение в конечных разностях $A_{n+1} - A_n = \Delta A_0 e^{ip_0 n T}$, связывающее его значение в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии, равном периоду T , где

$$p_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p dt, \quad \Delta A_0 = \int_0^T b \exp\left(i \int_0^t p dt\right) dt - \text{ величины, определяющиеся интегралами}$$

только по одному периоду T . Решая это уравнение, получим для ξ_n выражение

$$\xi_n = \xi_0 e^{-ip_0 n T} + \Delta A_0 e^{-\frac{ip_0 T}{2}(n+1)} \frac{\sin(p_0 n T / 2)}{\sin(p_0 T / 2)}. \quad (21)$$

Мы будем интересоваться модулем отклонения решения (21) от решения однородного уравнения (20), т.е. отклонением траектории от невозмущенной траектории, соответствующей $R = \infty$. Согласно (21) модуль отклонения $\delta \xi_n = \left| \xi_n - \xi_0 e^{-ip_0 n T} \right|$ равен

$$\delta \xi_n = \left| \Delta A_0 \right| \left| \frac{\sin(p_0 n T / 2)}{\sin(p_0 T / 2)} \right|. \quad (22)$$

Величина $\delta \xi_n$ является ограниченной, за исключением "резонансных" случаев $p_0 T = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, при которых $\delta \xi_n = \left| \Delta A_0 \right| n$, т.е. неограниченно растет. Из уравнений (18) видно, что $p_0 T = \Delta \Phi_T$, где $\Delta \Phi_T$ – угол оборота частицы вокруг оси $r = R$ за время одного периода T . Таким образом, формула для отклонения траектории ведущего центра от невозмущенной траектории окончательно запишется в виде

$$\left| \delta P \right| = \left| \Delta A_0 \right| \left| \frac{\sin(n \Delta \Phi_T / 2)}{\sin(\Delta \Phi_T / 2)} \right|, \quad (23)$$

где

$$\Delta \Phi_T = \oint \frac{p ds}{\sqrt{u^2 - J_{\perp} h}},$$

$$\Delta A_0 = \oint \sqrt{\frac{h_0}{h}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{u^2 - J_{\perp} h}} \exp\left(i \int_0^s \frac{p ds}{\sqrt{u^2 - J_{\perp} h}}\right) ds.$$

Угол дрейфа $\Delta \Phi_T$ за период, входящий в (23), в рассматриваемом приближении может быть взят тем же самым, что и для "прямого" поля. Поэтому представляет интерес рассмотреть более подробно поведение угла дрейфа в прямом гофрированном поле. Этот угол определяется формулой (23).

Без особых вычислений ясно, что график $\Delta \Phi_T$ в функции от γ для гофрированного поля имеет вид, изображенный на рис. 5. В окрестности точки B сосредоточены

высшие резонансы $\Delta\Phi_T = 2\pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$. В точках А и С имеют место основные резонансы $\Delta\Phi_T = 0$. Для уточнения положения резонансов и определения их ширины рассмотрим поле с напряженностью на оси

$$h = h_0(1 - a \cos \alpha z), \quad \alpha = \frac{2\pi}{L}, \quad (24)$$

где L – период гофра, и будем считать, что $a \ll 1$. Обозначая через γ угол скорости с нормалью к силовой линии в плоскости $z = 0$, получаем, что граница между запертыми и пролетными частицами определяется формулой $\cos^2 \gamma_B = \frac{1-a}{1+a}$ или $\gamma_B \approx \sqrt{2a}$.

$$\text{Величина } J_{\perp} = \frac{v^2 \cos^2 \gamma}{h_0(1-a)}.$$

1. Для запертых частиц в первом приближении по a получим

$$\Delta\Phi_T = -2\alpha r_{\wedge} \sqrt{2a} \left(E - \frac{1}{2} K \right), \quad (25)$$

где $r_{\wedge} = \frac{mcv}{eh_0}$, E и K – полные эллиптические интегралы с аргументом $k^2 = \frac{1-a}{2a \operatorname{ctg}^2 \gamma}$.

Величина $\Delta\Phi_T$ обращается в нуль при $k^2 \approx 0,83$, т.е. при $\gamma_A \approx 0,9\sqrt{2a}$.

2. Для пролетных частиц необходимо учитывать члены $\sim a^2$. Вычисление интеграла в (23) с учетом квадратичных по a членов дает

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_T = & \frac{\alpha r_{\wedge} a}{k^2} \frac{1 + \sin^2 \gamma}{\sin \gamma} \left\{ (2 - k^2) K - 2E + \frac{2a \cos^2 \gamma}{3k^2(1 + \sin^2 \gamma)} \left[(k^2 - 4)K + (k^2 + 4)E \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2a}{3k^2} \left[(3k^4 - 14k^2 + 14)K + (7k^2 - 14)E \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

где E и K зависят от аргумента $k^2 = \frac{2a \operatorname{ctg}^2 \gamma}{1-a}$.

Разлагая E и K по степеням k^2 , получим $\Delta\Phi_T = \frac{\alpha r_{\wedge} \pi a^2}{8} \frac{1 - 3 \sin^2 \gamma}{\sin^3 \gamma}$. Это выражение

обращается в нуль при $\sin \gamma_C = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, для магнитного поля (24) при $a \ll 1$ точки А, В и С на рис. 5 соответствуют углам $\gamma_A \approx 0,9\sqrt{2a}$, $\gamma_B = \sqrt{2a}$, $\gamma_C \approx 35^\circ$.

Оценка ширины резонансов приводит к следующим результатам. Ширины высших резонансов $m \neq 0$, определенные так, что изменение γ от $\gamma_{\text{рез}}$ на $\delta\gamma$ изменяет $\Delta\Phi = 2\pi m$ на π , экспоненциально малы:

$$\delta\gamma \sim 8\sqrt{2a} \exp \left[-\frac{2L(m-1/2)}{r_{\wedge} \sqrt{2a}} \right].$$

Ширины основных резонансов определяются формулами

$$\delta\gamma_A < \frac{2L^2}{\pi^2 R r_M} \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad \delta\gamma_C < \frac{16L^2}{3\pi^2 R r_M} \frac{1}{(2a)^2}, \quad (27)$$

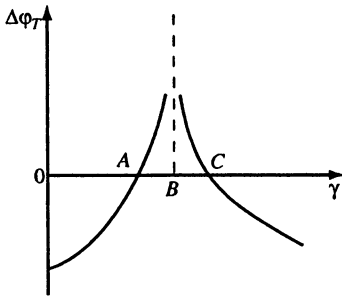


Рис. 5

где r_M – заданное максимально допустимое отклонение. Первая формула – для запертых частиц, вторая – для пролетных. Вышие резонансы имеют пренебрежимо малую ширину и фактически выходят за пределы применимости дрейфовой теории. Однако основные резонансы имеют довольно большую ширину, но они правильно учитываются продольным инвариантом.

В заключение в несколько более общем виде остановимся на соотношении дрейфового приближения и метода продольного инварианта в применении к гофрированному полю. Для этого сравним точность дрейфовых уравнений и уравнений Кадомцева (3). Если с помощью первых подсчитать смещение $\Delta\xi$ за период продольных колебаний T , то это смещение будет отличаться от истинного на величину порядка $vT\left(\frac{r_\Delta}{L}\right)^2$. В то время

как расчет с помощью (3) вносит ошибку $\sim \frac{(vT)^2}{L}\left(\frac{r_\Delta}{L}\right)^2$. Вывод из (3) факта сохранения $J_{||}$, который связан с переходом от конечноразностных уравнений (3) к дифференциальным, вносит ошибку $\sim \left(\frac{r_\Delta}{L}\right)^2$. Таким образом, отношение точностей дрейфовых уравнений и уравнений Кадомцева порядка vT/L . (Если прямое поле обладает аксиальной симметрией, то отношение точностей будет величиной $\sim 1 + O(vT/R)$). Как правило, $vT/L \sim 1$, и только для небольшой группы частиц, которые очень медленно проходят окрестность максимума поля на данной силовой линии, $vT/L \gg 1$. Большой период T набирается в основном в окрестности H_{\max} , где можно положить $H = H_{\max}(1 - l^2/L^2)$.

Вычисляя $T \sim \int \frac{dl}{v_{||}}$, получим, что $T \approx -\frac{L}{v} \ln \frac{\Delta v}{v}$, и, следовательно, доля частиц с

большим T экспоненциально мала: $\frac{\Delta v}{v} \sim \exp\left(-\frac{vT}{L}\right)$, если функция распределения $f(v)$ достаточно изотропна. Как показывает линейная теория, рассмотренная в этом разделе, из этого количества частиц возможен уход не всех, а лишь резонансных, соответствующих $\Delta\phi_T \approx 2\pi m$. Следует отметить, что так же, как уравнение $J_{\perp} = \text{const}$ остается справедливым, вообще говоря, в течение большего интервала времени, чем сами дрейфовые уравнения, можно ожидать, что и $J_{||}$ сохраняется дольше, чем уравнения Кадомцева (3), из которых он получен.

Мы приносим свою благодарность акад. М.А. Леонтовичу и акад. Л.А. Арцимовичу за стимулирование рассмотрения данного вопроса и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 31.
2. Wentzel N. // Astrophys. J. 1957. Vol. 126, N 3. P. 559.
3. Будкер Г.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 1. С. 66.
4. Кадомцев Б.Б. // Там же. Т. 3. С. 285.

5. *Спитцер Л.* Исследование на стеллараторе // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 505.
6. *Rosenbluth M., Longmire C.* // Ann. Phys. 1957. Vol. 1. P. 120.
7. *Соловьев Л.С.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 32.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ВИНТОВОМ ТОРОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

1. СТРУКТУРА ВИНТОВОГО ПОЛЯ

В настоящей работе рассматривается движение частиц в магнитной ловушке, представляющей собой магнитное поле с винтовой симметрией, свернутой в тор. Структура "прямого" винтового поля частично освещалась в литературе [1, 2], однако для дальнейших ссылок нам потребуется более полное изложение этого вопроса, на чем мы вначале и остановимся. Поле с винтовой симметрией $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r, \varphi - \alpha z)$ можно представить через скалярный потенциал ($\mathbf{H} = \nabla\psi$)

$$\psi = H_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_1^{\infty} h_n f_n(r) \sin n\Theta, \quad \Theta = \varphi - \alpha z, \quad (1)$$

где $f_n(r) = I_n(\alpha n r)$, $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, L - шаг винта, или в эквивалентной форме через векторный потенциал ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$) с компонентами

$$A_\varphi = H_0 \frac{r}{2}, \quad A_r = r \sum_1^{\infty} h_n f_n(r) \sin n\Theta, \quad A_z = -\frac{r}{\alpha} \sum_1^{\infty} \frac{h_n}{n} f_n'(r) \cos n\Theta. \quad (2)$$

При условии, что продольное поле H_0 велико по сравнению с поперечным, уравнения силовых линий такого поля можно получить методом усреднения Боголюбова [3]. Эти уравнения записываются в виде

$$r = r_0 + \frac{1}{\alpha^2 H_0} \sum_1^{\infty} \frac{h_n}{n} f_n'(r_0) \cos n\Theta_0, \quad (3)$$

$$\varphi = \bar{\alpha}(r_0) z - \frac{1}{\alpha^2 H_0 r_0^2} \sum h_n f_n(r_0) \sin n\Theta_0,$$

где

$$\bar{\alpha}(r) = \frac{1}{2\alpha^3 H_0^2} \sum_1^{\infty} h_n^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \left(\frac{f_n^2}{2} \right), \quad \Theta_0 = (\bar{\alpha} - \alpha) z.$$

Для отдельной гармоники винтового поля, разлагая f_n в окрестности $r = 0$, получаем для $\bar{\alpha}$ выражение

$$\bar{\alpha}(r) = \alpha \frac{H_0^2}{H_0^2} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) (\alpha r)^{2n-4} + \frac{n}{2} (\alpha r)^{2n-2} \right],$$

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. С. 271-282.

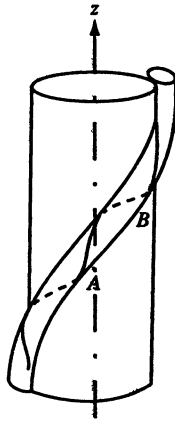


Рис. 1

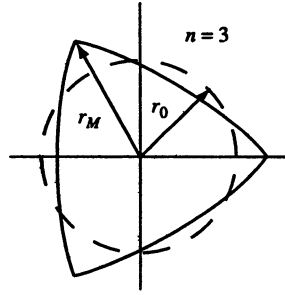


Рис. 2

где через H_{\perp} обозначена величина поперечного поля при $\alpha r \approx 1$, т.е. $H_{\perp} = \frac{2h_n}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$.

Если ввести координаты $x = r - r_0$, $y = r_0(\Phi - \bar{\alpha}z)$, то согласно (3) получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{h_n f'_n(r_0)}{\alpha^2 H_0 n}, \quad b = \frac{h_n f_n(r_0)}{\alpha^2 H_0 r_0}. \quad (4)$$

Таким образом, силовая линия магнитного поля отдельной гармоники представляет собой спираль с шагом $\lambda = \frac{L}{n}$ эллиптического сечения (4), навитую на ось, которая, в свою очередь, является винтовой линией с шагом $\bar{L} = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}}$, навитой на круговой цилиндр радиуса r_0 (рис. 1). Как видно из формулы для $\bar{\alpha}$, при малых αr_0 величина $\bar{L} \gg L$, причем для $n = 1$ и $n = 2$ вблизи оси $\bar{\alpha}$ почти не зависит от r_0 , и сильная зависимость начинается только с $n = 3$.

Перейдем теперь к рассмотрению точных уравнений для силовых линий. Согласно работе [4], уравнения силовых линий поля (2) имеют точный интеграл

$$\frac{H_0 r^2 \alpha^2}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{h_n}{n} r f'_n(r) \cos n\Theta = \text{const}. \quad (5)$$

Ограничиваясь далее случаем одной гармоники поля и полагая, что при $r = r_0$ $\cos n\Theta = 0$, получим вместо (5)

$$\cos n\Theta = \frac{n\alpha^2 H_0}{2h_n} \frac{r^2 - r_0^2}{r f'_n(r)} \equiv P(r). \quad (6)$$

Недостающее уравнение силовой линии найдем, исключая $\cos n\Theta$ из уравнения $\frac{dr}{H_r} = \frac{rd\Phi}{H_{\Phi}}$ с помощью (6):

$$\Phi = n \int \frac{f_n(r)(r^2 - r_0^2) dr}{r^2 f'_n(r) \sqrt{\left(\frac{2hrf'_n}{\alpha^2 H_0 n}\right)^2 - (r^2 - r_0^2)^2}}. \quad (7)$$

Магнитные силовые линии винтового поля можно разделить на два класса: 1) коллективные линии, остающиеся в пределах некоторого цилиндра, и 2) обособленные, которые выходят из этой области. Сечение граничной поверхности плоскостью $z = \text{const}$ имеет вид розетки. На рис. 2 изображена такая розетка "сепаратриса" для $n = 3$. В пространстве граничная поверхность представляет собой n -угóльную винтовую поверхность с шагом L . Уравнение, определяющее граничный радиус r_M , получим, приравняв единице максимальное значение $P(r)$. Оно имеет вид

$$\frac{\alpha^2 n H_0}{h} = \frac{1}{r_M} (r f_n')'_M. \quad (8)$$

Уравнение сепаратрисы получается из (6), если учесть, что при $\Theta = 0$ $r = r_M$ и $\frac{\alpha^2 n H_0}{h} = \frac{1}{r_M} (r f_n')'_M$. Представляя уравнение для сепаратрисы в виде разложения около $r = r_M$, получим

$$\cos n\Theta = 1 + \frac{1}{2} P''(r_M)(r - r_M)^2.$$

Член с первой производной выпадает по определению сепаратрисы $P'(r_M) = 0$. Уравнения силовых линий на сепаратрисе вблизи $r = r_M$ в первом приближении можно записать как

$$d\varphi = \frac{nf \cos n\Theta dr}{r^2 f' \sin n\Theta} \approx \pm \frac{nf_M}{r_M^2} \frac{1}{\sqrt{|P''_M|}} \frac{dr}{|r - r_M|}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$r = r_M(1 - e^{\varphi/B}), \quad B = \pm \frac{nf_M}{r_M^2 f''_M} \frac{1}{\sqrt{|P''_M|}},$$

т.е. силовые линии на сепаратрисе асимптотически прижимаются к ее ребрам, и так как эти ребра являются винтовыми линиями $\varphi = \alpha z$, то и силовые линии в окрестности ребра вращаются вокруг оси z с "угловой скоростью" $\bar{\alpha} = \alpha$.

Точное значение величины $\bar{\alpha}$, определяющей шаг $\bar{L} = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}}$ спирали усредненной силовой линии, можно получить с помощью (7). На рис. 3 изображена проекция силовой линии на плоскость $z = \text{const}$. Величина $\Delta\varphi$ определяется удвоенным интегралом (7), взятым от r_1 до r_2 , обращающих в нуль подынтегральное выражение (7). Это изменение $\Delta\varphi$ соответствует такому изменению Δz , что $\Delta(nh\Theta) = \Delta(n(\varphi - \alpha z))$ изменяется на -2π , т.е. $\alpha\Delta z = \frac{2\pi}{n} + \Delta\varphi$, $\bar{L} = \Delta z \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$. Отсюда периоды \bar{L} и $\Delta\varphi$ связаны формулой $\bar{L} = L \left(1 + \frac{2\pi}{n\Delta\varphi} \right)$. Вычисляя интеграл в (7), можно найти выражение для $\Delta\varphi$ с точностью до $\frac{h^2}{H_0^2}$:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi h^4}{2\alpha^4 H_0^4 n} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \left[f_n^2 + \frac{h^2}{4\alpha^4 H_0^2 n^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r f_n f_n'^3) \right].$$

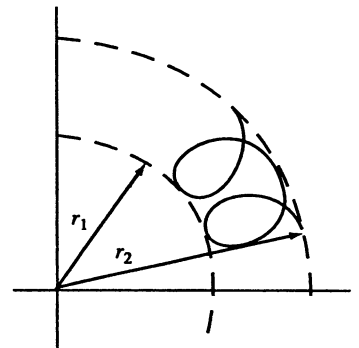


Рис. 3

2. ПРОДОЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ДЛЯ ВИНТОВОГО ПОЛЯ

Для винтового магнитного поля характерно систематическое "обвивание" силовыми линиями оси поля. Это приводит, как мы увидим ниже, к изменению вида продольного инварианта, введенного в работе [5]. Считая магнитное поле безвихревым, мы можем записать дрейфовое уравнение в виде [4]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{mc v_{\parallel}}{eH} \text{rot} \left(v_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H} \right). \quad (9)$$

В системе координат, в которой в качестве одного из семейств координатных линий (ξ^3) взяты силовые линии данного поля, уравнениями траекторий, вытекающими из (9), будут

$$\frac{d\xi^{\alpha}}{d\xi^3} = \frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \varepsilon^{\alpha j l} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(v_{\parallel} \frac{H_l}{H} \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad (10)$$

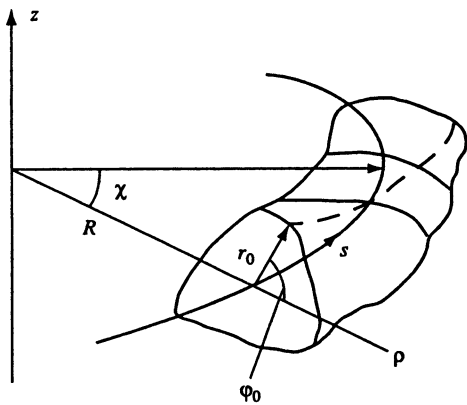


Рис. 4

где $\varepsilon^{\alpha j l}$ – единичный, полностью антисимметричный тензор. Индексы снизу и сверху указывают соответственно на ковариантные и контрвариантные компоненты. При исследовании движения частиц в винтовом поле, свернутом в тор, мы выберем в качестве ξ^1 и ξ^2 полярные координаты r_0 и ϕ_0 (по отношению к кольцевой оси тора) точки пересечения усредненной (см. разд. 1) силовой линии с плоскостью $s = 0$ (рис. 4), а в качестве ξ^3 возьмем величину $s = R\chi$.

При данных z и $x = \rho - R$ поле обладает периодичностью по s с периодом λ , зависящим от x . При $R \rightarrow \infty$ этот период стремится к постоянной величине L/n .

Если частица заперта в пределах периода поля, то, интегрируя (10) вдоль силовой линии между точками остановок, получим систему уравнений в конечных разностях:

$$\Delta r_0 = \frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \phi_0}, \quad \Delta \phi_0 = -\frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r_0}. \quad (11)$$

Здесь аргументами, от которых зависит $J_{\parallel} = \int v_{\parallel} dl$ являются r_0 и ϕ_0 . Следует отметить, что зависимость J_{\parallel} от ϕ_0 не является однозначной в том смысле, что значениям, например, $\phi_0 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ соответствуют разные значения J_{\parallel} . Это связано с тем, что интеграл J_{\parallel} имеет, вообще говоря, различные значения на разных периодах данной силовой линии. Если от разностных уравнений (11) перейти к дифференциальным, то с точностью порядка $(\Delta r_0)^2, (\Delta \phi_0)^2$ получим обычный продольный инвариант

$$J_{\parallel}(r_0, \phi_0) = \text{const}. \quad (12)$$

Практически удобно выразить J_{\parallel} в координатах $r = \sqrt{z^2 + x^2}$, $\phi = \arctg \frac{z}{x}$, где x и z – координаты характерной точки (например, середины) рассматриваемого отрезка силовой линии. Благодаря периодичности поля по s величина J_{\parallel} является однозначной (в указанном выше смысле) функцией этих аргументов.

Рассмотрим теперь пролетные частицы. Интегрируя (10) по k -му периоду, получим

$$\begin{aligned}\Delta r_{0k} &= \frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left[\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \Phi_{0k}} - (v_{\parallel} \tau_2)_0^{\lambda_k} \right], \\ \Delta \Phi_{0k} &= -\frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left[\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r_{0k}} - (v_{\parallel} \tau_1)_0^{\lambda_k} \right],\end{aligned}\tag{13}$$

где $\tau_i = \frac{g_{i3}}{\sqrt{g_{33}}}$ – ковариантные компоненты единичного вектора $\frac{\mathbf{H}}{H}$. Для прямого поля

члены $(v_{\parallel} \tau_i)_0^{\lambda_k}$ обращаются в нуль в силу периодичности поля. Следовательно, при достаточно большом R эти члены достаточно малы и при указанных ниже условиях можно пренебречь. Существенной особенностью (13) является явная зависимость правых частей от номера периода k . Действительно, учитывая, что в переменных r, φ величина $J_{\parallel} = J_{\parallel}\left(r, \frac{r \cos \varphi}{R}\right)$, а уравнение силовой линии прямого поля имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \bar{\alpha}(r_0)s + \tilde{\varphi}(r_0, \varphi_0 - (\alpha - \bar{\alpha})s), \\ r &= r_0 + \tilde{r}(r_0, \varphi_0 - (\alpha - \bar{\alpha})s),\end{aligned}\tag{14}$$

где $\tilde{\varphi}, \tilde{r}$ – периодические функции второго аргумента со средним значением равным нулю, мы заключаем, что J_{\parallel} является функцией r_{0k} и Ψ_k , где

$$\Psi_k = \varphi_{0k} + 2\pi\omega(r_{0k})k + \frac{1}{R}\xi(\varphi_{0k}, r_{0k}, k), \quad 2\pi\omega = \bar{\alpha}\lambda.\tag{15}$$

Таким образом, пренебрегая в (13) членом $(v_{\parallel} \tau_i)_0^{\lambda}$, можно написать

$$\begin{aligned}\Delta \Phi_{0k} &= -\frac{mc}{eH_k} \sqrt{\left(\frac{g_{33}}{g}\right)_k} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r_{0k}}(r_{0k}, \Psi_k), \\ \Delta r_{0k} &= \frac{mc}{eH_k} \sqrt{\left(\frac{g_{33}}{g}\right)_k} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \Phi_{0k}}(r_{0k}, \Phi_k).\end{aligned}\tag{16}$$

При определенных условиях эти разностные уравнения можно заменить на дифференциальные. Однако полученная система дифференциальных уравнений уже не будет иметь своим интегралом $J_{\parallel} = \text{const}$ в силу явной зависимости правых частей от аргумента k . Для получения интеграла в рассматриваемом случае перейдем от переменных r_0, Φ_0 к переменным r_0, Ψ . Тогда с точностью до членов $\sim \frac{1}{R}$

$$\begin{aligned}\Delta \Psi_k - 2\pi\omega(r_{0k}) - 2\pi \frac{\partial \omega}{\partial r_{0k}} \Delta r + \frac{\Delta \xi}{R} &= -\frac{mc}{eH_k} \sqrt{\left(\frac{g_{33}}{g}\right)_k} \frac{\partial J_{\parallel}(r_{0k}, \Psi_k)}{\partial r_{0k}}, \\ \Delta r_k &= \frac{mc}{eH_k} \sqrt{\left(\frac{g_{33}}{g}\right)_k} \frac{\partial J_{\parallel}(r_{0k}, \Psi_k)}{\partial \Psi_k}.\end{aligned}\tag{17}$$

Если пренебречь в (17) членами $\frac{\partial \omega}{\partial r} \Delta r$, $\frac{\Delta \xi}{R}$ и перейти от разностных уравнений к дифференциальным, то получим

$$\frac{d\psi}{dk} - 2\pi\omega(r) = -\frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}(r, \psi)}{\partial r}, \quad \frac{dr}{dk} = \frac{mc}{eH} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}(r, \psi)}{\partial \psi}. \quad (18)$$

Наконец, пренебрегая зависимостью $\frac{1}{H} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}}$ от ψ , что точно выполняется для прямого поля, мы находим следующий интеграл этих уравнений:

$$W \equiv \Omega - J_{\parallel} \equiv \frac{2\pi e}{mc} \int H \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \omega(r) dr - J_{\parallel} = \text{const}. \quad (19)$$

При наличии сильного продольного магнитного поля H_0 с точностью до членов $\frac{h^2}{H_0^2}$ этот интеграл записывается в виде

$$2\pi \frac{eH_0}{mc} \int \omega(r) r dr - J_{\parallel} = \text{const}, \quad (20)$$

поскольку в этом случае

$$\omega \approx O\left(\frac{h^2}{H_0^2}\right), \quad g = r \left(1 + O\left(\frac{h^2}{H_0^2}\right)\right), \quad (21)$$

$$H = H_0 \left(1 + O\left(\frac{h}{H_0}\right)\right), \quad g_{33} = \left(1 + O\left(\frac{h^2}{H_0^2}\right)\right).$$

Можно указать, что сделанные при выводе (12) и (20) пренебрежения законны, если выполняются следующие условия:

$$\frac{\nu T}{L} \ll 1, \quad \frac{\omega r^2}{k} \ll \nu T \left(\frac{r_{\Delta}}{L}\right)^2, \quad (22)$$

где T – время прохождения периода. При этих условиях точность (12) и (20) будет порядка точности дрейфовых уравнений. Вопрос о небольшой группе частиц, имеющих большой период T , рассмотрен в работе [6].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

3.1. Общее рассмотрение

Доказательство абсолютности ловушки, образованной гофрированным тороидальным магнитным полем [6], автоматически переносится на случай винтового тороидального магнитного поля, если для запертых частиц исходить из сохранения J_{\parallel} , а для пролетных из сохранения W . Следует только особо отметить ту группу частиц, которые в процессе движения переходят из запертых в пролетные и обратно. В случае гофрированного поля для тех и других частиц сохраняется величина J_{\parallel} . В случае же винтового поля для запертых частиц сохраняется J_{\parallel} , а для пролетных W . Не входя в детальный анализ возможности изменения J_{\parallel} после нескольких таких переходов

частицы из запертых в пролетные, отметим простое соображение, говорящее в пользу того, что в результате подобных переходов частица не сможет уйти далеко от первоначальной орбиты. Действительно, если у частицы начнет систематически изменяться J_{\parallel} или W , то она станет "обычной" частицей, запертой или пролетной, к которой применимы приведенные в работе [6] рассуждения. Характерной особенностью движения частиц в винтовом поле, в отличие от гофрированного поля, является то, что на самой оси нет запертых частиц. Это объясняется стремлением к нулю перпендикулярной составляющей поля при приближении к оси.

Наконец, можно видеть, что в винтовом поле резонанс (т.е. обращение в нуль $\partial W/\partial r$ при $r \neq 0$) у пролетных частиц обычно имеет место только для частиц, движущихся против поля ($H\bar{v} < 0$). Это объясняется тем, что производная от Ω обычно больше, чем производная от J_{\parallel} , за исключением частиц, у которых скорости вблизи максимума поля очень малы. К этому надо добавить, что J_{\parallel} не зависит от направления продольной скорости, тогда как Ω зависит от знака этой скорости.

Таким образом, за исключением экспоненциально малой группы частиц, о которых говорилось в [6] и которые обладают тем свойством, что для них $vT/L \gg 1$, можно считать доказанным, что в рамках продольного инварианта (12), (20) винтовое тороидальное магнитное поле при условии (22) является абсолютной ловушкой. При этом, разумеется, предполагается, что мы рассматриваем область внутри сепаратрисы.

3.2. Движение в винтовом поле с сильным продольным полем

Рассмотрим движение частиц в поле с большой продольной составляющей, изогнутом в тор достаточно большого радиуса R , так что величинами порядка $\frac{1}{R^2}$ можно будет пренебрегать. Мы ограничимся рассмотрением только таких винтовых полей, скалярный потенциал которых содержит одну гармонику. Начнем с частиц, запертых в пределах периода поля λ . Магнитное поле n -й гармоники описывается потенциалом (1). Его абсолютная величина с точностью до членов h^2 / H_0^2 включительно на силовой линии (3) равна

$$H = H_0 - nhf_n \cos n\Theta_0 - \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} \left[\left(2f_n'^2 - \frac{n^2}{r_0^2} f_n^2 \right) \cos^2 n\Theta_0 + \left(2\frac{n^2}{r_0^2} f_n^2 - f_n'^2 \right) \sin^2 n\Theta \right], \quad (23)$$

где $\Theta_0 = \varphi_0 + (\bar{\alpha} - \alpha)z$, а аргументом f_n является средний радиус $r_0 = \text{const}$ рассматриваемой силовой линии. Уравнение (23) упрощается, если положить $f_n' = \frac{n}{r_0} f_n$ (что имеет место при малых r) в членах квадратичных по h . Тогда получаем

$$H = H_0 - nhf_n \cos n\Theta - \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} f_n'^2(r_0). \quad (24)$$

Для того чтобы написать явное выражение для продольного инварианта $J_{\parallel} = \int \sqrt{v^2 - J_{\perp} H} dl$, необходимо, кроме величины поля на силовой линии r_0 , φ_0 , знать еще выражение для элемента силовой линии dl , например, через $ds = R d\chi$. Для поля, свернутого в тор, с точностью до $\frac{1}{R}$ выражение для поля получается из

(24) заменой H_0 на $H_0(1-x/R)$, а величина dl с той же точностью равна

$$dl = \left(1 + \frac{x}{R}\right) \left(1 + \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} f_n'^2\right) ds.$$

Подставляя в выражение для J_{\parallel} , получим

$$J_{\parallel} = \left[1 + \frac{x}{R} + \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} f_n'(r)\right] \int \sqrt{v^2 - J_{\perp}(H_1 - nhf_n \cos h\Theta)} ds, \quad (25)$$

где r_0 в аргументах f_n заменено на отклонение от кольцевой оси r ,

$$H_1 = H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) - \frac{1}{2} \frac{f_n'^2 h^2}{\alpha^2 H_0}.$$

Для частиц, запертых на периоде поля, интеграл в (25) берется между двумя нулями подкоренного выражения и равен

$$J_{\parallel} = \frac{4\sqrt{2}}{n\alpha} \sqrt{J_{\perp} nh} f_n \left(1 + \frac{x}{R} + \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} f_n'^2\right) Y(k^2), \quad Y = E - (1 - k^2)K, \quad (26)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{v^2 - J_{\perp} \left[H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) - \frac{h^2}{2H_0\alpha^2} f_n'^2 \right]}{J_{\perp} nh f_n} \right\}.$$

Если приравнять теперь J_{\parallel} постоянной, то мы получим уравнение поверхности силовых линий r, x , на которой лежат траектории ведущего центра. Исследование (26) в общем виде довольно громоздко, и поэтому мы ограничимся рассмотрением случая, когда можно пренебречь членами $\sim h^2$. Тогда (26) упрощается:

$$J_{\parallel} = a\sqrt{f_n} Y(k^2) \left(1 + \frac{x}{R}\right),$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{v^2 - J_{\perp} H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)}{J_{\perp} nh f_n} \right], \quad a = \frac{4\sqrt{2}}{n\alpha} \sqrt{J_{\perp} nh}. \quad (27)$$

Из (27) видно, что если известно J_{\parallel} для прямого поля, то при принятой нами точности J_{\parallel} для изогнутого поля получается из соответствующего выражения для прямого поля заменой

$$J_{\parallel}(H_0, h, r_0) \rightarrow \left(1 + \frac{x}{R}\right) J_{\parallel} \left(H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right), h, r \right). \quad (28)$$

Уравнение "невозмущенной" траектории ($R = \infty$) есть $r = \text{const}$. Подставляя в (27) вместо r величину $r_1 + \delta r$ и разлагая по степеням $\frac{x}{R}$ и δr , получим

$$\frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial r} \delta r + \frac{1}{2} (\delta r)^2 \frac{\partial^2 J_{\parallel}^0}{\partial r^2} - \left(H_0 \frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial H_0} - J_{\parallel}^0 \right) \frac{x}{R} = - \left(H_0 \frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial H_0} - J_{\parallel}^0 \right) \frac{x_1}{R}, \quad (29)$$

$$J_{\parallel}^0 \equiv J_{\parallel}(r_1) \Big|_{R=\infty},$$

где δr – отклонения от невозмущенной траектории $r_1 = \text{const} \neq 0$. Если $\frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial r}$ не слишком мало ("нерезонансные" частицы), то в (29) можно пренебречь членом $\sim(\delta r)^2$. В этом случае получаем

$$\delta r = \frac{x_1 - x}{R} \frac{H_0}{2nh f'_n(r_1)} \frac{K}{E - K/2}. \quad (30)$$

Отсюда видно, что в окрестности $E - K/2 = 0$ линейное приближение (30) уже неприменимо. При этом $k^2 \approx 0,83$. Чтобы найти смещение орбиты в окрестности $k^2 \approx 0,83$ ("резонансные" частицы), необходимо в (29) учесть также член с $(\delta r)^2$. В окрестности "резонанса" получаем

$$\delta r = \frac{L}{n} \sqrt{\frac{x - x_1}{R} \frac{H_0}{H_{\perp}} \frac{r_1}{L}}, \quad H_{\perp} = 2nh f'_n. \quad (31)$$

Это выражение показывает, что частица не обходит кольцевой оси тора, а описывает некую подковообразную кривую. При $R \rightarrow \infty$ для данной группы частиц, как нетрудно убедиться, средний угол обхода вокруг оси равен нулю (см. формулу (11)). Эти резонансные частицы аналогичны тем, с которыми мы сталкиваемся в случае гладкого [4] и гофрированного [6] тором.

Движение пролетных частиц в изогнутом винтовом торе будем исследовать с помощью инварианта (20). Величину J_{\parallel} вычисляем, используя (25) и интегрируя по φ вдоль силовой линии по периоду.

Вычисляя интеграл и подставляя в (20), получим уравнение траектории, по которой движется ведущий центр вблизи оси $r = 0$:

$$\left(1 + \frac{x}{R} + \frac{h^2 f_n'^2}{\alpha^2 H_0}\right) \cos \beta \sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta \left(\frac{x}{R} + \frac{nhf_n}{H_0} + \frac{h^2 f_n'^2}{H_0^2 \alpha^2}\right)} \times \\ \times \frac{2}{\pi} E(k^2) + \frac{1}{r_{\wedge}} \int_0^r \bar{\alpha}(r) r dr = \text{const}, \quad (32)$$

где

$$r_{\wedge} = \frac{mcv}{eH_0}, \quad \sin^2 \beta = \frac{J_{\perp} H_0}{v_0^2}, \quad k^2 = \frac{2 \text{tg}^2 \beta nhf_n}{H_0 \left[1 + \text{tg}^2 \beta \left(\frac{x}{R} + \frac{nhf_n}{H_0} + \frac{h^2 f_n'^2}{H_0^2 \alpha^2}\right)\right]}.$$

Рассмотрим сначала быстропрелетные частицы $\beta \rightarrow 0$, при этом $k_2 \rightarrow 0$,

$E(k^2) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, и мы получаем $\frac{x}{R} + \frac{1}{r_{\wedge}} \int_0^r \bar{\alpha}(r) r dr = \text{const}$. Подставляя сюда выражение для

$\bar{\alpha}$ вблизи оси $r = 0$ и интегрируя, находим

$$\frac{x}{R} + \frac{1}{2\alpha n r_{\wedge}} \left(\frac{H_{\perp}}{H_0}\right)^2 \left[(\alpha r)^{2n-2} + \frac{n}{2} (\alpha r)^{2n} \right] = \text{const}. \quad (33)$$

Отсюда видно, что для $n = 1$ и $n = 2$ движения в меридиональной плоскости тора происходят по окружности, центр которой смещен относительно оси $r = 0$ на величину

$$\Delta = \frac{2r_{\wedge}}{\alpha R} \left(\frac{H_0}{H_{\perp}}\right)^2.$$

Для $n > 2$, опуская последний член, запишем (33) в безразмерной форме:

$$\frac{x}{\lambda_c} + \left(\frac{r}{\lambda_c}\right)^{2n-2} = \text{const}, \quad \lambda_c = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2nr_{\wedge} H_0^2}{RH_{\perp}^2}\right)^{\frac{1}{2n-3}}, \quad (34)$$

т.е. смещение траектории имеет порядок величины λ_c . Для $\beta \sim 1$ ограничимся случаем $\frac{H_{\perp}}{H_0} \text{tg}^2 \beta \ll 1$, тогда, представляя J_{\parallel} в виде разложения по этой малой величине и

учитывая теперь, что $f'_n \neq \frac{nf_n}{r}$, получим

$$\alpha r_{\wedge} \cos \beta \left[\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \frac{x}{R} + \frac{h^2}{4H_0^2 \alpha^2} \left\{ \alpha r_{\wedge} \cos \beta \left[\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \left(f_n'^2 + \frac{n^2 f_n^2}{r^2} \right) - \frac{t^4}{4} \alpha^2 h^2 f_n^2 \right] \pm \frac{2f_n f_n'}{r} \right\} \right] = \text{const}, \quad (35)$$

где $t = \text{tg} \beta$, а знаки \pm соответствуют частицам, движущимся в противоположные стороны по силовой линии. Представляя (35) в виде разложения по степеням r , получим

$$\alpha r_{\wedge} \cos \beta \left[\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \frac{x}{R} + \frac{H_{\perp}^2}{4H_0^2} (\alpha r)^{2n-2} \times \left\{ \alpha r_{\wedge} \cos \beta \left[(2+t^2) \left(1 + \frac{n}{2} \alpha^2 r^2\right) - \frac{t^4}{4} \alpha^2 r^2 \right] \pm \frac{2}{n} \left(1 + \frac{n}{2} \alpha^2 r^2\right) \right\} \right] = \text{const}.$$

Отсюда видно, что смещение пролетных частиц имеет порядок величины λ_c , введенной в (34). Резонанс имеет место при $\gamma = \frac{n\alpha r_{\wedge}}{2}$, где $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \ll 1$. При резонансе получаем

$$\frac{x}{\lambda_c} - \left(\frac{r}{\lambda_c}\right)^{2n} = \text{const}, \quad \lambda_c = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha r_{\wedge}^2}{R} \frac{2H_0^2 n^2}{H_{\perp}^2}\right)^{\frac{1}{2n-1}}. \quad (36)$$

Следует отметить, что смещение пролетных частиц от силовой линии, в отличие от запертых частиц, стремится к нулю при $r_{\wedge} \rightarrow 0$.

4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ СИЛОВОЙ ЛИНИИ С ПОСТОЯННОЙ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ ПОЛЯ

Интересным примером магнитных ловушек являются системы типа "восьмерки" [1]. Мысленно подобные системы можно получить, если прямую полую круглую идеально проводящую трубку с однородным магнитным полем изогнуть в виде восьмерки или какой-либо другой пространственной кривой. Магнитное поле внутри такой трубки рассчитано в приложении. Оно описывается скалярным потенциалом $\psi = H_0 s$, где H_0 – постоянная напряженность поля на оси, s – длина дуги. Движение частиц удобно описывать в криволинейной системе координат, в которой положение точек пространства определяется тройкой чисел α, β, s , где α и β – расстояния, отсчитываемые вдоль нормали и бинормали к оси. Дрейфовое уравнение, записанное в

произвольной криволинейной системе координат, имеет вид

$$\frac{dq^i}{dt} = v_{\parallel} \frac{H^i}{H} + \frac{mc(2v^2 - J_{\perp}H)}{2eH^3} \frac{\varepsilon^{ij}}{\sqrt{g}} H_j \frac{\partial H}{\partial q^j}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{H} = \nabla\psi$, где ψ дано соотношением $\psi = H_0 s$, и учитывая, что метрический тензор равен (37) (см. приложение), получим с точностью до $\frac{1}{R}, \frac{1}{K}$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\beta}{K}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\alpha}{K} + \frac{mc(2v^2 - J_{\perp}H)}{2eH_0 v_{\parallel} R}.$$

Решая эти уравнения, находим, что при отсутствии каких-либо резонансных эффектов, связанных с членами высших порядков и зависимостью R и K от s , частицы будут двигаться по окружности, смещенной относительно "своей" силовой линии на величину

$$\Delta \approx \frac{mc(2v^2 - J_{\perp}H)}{2eH_0 v_{\parallel} R} K.$$

Следовательно, при $v_{\parallel} \neq 0$ это смещение конечно. Случай $v_{\parallel} \rightarrow 0$ требует учета нелинейных членов, которыми мы пренебрегли.

Мы пользуемся случаем выразить свою признательность акад. Л.А. Арцимовичу и акад. М.А. Леонтовичу за дискуссии и советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОЛЕ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Рассчитаем безвихревое магнитное поле в окрестности данной силовой линии с известной напряженностью поля. Пусть силовая линия задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки O . В каждой точке этой линии построим векторы нормали \mathbf{n}^0 и бинормали \mathbf{b}^0 , через которые проведем плоскости, на которых введем прямоугольные координаты α и β , отсчитываемые соответственно вдоль \mathbf{n}^0 и \mathbf{b}^0 . (Мы ограничиваемся рассмотрением только окрестности линии, и поэтому трудности, связанные с возможными пересечениями плоскостей, нас не будут интересовать.) Очевидно, положение любой точки в окрестности силовой линии однозначно определяется тройкой чисел (α, β, s) . Используя формулы Френе

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}^0, \quad \frac{d\mathbf{t}^0}{ds} = -\frac{\mathbf{n}^0}{R}, \quad \frac{d\mathbf{n}^0}{ds} = -\frac{\mathbf{t}^0}{R} - \frac{\mathbf{b}^0}{K}, \quad \frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = \frac{\mathbf{n}^0}{K},$$

где R и K – соответственно радиусы кривизны и кручения, мы получаем выражение для квадрата расстояния между соседними точками $ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k$ с метрическим тензором

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\beta}{K} \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{K} \\ \frac{\beta}{K} & -\frac{\alpha}{K} & \left(1 - \frac{\alpha^2}{R^2}\right) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{K^2} \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Магнитное поле описывается скалярным потенциалом ψ , который удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$. В криволинейной системе оно имеет вид $\frac{\partial}{\partial q^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right) = 0$. Подставляя

сюда (37) и отбрасывая члены $\sim \frac{1}{R^2}, \frac{1}{K^2}, \frac{1}{RK}$, мы, при условии что $\frac{dR}{ds}$ и $\frac{dK}{ds} \ll 1$, получим для ψ уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + \left(1 + \frac{2\alpha}{R}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{2\alpha}{K} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta \partial s} - \frac{2\beta}{K} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial s} = 0.$$

Простейшим, но практически наиболее интересным решением этого уравнения является функция

$$\psi = H_0 s. \quad (38)$$

Легко видеть, что это решение дает поле, ортогональное к плоскости $(\mathbf{n}^0, \mathbf{b}^0)$ и удовлетворяющее на поверхности трубки круглого сечения условию $H_n = 0$ (см. ниже). Кроме того, при потенциале (38) напряженность поля на исходной силовой линии постоянна. Уравнение силовых линий можно записать, например, как условие пропорциональности приращений координат α, β, s контравариантным компонентам вектора \mathbf{H} .

Подставляя в это уравнение (38) и переходя к полярным координатам $\alpha = \rho \cos \Theta, \beta = \rho \sin \Theta$, получим

$$\frac{d\rho}{ds} = 0, \quad \frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{K}.$$

Таким образом, силовая линия лежит на трубке круглого сечения, а угол ее поворота вокруг оси трубки (относительно трехгранника $\mathbf{n}^0, \mathbf{b}^0, \mathbf{t}^0$) определяется формулой $\Delta\Theta = \int \frac{ds}{K}$.

Так как сам трехгранник вращается при движении вдоль осевой линии, то возникает трудность с определением "абсолютного" прокручивания данной силовой линии вокруг осевой. Однако эту трудность можно обойти, если ограничиться рассмотрением периодических или замкнутых осевых линий, как, например, в случае спирали или "восьмерки". Для таких фигур естественный трехгранник занимает после обхода периода исходное положение в пространстве, и интегральный угол поворота силовой линии вокруг осевой за период, очевидно, равен

$$\Delta\Theta = \oint \frac{ds}{K} + 2\pi m,$$

где m – целое число, положительное или отрицательное. Неоднозначность, связанная с появлением целого числа оборотов, устраняется, если из геометрии задачи ясно, что угол поворота вокруг осевой линии должен быть малым по сравнению с 2π . В более сложных случаях неоднозначность может быть устранена с помощью различных предельных переходов, например, путем изменения кручения $\frac{1}{K}$ от нуля до заданной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спитцер Л. Исследование на стеллараторе // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 505.
2. Джонсон Д., Оберман С., Кулсруд Р., Фримен Е. Некоторые устойчивые магнитогидродинамические равновесные конфигурации // Там же. С. 193.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Морозов А.А., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. С. 3.
5. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 285.
6. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. С. 261.

ОБ УСКОРЕНИИ ПЛАЗМЫ В КОАКСИАЛЕ*

1. РАВНОВЕСИЕ УСКОРЯЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим ускорение плазменного сгустка в коаксиале (рис. 1) под действием азимутального магнитного поля, возникающего при разряде между внутренним и внешним цилиндрами. Предполагая протяженность сгустка l вдоль оси z малой, т.е.

$$t_T = l/c_T \ll t_a,$$

где t_a – характерное время ускорения, а c_T – скорость звука в плазме, мы можем считать, что ускорение во всех точках плазменного сгустка одинаково и в течение промежутка времени $\sim t_T$ постоянно. Это позволяет сформулировать задачу о состоянии плазменного сгустка в процессе ускорения как задачу о равновесии плазмы в "поле тяжести". Итак, рассмотрим равновесие плазмы в "поле тяжести" с ускорением a , находящейся в азимутальном магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\varphi$.

Уравнения равновесия

$$-\nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \rho\mathbf{a} = 0 \quad (1)$$

в цилиндрических координатах r, φ, z записываются в виде

$$\rho a = -\frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad (2)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi r} H^2.$$

Предполагая изотермичность плазмы, мы можем написать, что $p = c_T^2 \rho$. Вводя обозначение $h = \frac{H^2}{8\pi}$, перепишем систему (2) в виде

$$\rho a + c_T^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial z}, \quad (3)$$

$$c_T^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h). \quad (4)$$

Система (3), (4) сводится к одному уравнению первого порядка для h :

$$2c_T^2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h) = 0. \quad (5)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и ρ . Уравнение (5) решается методом характеристик и имеет следующее общее решение [1]:

$$h = \frac{1}{r^2} \Phi \left(z - \frac{2c_T^2}{a} \ln r \right), \quad (6)$$

где Φ – произвольная функция.

Если при $r = b$, т.е. на поверхности внутреннего цилиндра, задать поле $H = H_0(b, z)$, то напряженность поля в произвольной точке между цилиндрами на основании (6)

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. С. 1104–1108.

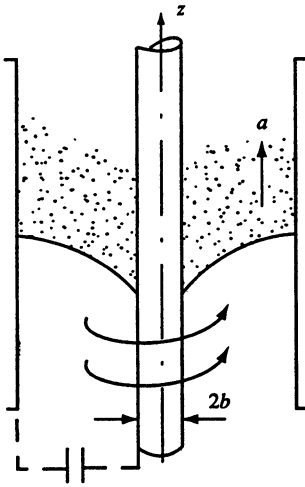


Рис. 1

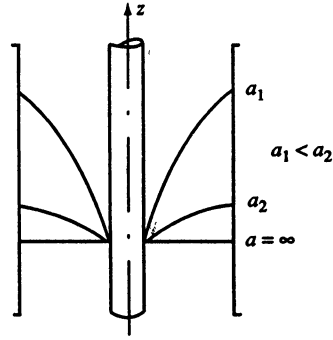


Рис. 2

будет равна

$$H(r, z) = \frac{b}{r} H_0 \left(b, z - \frac{2c_T^2}{a} \ln \frac{r}{b} \right). \quad (7)$$

Рассмотрим в качестве примера равновесную конфигурацию плазмы при условии, что на внутреннем цилиндре ($r = b$) поле задано в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0, & z < 0, \\ H &= 0, & z > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае, как показывает формула (7), мы имеем две области: область, занятую полем, и область, занятую плазмой (этот случай и изображен на рис. 1). Уравнением границы раздела будет

$$z = \frac{2c_T^2}{a} \ln \frac{r}{b}. \quad (9)$$

Это выражение показывает, что при росте c_T или уменьшении a крутизна границы раздела увеличивается (рис. 2). При $a = 0$ равновесная конфигурация рассматриваемого типа не существует.

Из (7), (8) и (3) вытекает формула для плотности плазмы в рассматриваемом примере

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \exp\left(-\frac{az}{c_T^2}\right), & z > \frac{2c_T^2}{a} \ln \frac{r}{b}, \\ \rho &= 0, & z < \frac{2c_T^2}{a} \ln \frac{r}{b}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (9) можно получить из простых физических соображений. Действительно, поскольку давление плазмы без магнитного поля, находящейся в "поле тяжести", распределено по барометрическому закону

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Maz}{kT}\right), \quad (11)$$

то из граничного условия $p = \frac{H^2}{8\pi}$ получаем уравнение границы

$$\frac{H_0 b^2}{8\pi r^2} = p_0 \exp\left(-\frac{Maz}{kT}\right). \quad (12)$$

Учитывая, что $\frac{H_0^2}{8\pi} = p_0$, $c_T^2 = \frac{kT}{M}$, где M – масса атома газа, убеждаемся, что (12) совпадает с (9).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Используя энергетический принцип [2], можно показать, что все указанные выше конфигурации являются неустойчивыми. Для доказательства этого утверждения достаточно ограничиться аксиально-симметричными возмущениями $\xi = (\xi_r, 0, \xi_z)$ с дивергенцией, равной нулю.

Рассмотрим сначала случай скинированной плазмы (8), (9). Тогда изменение потенциальной энергии δW системы равно

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int d\tau (\xi_a)(\xi \nabla \rho) + \frac{1}{16\pi} \int d\sigma (\xi \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \nabla H^2 - \frac{1}{2} \int d\sigma (\xi \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \nabla p. \quad (13)$$

При аксиально-симметричных возмущениях магнитное поле в вакууме не меняется и поэтому здесь опущен член, содержащий возмущения поля в вакууме. В (13) взята внешняя нормаль по отношению к плазме.

Выберем теперь возмущения в виде $\xi = \nabla \psi$, где

$$\psi = A [I_0(kr) + BN_0(kr)] e^{-kz}. \quad (14)$$

При этом, очевидно, $\text{div } \xi = 0$, а B и k всегда можно взять такими, чтобы ξ_r обращалось в нуль на обеих стенках коаксиала. Устремляя далее k к бесконечности, мы можем сделать объемный интеграл в (13) сколь угодно малым по сравнению с поверхностными интегралами, которые являются отрицательными. Это и доказывает неустойчивость рассматриваемой конфигурации.

Физически эта неустойчивость подобна неустойчивости тяжелой жидкости, подерживаемой магнитным полем [3]. Проведенный в работе [3] расчет показывает, что инкремент развития такой неустойчивости ($\xi \sim e^{\gamma t}$) связан с волновым числом k соотношением

$$\gamma^2 = ka. \quad (15)$$

В нашем случае этот инкремент несколько больше в связи с наклоном границы плазмы с полем (см. рис. 1).

Если плазма перемешана с полем, то для исследования устойчивости при сделанных выше ограничениях на ξ достаточно исследовать знак выражения [2]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\frac{H \xi_r}{2\pi r} \left(\frac{H \xi_r}{r} - \xi_r \frac{\partial H}{\partial r} - \xi_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) - a \xi_z \left(\xi_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \xi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right]. \quad (16)$$

Выберем смещение ξ отличным от нуля в малом контуре, вытянутом вдоль z , и будем считать, что ξ направлено всюду по контуру и $\text{div } \xi = 0$ (рис. 3). Устремляя радиальный размер контура к нулю, получим в пределе

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int a \xi_z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} d\tau. \quad (16')$$

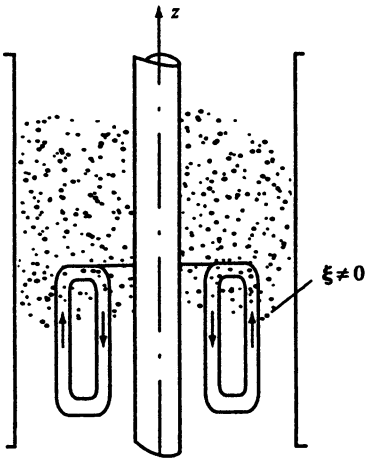


Рис. 3

Выражение (16') является отрицательным, если выбрать контур в области нарастания (по z) плотности ρ , т.е. равновесная конфигурация неустойчива и в случае размытой границы плазмы с полем. Приравняв выражение (16) кинетической энергии возмущения с обратным знаком (см. работу [2]) – $\frac{1}{2} \int \rho \xi^2 d\tau$, получим для инкремента развития неустойчивости выражение

$$\gamma^2 = qa, \quad (17)$$

где q – показатель нарастания плотности в переходном слое ($\rho \sim e^{qz}$). Рассмотренная неустойчивость относится к типу "конвективных" неустойчивостей, связанных с перестановкой областей с различной плотностью плазмы.

Таким образом, если толщина переходной области мала по сравнению с длиной волны возмущения

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$, то развивается неустойчивость с инкрементом (15). Если же толщина переходной области велика по сравнению с размерами возмущения, то имеет место конвективная неустойчивость с инкрементом (17).

3. О РОЛИ КОНЕЧНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ВЯЗКОСТИ В ПРОЦЕССЕ УСКОРЕНИЯ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА

В проведенном выше расчете мы предполагали плазму идеально проводящей и невязкой. Идеальная проводимость принципиально учитывалась при исследовании устойчивости. Полученные выводы о неустойчивости остаются справедливыми, если толщина скин-слоя за время развития неустойчивости будет меньше характерных размеров возмущения, в то время как возмущения существенно меньше скин-слоя вряд ли смогут существовать. Эти соображения позволяют оценить минимальный масштаб λ возмущения, а следовательно, и минимальное время развития неустойчивости в случае скинированной плазмы (8). Подставляя в (15) вместо k величину $\frac{2\pi}{\lambda}$,

а вместо ω обратное скиновое время $t_c = \frac{2\pi\sigma\lambda^2}{c^2}$, получим для λ выражение

$$\lambda = \frac{c}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{c}{\sigma^2 a}}. \quad (18)$$

Например, при $\sigma = 10^{14}$ и ускорении $a = 2 \cdot 10^{12}$ см/с² (при равноускоренном движении это ускорение соответствует конечной скорости 10^7 см/с при длине коаксиала 25 см) получаем $\lambda = 0,5$ см, а инкремент развития неустойчивости $t_c = 0,2$ мкс. Следует отметить, что неучтенные процессы ионизации и перезарядки могут увеличить минимальный размер возмущения.

Остановимся теперь на взаимодействии плазмы со стенками коаксиала. Поскольку свободный пробег в ускоряемом сгустке мал, то естественно описывать его взаимодействие со стенками с помощью вязкости и теплопроводности. Строгое рассмотрение этого процесса является очень сложным, и поэтому мы ограничимся качественными соображениями. Благодаря вязкости плазма прилипает к стенкам коак-

сиала (рис. 4) и магнитный поршень оказывается не в состоянии ее "соскоблить". В результате около стенки должен оставаться слой порядка

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{v}}. \quad (19)$$

Здесь ν – кинетическая вязкость, l – толщина плазменного слоя, v – скорость плазмы². Учитывая, что $v \sim c_T d$, где d – свободный пробег, $l \sim c_T^2 / a$, согласно (10) и $a \sim v^2 / L$, где L – длина коаксиала, мы можем записать (19) в виде

$$\delta \sim \left(\frac{c_T}{v}\right)^{3/2} \sqrt{Ld}. \quad (20)$$

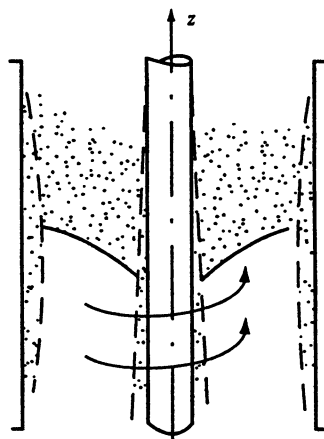


Рис. 4

Формула (19) справедлива при сверхзвуковом движении с точностью до множителя порядка c_T / v , поэтому множитель перед корнем в (20) с принятой точностью следует считать величиной порядка единицы. Практически v / c_T обычно меньше или порядка десяти. Формула (20) показывает, что величина прилипающего слоя мала, если концентрация частиц в сгустке $\geq 10^{18} - 10^{19}$.

Мы глубоко признательны академику Л.А. Арцимовичу за постановку задачи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
2. Бернштейн А.Б. и др. // Проблемы современной физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. № 5. С. 85.
3. Крускал М.Д., Шварцшильд М. // Там же. 1956. № 2. С. 108.

² Эта оценка пригодна при числе Прандтля $Pr \sim 1$, т.е. при низкой ионизации плазмы. При высокой ионизации $Pr \ll 0,1$ и величина δ может быть больше (19).

ГАМИЛЬТониан усредненного движения*

Для решения многих задач механики, динамики плазмы, теории колебаний и др. широко используются приближенные методы, основанные на усреднении соответствующих уравнений. Если полученные таким образом усредненные уравнения представляются в канонической гамильтоновой форме, то это позволяет сразу же получить их первый интеграл. В настоящей заметке излагается метод получения усредненных канонических уравнений.

1. *Усреднение уравнений.* Система дифференциальных уравнений

$$dx_k/dt = \epsilon f_k(x_i, t) \quad (1)$$

с малыми (ϵ – малый параметр) и периодическими по аргументу t правыми частями может быть заменена приближенно системой

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \epsilon \varphi_{1k}(\xi_i) + \epsilon^2 \varphi_{2k}(\xi_i) + \dots, \quad (2)$$

не содержащей явно аргумента t , решения которой ξ_k являются медленными функциями t и отличаются от x_k на величины порядка ϵ . Функции φ_{ik} определяются с помощью следующей замены переменных [1]:

$$x_k = \xi_k + \epsilon \eta_{1k}(\xi_i, t) + \epsilon^2 \eta_{2k}(\xi_i, t) + \dots, \quad (3)$$

где η_{ik} – новые неизвестные функции. Подставляя (2) и (3) в (1) и приравнявая члены одинакового порядка по ϵ , приходим к системе уравнений, связывающих φ_{ik} , η_{ik} и f_k :

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} + \frac{\partial \eta_{1k}}{\partial t} &= f_k, & \varphi_{2k} + \frac{\partial \eta_{1k}}{\partial \xi_i} \varphi_{1i} + \frac{\partial \eta_{2k}}{\partial t} &= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \eta_{1i}, \\ \varphi_{3k} + \frac{\partial \eta_{1k}}{\partial \xi_i} \varphi_{2i} + \frac{\partial \eta_{2k}}{\partial \xi_i} \varphi_{1i} + \frac{\partial \eta_{3k}}{\partial t} &= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \eta_{2i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \eta_{1i} \eta_{1j}, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_k = f_k(\xi_i, t)$. Здесь и далее подразумевается суммирование по дважды встречающемуся индексу. Примем, что η_{ik} являются периодическими функциями аргумента t , и приравняем в (4) отдельно постоянные и переменные (по t) части каждого уравнения. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &= \bar{f}_k, & \eta_{1k} &= \bar{\eta}_{1k} + \hat{f}_k, \\ \varphi_{2k} &= \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \eta_{1i}} - \frac{\partial \bar{\eta}_{1k}}{\partial \xi_i} \varphi_{1i}, & \eta_{2k} &= \bar{\eta}_{2k} + \widehat{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \eta_{1i}} - \widehat{\frac{\partial \eta_{1k}}{\partial \xi_i} \varphi_{1i}}, \\ \varphi_{3k} &= \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \eta_{2i}} + \overline{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \eta_{1i} \eta_{1j}} - \frac{\partial \bar{\eta}_{1k}}{\partial \xi_i} \varphi_{2i} - \frac{\partial \bar{\eta}_{2k}}{\partial \xi_i} \varphi_{1i}. \end{aligned} \quad (5)$$

* Совместно с Э.Л. Бурштейном // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. С. 855–858.

Здесь чертой сверху обозначено среднее значение соответствующей функции по аргументу t (при фиксированных ξ_i); $\hat{f} = \int \tilde{f} dt$, где $\tilde{f} = f - \bar{f}$.

В выражениях (5) функции $\bar{\eta}_{ik}$ остаются неопределенными; для однозначного определения φ_{ik} и $\bar{\eta}_{ik}$ необходимо ввести некоторые добавочные условия. Простейшим условием является требование обращения η_{ik} в нуль. Нами были получены соответствующие усредненные уравнения с точностью до членов порядка ϵ^3 включительно.

2. *Усреднение канонических уравнений Гамильтона.* Если исходные уравнения (1) можно записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \equiv \epsilon f_{qk}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \equiv \epsilon f_{pk}, \quad (6)$$

то усредненные уравнения, вообще говоря, не имеют формы канонических уравнений Гамильтона. Однако специальным выбором $\bar{\eta}_{ik}$ можно добиться, чтобы и усредненные уравнения (2) имели гамильтонову форму [1]. Для определения соответствующих функций $\bar{\eta}_{ik}$ произведем вместо (3) каноническое преобразование (5) от p_i, q_i

к новым переменным P_i, Q_i : $p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F(q_j, P_j, t, \epsilon)$, $Q_i = \frac{\partial}{\partial P_i} F(q_j, P_j, t, \epsilon)$. Представляя производящую функцию F в виде ряда по степеням ϵ : $F = q_i P_i + \epsilon F_1(q_j, P_j, t) + \epsilon^2 F_2(q_j, P_j, t) + \dots$, методом последовательных приближений находим выражение для η_{iqk} и η_{ipk} , определенных равенствами (3), или $q_k = Q_k + \epsilon \eta_{1qk} + \dots$, $p_k = P_k + \epsilon \eta_{1pk} + \dots$. Величины η_{iqk} и η_{ipk} оказываются равными

$$\eta_{1qk} = -\frac{\partial F_1}{\partial P_k}, \quad \eta_{1pk} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_k},$$

$$\eta_{2qk} = -\frac{\partial F_2}{\partial P_k} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial P_k \partial P_i} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad \eta_{2pk} = \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_k \partial Q_i} \frac{\partial F_1}{\partial P_i}, \quad (7)$$

где $F_k = F_k(Q_i, P_i, t)$. Преобразование остается каноническим при произвольных функциях F_k . Введем дополнительное требование, чтобы F_k были периодическими функциями t , причем такими, что $\bar{F}_k = 0$. Тогда, приравнивая в (7) постоянные и переменные части и подставляя вместо $\tilde{\eta}_{iqk}$ и $\tilde{\eta}_{ipk}$ их выражения из (5), получим искомые выражения для $\bar{\eta}_{iqk}$ и $\bar{\eta}_{ipk}$:

$$\bar{\eta}_{1qk} = \bar{\eta}_{1pk} = 0, \quad \bar{\eta}_{2qk} = \overbrace{\frac{\partial f_{qk}}{\partial q_i}}^{\wedge} \hat{f}_{qi}, \quad \bar{\eta}_{2pk} = \overbrace{\frac{\partial f_{pk}}{\partial q_i}}^{\wedge} \hat{f}_{qi}. \quad (8)$$

Здесь и далее новые переменные P_i, Q_i обозначаются строчными буквами p_i, q_i .

Вместо выражений (8) для $\bar{\eta}_{iqk}$ и $\bar{\eta}_{ipk}$ можно взять выражения, отличающиеся от них заменой $p_i \rightarrow q_i, q_i \rightarrow p_i$. С целью симметризации по канонически сопряженным переменным q_i, p_i , выберем $\bar{\eta}_{iqk}$ и $\bar{\eta}_{ipk}$ равными полусумме упомянутых выражений¹, т.е.

$$\bar{\eta}_{1qk} = \bar{\eta}_{1pk} = 0, \quad \bar{\eta}_{2qk} = \frac{1}{2} \hat{f}_i \overbrace{\frac{\partial f_{qk}}{\partial \xi_i}}^{\wedge}, \quad \bar{\eta}_{2pk} = \frac{1}{2} \hat{f}_i \overbrace{\frac{\partial f_{pk}}{\partial \xi_i}}^{\wedge}. \quad (8)$$

¹ Это возможно в силу того, что $\bar{\eta}_{2pk}$ и $\bar{\eta}_{2qk}$ входят в (5) линейно.

При этом уравнения Гамильтона (6) согласно формулам (5), (8') заменяются на приближенные уравнения в канонической форме с "усредненным" гамильтонианом, с точностью до членов порядка ϵ^3 равным

$$\mathcal{H} = \bar{H} + \frac{\epsilon}{2} \overline{\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \hat{f}_i} + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\overline{\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \hat{f}_i \hat{f}_j} + \overline{\frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \xi_j} \bar{f}_j} \right). \quad (9)$$

При выводе (9) используется равенство $\overline{\hat{a}\hat{b}} = -\overline{\hat{a}\hat{b}}$ и соотношения между производными функций f_{qi} и f_{pi} , вытекающие из их определений (6). Последнее выражение можно записать также через скобки Пуассона $\{f, g\}$:

$$\mathcal{H} = \bar{H} + \frac{1}{2} \overline{\{\hat{H}, H\}} + \frac{1}{3} \overline{\left\{ \hat{H} \left\{ \hat{H}, H + \frac{\bar{H}}{2} \right\} \right\}}. \quad (10)$$

В применении к движению заряженной частицы в быстропеременных электромагнитных полях полученные усредненные уравнения не содержат обычно принятого ограничения нерелятивистским случаем [2, 3, 5]. Однако явный вид усредненного гамильтониана для движения релятивистской частицы в произвольном поле является довольно сложным. Поэтому мы ограничимся здесь выводом из (9) нерелятивистского гамильтониана и приведем пример, где нельзя пользоваться известным выражением [2] для "высокочастотного потенциала".

Используя функцию Гамильтона H для нерелятивистской частицы в поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , определяемом потенциалами A и φ , и замечая, что при $v/c \sim \epsilon$ величины p_i и A_i можно считать малыми порядка ϵ , с точностью до величин более высокого порядка малости из (9) находим, что

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} \bar{A}_i \right)^2 + e\bar{\varphi} + \frac{e^2}{2m} \overline{\hat{E}^2}. \quad (11)$$

Таким образом, усредненное движение частицы происходит в средних по времени полях \mathbf{E} и \mathbf{H} , к которым добавляется еще сила $-\nabla U$, где $U = \frac{e^2}{2m} \overline{\hat{E}^2}$ - "высокочастотный потенциал".

Формула (11) справедлива при $|\mathbf{E}| \sim |\mathbf{H}|$. Если же $|\mathbf{H}| \gg |\mathbf{E}|$, то необходимо учитывать и другие члены в выражении для \mathcal{H} . Рассмотрим, например, движение нерелятивистской частицы вдоль оси квадрупольного квазистационарного магнитного поля. При этом $A = A_z = hxy \cos \omega t$. В предположении, что $v_z \gg eA_z / (mc)$, получим из (9)

$$\mathcal{H} = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{e^2}{2m} \left(\overline{\hat{E}^2} + \frac{p_z^2}{m^2 c^2} \overline{\hat{H}^2} \right). \quad (12)$$

Так как \mathcal{H} не зависит от z , то импульс $p_z = mv_z = \text{const}$. При движении частицы вблизи оси член с E^2 много меньше, чем член с H^2 , вследствие того что $E^2 \sim r^4$, а $H^2 \sim r^2$.

3. *Гамильтоновы уравнения, усредненные по координате.* Если функция Гамильтона H является периодической по одной из координат z (не обязательно декартовой), как, например, в ускорителях с изменяющимся по азимуту магнитным полем, то аналогично предыдущему можно произвести усреднение по этой координате. В этом случае, когда частица имеет большую "продольную" скорость (по z), мало отличающуюся от постоянной, уравнения Гамильтона (6) записываются в виде $\dot{x}_k = \epsilon f_k(x_i, z)$, $\dot{z} = 1 + \epsilon f_z(x_i, z)$, где постоянная часть \dot{z} принята за единицу, а через x_i

обозначены величины q_i, p_i, z . По методу Н.Н. Боголюбова ищем замену переменных $x_k = \xi_k + \epsilon \eta_{1k}(\xi_i, \xi_z) + \dots, z = \xi_k + \epsilon \eta_{1z}(\xi_i, \xi_z) + \dots$, которая приводила бы к уравнениям для ξ_k и ξ_z , не содержащим переменной ξ_z : $\dot{\xi}_k = \epsilon \Phi_{1k}(\xi_i) + \dots, \dot{\xi}_z = 1 + \epsilon \Phi_{1z}(\xi_i) + \dots$

Уравнения для Φ_{ik} и η_{ik} получаются при этом совпадающими по форме с (5), где индексы i, j, k пробегает все значения, включая и z , а усреднение и операция $\hat{}$ производятся по аргументу ξ_z вместо t в (5). Рассуждая далее аналогично предыдущему, можно убедиться, что, для того чтобы усредненные уравнения имели гамильтонову форму, достаточно выбрать $\bar{\eta}_{ik}$ и $\bar{\eta}_{ipk}$ согласно формулам (8), где индекс z является равноправным с остальными.

"Усредненный" гамильтониан также совпадает по форме с (9), (10), где операция $\hat{}$ и усреднение производятся по аргументу z , а суммирование – по всем индексам, включая z . Усредненный гамильтониан не содержит z , так что усредненное движение имеет интегралы энергии и импульса: $\mathcal{H}(q_i, p_i, p_z) = \text{const}, p_z = \text{const}$.

4. *Усредненные магнитные поверхности.* Приведенную выше методику расчета можно применить для отыскания уравнения "усредненной магнитной поверхности" в случае, когда магнитное поле $\mathbf{H}(x, y, z)$ является периодической функцией координаты z и продольная компонента H_z велика по сравнению с поперечными. Уравнения магнитных силовых линий

$$\frac{dx}{dz} = \frac{h_x}{1+h_z} = h_x - h_z h_x + h_z^2 h_x - \dots, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{h_y}{1+h_z} = h_y - h_z h_y + h_z^2 h_y - \dots \quad (13)$$

(\bar{H}_z – принято равным единице, $\bar{h}_z = 0, h_x \equiv H_x, h_y \equiv H_y$) имеют стандартную форму (1), где правые части связаны условием $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Постараемся выбрать такую замену переменных (3), чтобы усредненные уравнения (2) имели "гамильтонову" форму $\frac{dx}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{dy}{dz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$. Тогда интеграл $\Phi(x, y) = \text{const}$ дает уравнение усредненных магнитных поверхностей. Это достигается выбором $\bar{\eta}_{ik}$ в виде $\bar{\eta}_{1x} = \bar{\eta}_{1y} = 0, \bar{\eta}_{2x} = \frac{1}{2} \overline{(\hat{\mathbf{h}} \nabla) \hat{h}_x}, \bar{\eta}_{2y} = \frac{1}{2} \overline{(\hat{\mathbf{h}} \nabla) \hat{h}_y}$. Подставляя эти значения $\hat{\eta}_{ik}$ в (5) и преобразуя полученные уравнения с использованием $\text{div } \mathbf{h} = 0$, получим выражение для функции $\Phi(x, y)$, аналогичное (10) по структуре:

$$\Phi = \bar{A}_z + \frac{1}{2} \bar{\Phi}_1 + \frac{1}{3} \overline{(\hat{\mathbf{h}} \nabla) \Phi_2}, \quad (14)$$

где $\Phi_1 = h_x \hat{h}_y - h_y \hat{h}_x, \Phi_2 = \left(h_x + \frac{\bar{h}_x}{2} \right) \hat{h}_y - \left(h_y + \frac{\bar{h}_y}{2} \right) \hat{h}_x$. При $\bar{h}_x = \bar{h}_y = 0$ функция Φ_2 равна Φ_1 , и мы приходим к уравнению усредненной магнитной поверхности, полученному в [4].

Таким образом, представляется возможным построение (а тем самым и существование) усредненных магнитных поверхностей с точностью до высоких приближений по отношению поперечного поля к продольному. Как известно, это представляет интерес для различных вариантов систем удержания плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. Миллер М.Л., Гапонов А.В. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1958. Т. 34, № 1. С. 242.
3. Сагдеев Р.З. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 346.
4. Кораблев Л.В., Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 1153.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Гостехтеоретиздат, 1958.

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ*

1. ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЫ

В предположении, что жидкость несжимаемая и течение ее безвихревое, поле скоростей v удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{rot} v = 0$. Таким же уравнениям удовлетворяет и внешнее магнитное поле. Внутреннее магнитное поле мы будем считать отсутствующим. Введем функции ψ и ψ_0 так, что

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}. \quad (1)$$

Функции ψ и ψ_0 удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta \psi = 0, \quad \Delta \psi_0 = 0. \quad (2)$$

Пусть магнитное поле измеряется в единицах альфвеновской скорости $H = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

Тогда из уравнения Бернулли $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}$ и равенства давлений $\frac{p}{\rho} = \frac{H^2}{2}$ следует, что на поверхности плазмы должно выполняться граничное условие

$$(\nabla \psi)^2 + (\nabla \psi_0)^2 = \text{const}. \quad (3)$$

Кроме того, линии тока и магнитные силовые линии должны лежать на поверхности плазмы. Отсюда получаем еще два граничных условия:

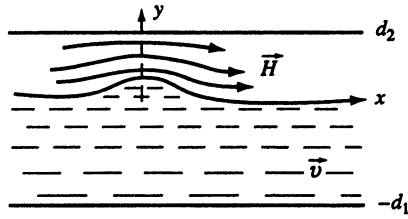
$$\psi = \text{const}, \quad \psi_0 = \text{const}. \quad (4)$$

В системе координат, в которой жидкость в среднем покоится, ее стационарное течение представляется волновым с фазовой скоростью равной $-\bar{v}$.

1.1. Уединенные волны

Уединенные волны на поверхности тяжелой жидкости были обнаружены Расселом и теоретически изучены Буссинэ и Рэлеем [1]. Аналогичным методом можно рассчитать и уединенные волны на поверхности плазмы. Рассмотрим стационарное течение жидкости в пространстве между двумя пластинами $y = -d_1$, $y = d_2$ (рисунок), поверхность которой при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет координату $y = 0$ и скорость $v = u_0$. Над поверхностью жидкости имеется магнитное поле, невозмущенная величина

* Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 407–418.



которого (при $x = \pm \infty$) есть H_0 . При $y = d_2$ магнитное поле ограничено идеально проводящей плоскостью.

Функции ψ и ψ_0 удовлетворяют уравнению Лапласа и следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{y=d_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right|_{y=-d_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{x=\pm\infty} = -H_0, \quad \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right|_{x=\pm\infty} = -v_0, \quad (5)$$

$$\psi|_s = \text{const}, \quad \psi_0|_s = \text{const}, \quad \{(\nabla \psi)^2 + (\nabla \psi_0)^2\}|_s = H_0^2 + v_0^2. \quad (6)$$

Граничные условия при $y = -d_1, d_2$ удовлетворяются решениями уравнения Лапласа, представленными в виде

$$\psi = (y - d_2)f - \frac{(y - d_2)^3}{3!} f'' + \dots, \quad \psi_0 = (y + d_1)f_0 - \frac{(y + d_1)^3}{3!} f_0'' + \dots, \quad (7)$$

где f и f_0 – функции x , которые мы считаем медленно меняющимися, так что $f^{(n)}$ и $f_0^{(n)}$ имеют n -й порядок малости. Согласно (5), (6) на поверхности S имеем $\psi = d_2 H_0$, $\psi_0 = -d_1 v_0$ и, подставляя это в (7), найдем f и f_0 , выраженные через $y(x)$. С принятой точностью

$$f = d_2 H_0 \left[\frac{1}{y - d_2} + \frac{(y - d_2)^2}{6} \left(\frac{1}{y - d_2} \right)'' \right],$$

$$f_0 = -d_1 v_0 \left[\frac{1}{y + d_1} + \frac{(y + d_1)^2}{6} \left(\frac{1}{y + d_1} \right)'' \right]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим дифференциальное уравнение второго порядка для уравнения границы $y = y(x)$, интегрируя которое один раз и определяя константу из условия $y' = 0$ при $y = 0$, получим

$$y'^2 = 3y^2 \frac{(v_0^2 + H_0^2)y - (d_2 v_0^2 - d_1 H_0^2)}{(d_1^2 v_0^2 + d_2^2 H_0^2)y - (d_1 v_0^2 - d_2 H_0^2)d_1 d_2}. \quad (9)$$

Введем безразмерные переменные $\frac{y}{d_2} = z$, $\frac{x}{d_2} = \xi$, $\frac{d_1}{d_2} = \alpha$, $\frac{v_0}{H_0} = \beta$, тогда (9) переписывается в виде

$$\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 = \frac{4k^2 z_1}{z_m} z^2 \frac{z - z_m}{z - z_1}, \quad (10)$$

где

$$k^2 = \frac{3z_m}{4\alpha} \frac{1}{\alpha - 1 + z_m}, \quad z_1 = \frac{\alpha^3 - \alpha + (\alpha^2 + \alpha)z_m}{\alpha^3 + 1 + (\alpha^2 - 1)z_m}, \quad \beta^2 = \frac{\alpha + z_m}{1 - z_m}. \quad (11)$$

При $\alpha = 1$ ($d_1 = d_2$) имеем $z_1 = z_m$, и решения в форме уединенной волны не существует. Интеграл уравнения (10) представляется формулой

$$-\operatorname{arth} \sqrt{\frac{z_1(z-z_m)}{z_m(z-z_1)}} + \sqrt{\frac{z_m}{z_1}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{z-z_m}{z-z_1}} = k\xi. \quad (12)$$

При $|z_m| \ll |z_1|$ решение есть $z = \frac{z_m}{\operatorname{ch}^2 k\xi}$, т.е. имеет форму уединенной волны на поверхности тяжелой жидкости [1]. Однако в рассматриваемом случае могут существовать как бегущие горбы, так и бегущие впадины. Нетрудно убедиться, что первая возможность реализуется при $\alpha > 1$, а вторая при $\alpha < 1$. Фазовая скорость согласно (11) равна

$$v_0 = H_0 \sqrt{\frac{d_1 + y_m}{d_2 - y_m}}, \quad (13)$$

где y_m – амплитуда уединенной волны. Условие применимости проведенного расчета является $k^2 \ll 1$.

Факт несуществования решения при $d_1 = d_2$ может быть объяснен из соображений симметрии. В силу того, что уравнения и граничные условия (2)–(4) задачи симметричны относительно перестановки v и H , то таким же свойством должно обладать и решение. Утверждение же о том, что при $d_1 = d_2$ распространяется горб (или впадина), не является инвариантным относительно перестановки жидкости и магнитного поля, и, следовательно, не осуществимо ни то, ни другое¹. Из этих же соображений ясно, что горб должен переходить во впадину, когда d_2 становится больше, чем d_1 .

1.2. Периодические волны

Периодические волны мы будем рассматривать в той же геометрии, что и уединенные (см. рисунок). Для волн с малой, но конечной амплитудой удобно применять метод расчета, развитый Стоксом и Рэлеем [1] для волн на поверхности тяжелой жидкости. Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости во внешнем магнитном поле. Функции тока ψ_0 и ψ , удовлетворяющие уравнению Лапласа, запишем в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi_0 &= v_0 y + (v_1 e^y + w_1 e^{-y}) \sin x + (v_2 e^{2y} + w_2 e^{-2y}) \cos 2x + \dots, \\ \psi &= H_0 y + (H_1 e^y + h_1 e^{-y}) \sin x + (H_2 e^{2y} + h_2 e^{-2y}) \cos 2x + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где индекс 1, 2, ... показывает порядок малости данной величины (ϵ , ϵ^2 , ...), а длина волны принята равной 2π . Уравнение границы плазмы с полем ищем в виде разложения по степеням ϵ . Сравнение коэффициентов при $\sin x$, $\cos 2x$, ... в выражениях для уравнений границы $\psi_0 = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ и в уравнении баланса давлений $(\nabla\psi_0)^2 + (\nabla\psi)^2 = \text{const}$ дает

$$\begin{aligned} \frac{a_{10}}{v_0} - \frac{a_1}{H_0} &= \frac{3}{8} \left(\frac{a_1^3}{H_0^3} - \frac{a_{10}^3}{v_0^3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a_1 b_1^2}{H_0^3} - \frac{a_{10} b_{10}^2}{v_0^3} \right) + \\ &+ \left(\frac{a_1 b_2}{H_0^2} - \frac{a_{10} b_{20}}{v_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 b_1}{H_0^2} - \frac{a_{20} b_{10}}{v_0^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

¹ В этом рассуждении существенно предположение о единственности решения.

$$-v_0 b_{10} - H_0 b_1 = -\frac{3}{8} \left(\frac{a_1^2 b_1}{H_0} + \frac{a_{10}^2 b_{10}}{v_0} \right) + \frac{3}{2} (a_1 a_2 + a_{10} a_{20}) - (b_1 b_2 + b_{10} b_{20}),$$

$$\frac{a_{10} b_{10}}{2v_0^2} + \frac{a_{20}}{v_0} = \frac{a_1 b_1}{2H_0^2} + \frac{a_2}{H_0} - \frac{3a_{10}^2}{4} + \frac{b_{10}^2}{4} - 2v_0 b_{20} = \frac{3a_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} + 2H_0 b_2, \quad (16)$$

где через a_n, a_{n0}, b_n, b_{n0} обозначены величины

$$v_n + w_n = a_{n0}, \quad v_n - w_n = b_{n0}, \quad H_n + h_n = a_n, \quad H_n - h_n = b_n.$$

Из требования удовлетворения граничных условий на стенках $H_y|_{y=d_2} = 0$, $v_y|_{y=-d_1} = 0$ получаем $w_n = -v_n e^{-2nd_1}$, $h_n = -H_n e^{2nd_2}$, $a_{n0} = b_{n0} \operatorname{th} nd_1$, $a_n = -b_n \operatorname{th} nd_2$. Обозначим для краткости $\operatorname{th} d_i \equiv t_i$. Из уравнений первого приближения (приравнявая нулю левую часть (15)) найдем

$$v_0^2 = H_0^2 \frac{t_1}{t_2}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} a_{10}, \quad b_1 = -\frac{a_{10}}{\sqrt{t_1 t_2}}. \quad (17)$$

Здесь $-\frac{a_{10}}{v_0} = A$ – амплитуда основной гармоники поверхностной волны $y = y(x)$, отнесенная к $\frac{\lambda}{2\pi}$. Уравнения второго приближения (16) дают амплитуды вторых гармоник

$$a_{20} = \frac{a_{10}^2}{4H_0 t_1^2} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \frac{3 - 3t_1 t_2 + 2t_2^2}{t_1 - t_2}, \quad a_2 = \frac{a_{10}^2}{4H_0 t_1^2} \frac{3 - 3t_1 t_2 + 2t_1^2}{t_1 - t_2}. \quad (18)$$

Отсюда видно, что при $d_1 = d_2$ решения рассматриваемого типа не существует, так же как и в случае уединенной волны.

Отметим, что несуществование волны является нелинейным эффектом, так как в линейном приближении решение при $d_1 = d_2$ существует и имеет фазовую скорость $v_0 = H_0$. При учете второй гармоники форма волны становится несимметричной, горб более острым, а впадина более пологой, или наоборот, и факт несуществования решения может быть объяснен так же, как это было сделано в случае уединенной волны. Заметим еще, что в рассматриваемом случае допустим предельный переход $d_1, d_2 \rightarrow \infty$ и, следовательно, при $d_1, d_2 \gg \lambda$ также не существует нелинейной стационарной волны.

Найдем теперь поправку к фазовой скорости, связанную с конечностью амплитуды волны. Подставляя в левые части (15) выражения

$$v_0 = H_0 \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} (1 + \mu), \quad a_1 = a_{10} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} (1 + \nu), \quad (19)$$

где μ и ν – величины второго порядка малости, получим

$$-\mu - \nu = \frac{H_0}{a_{10}} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \delta_1, \quad -\mu + \nu = \frac{t_2}{H_0 a_{10}} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \delta_2.$$

Здесь через δ_1 и δ_2 обозначены правые части (15):

$$\delta_1 = \frac{a_{10}^3}{4H_0^3 t_1^2} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 t_2} - \frac{a_{10} t_2}{2H_0^2} \left(\frac{2 + t_2^2}{t_2^2} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} a_2 + \frac{2 + t_1^2}{t_1^2} a_{20} \right),$$

$$\delta_2 = -\frac{a_{10}}{2} \left(\frac{1 - 2t_2^2}{t_2^2} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} a_2 + \frac{1 - 2t_1^2}{t_1^2} a_{20} \right).$$

Подставляя сюда (18), окончательно находим

$$\mu = \frac{a_{10}^2}{16H_0^2 t_1^2} \frac{[(3-t_1 t_2)^2 + 4(t_1 - t_2)^2](t_1 + t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - t_2)}. \quad (20)$$

Таким образом, μ положительна при $d_1 > d_2$, отрицательна при $d_1 < d_2$ и обращается в бесконечность при $d_1 = d_2$. Формула для фазовой скорости волны с учетом нелинейности получается следующей:

$$v_0 = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \left\{ 1 + \frac{A^2}{16} \frac{(t_1 + t_2)[(3-t_1 t_2)^2 + 4(t_1 - t_2)^2]}{t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2)} \right\}.$$

До сих пор мы рассматривали свободные колебания поверхности плазмы. Остановимся вкратце на вопросе о вынужденных волнах². Вынужденные волны образуются в том случае, когда над поверхностью плазмы бежит магнитное поле, создаваемое, например, системой проводников с током. При этом задана периодичность (λ у нас принята равной 2π), фазовая скорость v_0 , равная скорости движения проводников, и амплитуды падающего поля H_0, H_1, H_2, \dots . Введем обозначение $\beta = \frac{v_0}{H_0}$ для отношения фазовой скорости к альфвеновской. Ограничиваясь учетом влияния только первой гармоники падающего поля ($H_2 = H_3 = \dots = 0$), получим из (15), (16) с точностью до величин второго порядка малости для бесконечно глубокой жидкости ($d_1 = \infty, w_n = 0$)

$$v_1 = H_1 \frac{2\beta}{1-\beta^2}, \quad h_1 = H_1 \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2},$$

$$v_2 = -\frac{H_1^2}{2H_0} \frac{\beta(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^3}, \quad h_2 = \frac{H_1^2}{2H_0} \frac{(1+\beta^2)(3-5\beta^2)}{(1-\beta^2)^3}.$$

Отсюда видно, что амплитуды волны жидкости и отраженного магнитного поля быстро растут при приближении к резонансу $v_0 = H_0$.

Рассмотрим в заключение эффект увеличения массы поверхностными волнами (см., например, [1, 3]):

$$Q = -\rho \int_{-\infty}^y \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} - v_0 \right) dy = \rho v_0 y(x).$$

Его среднее по времени значение, которое совпадает со средним по координате x , согласно (14)–(16) равно

$$\bar{Q} = \rho v_0 \overline{y(x)} = \frac{\rho v_1^2}{2v_0} = \frac{2\rho H_1^2}{H_0} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^2}.$$

Таким образом, при приближении скорости движения поля к альфвеновской эффект увлечения идеальной жидкости неограниченно растет. В обычных единицах

$$\bar{Q} = \frac{2B^2 \rho v_0}{(B_0 - \sqrt{4\pi\rho} v_0)^2}.$$

² В линейном приближении вынужденные волны подробно исследованы в работе [2].

2. ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

При исследовании поверхностных волн весьма удобным представляется использование метода функций тока. В применении к магнитной гидродинамике этот метод развивался в ряде работ (см., например, [4–6], где выведены соответствующие уравнения для трансляционной и аксиальной симметрии). Линейная волна общего вида $\sim e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}$, распространяющаяся по поверхности круглого цилиндра, в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, представляется как стационарное винтовое течение жидкости, поэтому для рассмотрения волн на поверхности круглого цилиндра необходимо обобщение метода на случай винтовой симметрии. В приложении приведен вывод уравнений для этого случая, причем мы следуем в основном работе [5]. Общие уравнения для стационарного винтового течения несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле можно записать в виде (см. приложение)

$$\Delta^* \xi + \frac{aa'}{\beta} + \beta bb' - \frac{2\alpha a}{\beta^2} + u' = 0, \quad (21)$$

$$sa = I_0 \psi'_0 - I \psi', \quad sb = \frac{1}{\beta} (I \psi'_0 - I_0 \psi'), \quad (22)$$

$$p + \frac{v^2}{2} = -s(u + \beta b^2), \quad \psi_0'^2 - \psi'^2 = s, \quad (23)$$

$$r v_r = \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \quad v_\varphi - \alpha r v_z = -\frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad v_z + \alpha r v_\varphi = I_0, \quad (24)$$

$$r H_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad H_\varphi - \alpha r H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad H_z + \alpha r H_\varphi = I, \quad (25)$$

где a, b, u, ψ и ψ_0 – функции от $\xi, s = \text{const}, \beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2, \theta \equiv \varphi - \alpha z, \mathbf{v} = \sqrt{\rho} \mathbf{V}, \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi}}$, \mathbf{V} и \mathbf{B} – соответственно скорость жидкости и магнитное поле, r, φ, z – цилиндрические координаты,

$$\Delta^* \xi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\beta} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2}.$$

В настоящей работе уравнения (21)–(25) применяются для исследования волн на поверхности плазменного цилиндра, вращающегося вокруг своей оси. Специфика расчета с помощью функций тока (в отличие от обычно используемого метода линеаризации) состоит в том, что решения как внутренней (\mathbf{v} и \mathbf{H} внутри цилиндра), так и внешней (\mathbf{H} вне цилиндра) задач получаются точными, и приближения вводятся только при их сшивании на границе раздела плазмы с полем. Мы здесь доводим вычисления до получения формул линейного приближения. Дальнейшее рассмотрение нелинейных волн в рамках данного метода не вызывает принципиальных затруднений и может быть проделано аналогично разд. 1.

Функции ψ и ψ_0 будем искать в виде

$$\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}, \quad \psi_0 = \bar{\psi}_0 + \tilde{\psi}_0, \quad (26)$$

где $\bar{\psi}$ и $\bar{\psi}_0$ – функции невозмущенного состояния, а $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}_0$ – добавки, обязанные наличию волн. Малость $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}_0$ будет использована только при удовлетворении

граничных условий. В невозмущенном состоянии примем

$$\bar{H}_z = H_{zR}, \quad \bar{v}_z = v_{zR}, \quad \bar{H}_\varphi = H_{\varphi R} \frac{r}{R}, \quad \bar{v}_\varphi = v_{\varphi R} \frac{r}{R}, \quad (27)$$

т.е. плазменный цилиндр радиуса R с однородным продольным током и однородным продольным магнитным полем вращается как целое вокруг своей оси. Кроме того, предполагается наличие азимутального поверхностного тока. В системе координат, в которой цилиндр не имеет продольной скорости, v_{zR} – является фазовой скоростью волн. Аналогичная задача при $\bar{v}_\varphi = 0$ рассмотрена в работе [7].

Из формул (24), (25) найдем функции ψ_0 , ψ и I_0 , I для невозмущенного состояния:

$$\bar{\psi}_0 = J_0 \frac{r^2}{2}, \quad \bar{I}_0 = v_z + \frac{\alpha r^2}{R} v_\varphi, \quad J_0 \equiv \alpha v_z - \frac{v_\varphi}{R}, \quad (28)$$

$$\bar{\psi} = J \frac{r^2}{2}, \quad \bar{I} = H_z + \frac{\alpha r^2}{R} H_\varphi, \quad J \equiv \alpha H_z - \frac{H_\varphi}{R}.$$

Здесь и далее мы опускаем индекс R . Из пропорциональности $\bar{\psi}_0$ и $\bar{\psi}$ следует, что $\psi = \gamma \xi$, $\psi_0 = \delta \xi$ и

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{J_0}{J} = \frac{\bar{\psi}_0}{\bar{\psi}}, \quad \delta^2 - \gamma^2 = s. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (22) и полагая $r^2 = \frac{2\bar{\psi}}{J} = \frac{2\gamma\bar{\xi}}{J}$, найдем, что

$$a = a_0 + \varepsilon \bar{\xi}, \quad b = b_0, \quad (30)$$

где

$$\varepsilon \equiv \frac{2\alpha J_0 v_\varphi - J H_\varphi}{R \frac{J_0^2}{J^2} - J^2}, \quad a_0 \gamma \equiv J \frac{J_0 v_L - J H_L}{J_0^2 - J^2}, \quad b_0 \gamma \equiv J \frac{J_0 H_z - J v_z}{J_0^2 - J^2}. \quad (31)$$

Далее, из уравнения (21), написанного для $\bar{\xi} = \bar{\xi}(r)$, находим $u(\xi)$:

$$u(\xi) = A \bar{\xi} + \text{const}, \quad A \equiv -\frac{J \varepsilon^2}{2\alpha^2}. \quad (32)$$

Таким образом, согласно (30) и (32) уравнение (21) для рассматриваемой задачи является линейным. При известных $a(\xi)$ и $b(\xi)$ по формулам (22) получим I и I_0 как функции от r и ψ :

$$I_0 = a_0 \gamma \frac{J_0}{J} + b_0 \gamma \beta + \varepsilon \psi_0, \quad I = a_0 \gamma + b_0 \gamma \frac{J_0}{J} \beta + \varepsilon \omega. \quad (33)$$

Отсюда по формулам (24), (25) найдем выражения для компонент скорости и магнитного поля в цилиндрической системе координат r , φ , z

$$\mathbf{v} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \frac{v_\varphi r}{R} + \frac{1}{\beta} \left(\varepsilon \alpha r \bar{\psi}_0 - \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right), v_z + \frac{1}{\beta} \left(\varepsilon \bar{\psi}_0 + \alpha r \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right) \right\}, \quad (34)$$

$$\mathbf{H} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{H_\varphi r}{R} + \frac{1}{\beta} \left(\varepsilon \alpha r \bar{\psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right), H_z + \frac{1}{\beta} \left(\varepsilon \bar{\psi} + \alpha r \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) \right\}.$$

Из (23) вытекает соотношение

$$p + \frac{v^2}{2} = \frac{\varepsilon (J_0 v_\varphi - J H_\varphi)}{\alpha R J} \left[\psi - \frac{\beta J}{2\alpha^2} \left(\frac{J_0 H_\varphi - J v_\varphi}{J_0 v_\varphi - J H_\varphi} \right)^2 \right] + \text{const}. \quad (35)$$

Так как поверхность плазмы должна являться магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$, то из (35) следует, что граничное условие равенства давлений $p + \frac{H^2}{2} = \frac{H_e^2}{2}$ можно записать как

$$-\frac{v^2}{2} - \frac{r^2 \varepsilon}{2\alpha R} \frac{(J_0 H_\phi - J v_\phi)^2}{J_0 v_\phi - J H_\phi} + \frac{H^2}{2} = \frac{H_e^2}{2} + \text{const}, \quad (36)$$

где H_e – внешнее магнитное поле.

Решение уравнения (21) ищем в виде

$$\tilde{\psi} = f(r) \sin n\theta, \quad (37)$$

тогда для функции $f(r)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\beta} \frac{df}{dr} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2}{\beta} - \frac{2\alpha\varepsilon}{\beta^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0. \quad (38)$$

Рассмотрим теперь магнитное поле вне шнура. Функция ψ_e для магнитного поля в отсутствие токов удовлетворяет уравнению

$$\Delta^* \psi_e - \frac{2\alpha I_e}{\beta^2} = 0. \quad (39)$$

Полагая опять $\psi_e = \bar{\psi}_e + \tilde{\psi}_e$ и считая, что в невозмущенном состоянии

$$\bar{H}_{ze} = \text{const}, \quad \bar{H}_{\phi e} = H_{\phi e} \frac{R}{r}, \quad (40)$$

получим согласно (25)

$$\bar{\psi}_e = \frac{\alpha r^2}{2} H_{ze} - H_{\phi e} R \ln \frac{r}{R}, \quad I_e = H_{ze} + \alpha R H_{\phi e} = \text{const}. \quad (41)$$

Внешнее магнитное поле при наличии возмущения определяется формулами (25) при подстановке в них $\psi_e = \bar{\psi}_e + \tilde{\psi}_e$. Решение (39) ищем в виде

$$\tilde{\psi}_e = f_e(r) \sin n\theta. \quad (42)$$

Функция $f_e(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\beta} \frac{df_e}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f_e = 0. \quad (43)$$

Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи. Функции ψ и ψ_e известны:

$$\psi = J \frac{r^2}{2} + \tilde{\psi}, \quad \psi_e = H_{ze} \frac{\alpha r^2}{2} - H_{\phi e} R \ln \frac{r}{R} + \tilde{\psi}_e, \quad (44)$$

и требуется сшить решения внутренней и внешней задач исходя из граничных условий: 1) ψ и ψ_e постоянны на границе плазмы с полем и 2) удовлетворяют условию равенства давлений (36). Методом, аналогичным использованному в разд. 1, могут быть рассмотрены нелинейные волны, эффект увлечения массы и т.д. Кроме того, применяемый метод позволяет в принципе рассмотреть и более общие задачи о волнах на поверхности круглого шнура, например устойчивость шнура с произвольным распределением тока по сечению, однако при этом уравнения становятся, вообще

говоря, нелинейными. Мы ограничимся далее линейным приближением, полагая, что уравнение границы шнура есть $r = R + \rho(\theta)$ и величины ρ , $\tilde{\Psi}$ и $\tilde{\Psi}_0$ являются малыми. Условия $\Psi = \text{const}$, $\Psi_e = \text{const}$ согласно (44) дают

$$\rho = -\frac{\tilde{\Psi}}{RJ} = -\frac{\tilde{\Psi}_e}{RJ_e}, \quad (45)$$

где $r = R$, $J_e \equiv \alpha H_{ze} - \frac{H_{\varphi e}}{R}$. Используя (45), из второго граничного условия (36) получим дисперсионное уравнение

$$(J_0^2 - J^2) \left(\frac{f'}{f} + \frac{\varepsilon}{\alpha R} \right) + J_e^2 \frac{f'_e}{f_e} = \frac{\beta}{R^3} (H_\varphi^2 - H_{\varphi e}^2 - v_\varphi^2). \quad (46)$$

Перейдем к решению уравнений (33) и (43). Уравнение (43) удовлетворяется функцией

$$f_e = A_n r I'_n(\alpha n r) + B_n r K'_n(\alpha n r), \quad (47)$$

где I_n и K_n – функции Бесселя мнимого аргумента.

Для решения уравнения (18) введем новую искомую функцию F согласно соотношению

$$\frac{rf'}{\beta} + \frac{\varepsilon f}{\alpha\beta} = F. \quad (48)$$

Из (38) и (48) находим f и f' , выраженные через $F(r)$:

$$f = \frac{\alpha \varepsilon F - \alpha^2 r F'}{\varepsilon^2 - \alpha^2 n^2}, \quad f' = \frac{\alpha^2 r (\varepsilon^2 - \alpha^2 n^2 - n^2 / r^2) F + \alpha \varepsilon F'}{\varepsilon^2 - \alpha^2 n^2}. \quad (49)$$

Из (49) вытекает, что F удовлетворяет уравнению Бесселя, решение которого (конечное при $r = 0$) есть $F = I_n(\sqrt{\alpha^2 n^2 - \varepsilon^2} r)$. Входящая в дисперсионное уравнение комбинация

$$\frac{f'}{f} + \frac{\varepsilon}{\alpha R} = \frac{\beta(\alpha^2 n^2 - \varepsilon^2) F}{\alpha R(\alpha R F' - \varepsilon F)} \quad (50)$$

выражается непосредственно через бесселевы функции, и, следовательно, нет необходимости явно разрешать уравнение (48) относительно $f(r)$.

С целью удобства сравнения перепишем дисперсионное уравнение (46) в обозначениях работы [7]. Для колебаний, имеющих форму $\sim e^{i(kz + m\varphi - kv_z t)}$, получим, полагая $\alpha n = k$, $n = -m$,

$$\frac{\beta_1}{\beta_1^2 - 1} (\varphi_0 + m\beta_1) = \frac{2\alpha_1(\alpha_1 m + kh_i) + 2\alpha_v(\alpha_v m + kh_v)}{\alpha_1^2 - \alpha_v^2 - 1 + \frac{(m + kh_e)^2}{\varphi_2}}. \quad (51)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{H_\varphi}{H_{\varphi e}}, \quad \alpha_v = \frac{v_\varphi}{H_{\varphi e}}, \quad h_i = \frac{H_z}{H_{\varphi e}}, \quad h_e = \frac{H_{ze}}{H_{\varphi e}}, \quad h_v = \frac{v_z}{H_{\varphi e}},$$

$$\varphi_0 = k\sqrt{\beta_1^2 - 1} \frac{J_{m-1}(\sqrt{\beta_1^2 - 1})}{J_m(\sqrt{\beta_1^2 - 1})} - m, \quad \varphi_2 = k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m$$

для шнура без кожуха и соответствующее выражение, приведенное в работе [7], при наличии кожуха. Величина $\beta_1 \equiv \frac{\varepsilon}{k}$ определяется формулой

$$\beta_1 = \frac{2\alpha_1(\alpha_1 m + kh_i) - 2\alpha_v(\alpha_v m + kh_v)}{(\alpha_1 m + kh_i)^2 - (\alpha_v m + kh_v)^2}, \quad (52)$$

а радиус шнура R положен равным единице. Отсюда видно, что для невращающегося шнура ($\alpha_v = 0$) полученные формулы совпадают с найденными в работе [7].

При анализе дисперсионного уравнения ограничимся длинноволновыми возмущениями $k \ll 1$. Аналогично [7] получим, например, что:

а) для аксиально-симметричных возмущений ($m = 0$) в случае $\alpha_1 = 0$ (сильный скин-эффект) критерием устойчивости ($h_v = \frac{v_z}{H_{\Phi e}}$ вещественно) является

$$h_i > \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha_v^2}; \quad (53)$$

б) при $m = 1$ параметры α_1 и α_v выпадают из дисперсионного уравнения, и, следовательно, как характер распределения тока по сечению [7], так и вращение шнура не влияют на критерий устойчивости по отношению к извиванию;

в) минимальное h_i , необходимое для устойчивости при $m > 1$, определяется формулой

$$h_i = \frac{\alpha_1(m-1) + m\varepsilon_1}{k(1 + \varepsilon_1^2)} + \frac{\sqrt{(m-1)(1 + \varepsilon_1^2)\alpha_v^2 + m[1 - (m-1)\alpha_1^2]\varepsilon_1^2 - (m-1)(\alpha_1^2 - 2\alpha_1 m\varepsilon_1 + m)}}{k(1 + \varepsilon_1^2)}, \quad (54)$$

где $\varepsilon_1 \equiv \frac{H_{ze}}{H_z}$. Выражение (54) показывает, что вращение шнура увеличивает величину h_i , необходимую для стабилизации колебаний, и, следовательно, может привести к неустойчивости.

Автор благодарит академика М.А. Леонтовича и А.И. Морозова за дискуссию и полезные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАЦИОНАРНОЕ ВИНТОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При выводе системы уравнений (21)–(25) для винтового течения мы следуем работе [5], в которой метод функций тока в применении к магнитной гидродинамике развит в наиболее законченной форме.

Стационарное течение идеально проводящей жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_e\mathbf{B}] - \nabla\Phi, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{V}\mathbf{B}] = 0, \quad (3)$$

где Φ – потенциал внешних сил не электромагнитного происхождения.

В предположении, что плотность ρ постоянна (в сущности достаточно потребовать постоянства ρ вдоль линии тока и магнитных силовых линий: $(\nabla \nabla \rho) = (\mathbf{B} \nabla \rho) = 0$), эта система может быть переписана в более симметричной форме. Введем новые переменные

$$\mathbf{v} = \sqrt{\rho} \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi}}, \quad w = p + \frac{v^2}{2} + \Phi, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_0 = \text{rot} \mathbf{v}. \quad (5)$$

Система (1)–(3) преобразуется к виду

$$\text{div} \mathbf{H} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

$$[\mathbf{vH}] = \nabla \varphi_0, \quad [\mathbf{jH}] - [\mathbf{j}_0 \mathbf{v}] = \nabla w. \quad (7)$$

Введем теперь предположение о винтовой симметрии задачи. При этом все величины зависят только от двух переменных r и $\theta = \varphi - \alpha z$, $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, $L = \text{const}$ – шаг винта, r , φ , z – цилиндрические координаты.

1. Из уравнений $\text{div} \mathbf{H} = 0$ и $\text{div} \mathbf{j} = 0$ следует [8], что можно ввести такие функции ψ и I , что

$$rH_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad H_\varphi - \alpha r H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rj_r = \frac{\partial I}{\partial \theta}, \quad j_\varphi - \alpha r j_z = -\frac{\partial I}{\partial r}, \quad (8)$$

причем магнитные силовые линии лежат на поверхности $\psi = \text{const}$, а линии электрического тока на поверхностях $I = \text{const}$.

2. Из первого уравнения (5) следует, что

$$H_z + \alpha r H_\varphi = I, \quad j_z + \alpha r j_\varphi = -\beta \Delta^* \psi + \frac{2\alpha}{\beta} I, \quad (9)$$

где

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2, \quad \Delta^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Очевидно, точно такие же формулы (8), (9) имеют место и для \mathbf{v} и \mathbf{j}_0 . Соответствующие функции мы обозначим через ψ_0 и I_0 . Линии тока жидкости лежат на поверхностях $\psi_0 = \text{const}$, а линии $\text{rot} \mathbf{v}$ – на поверхностях $I_0 = \text{const}$.

3. Из первого уравнения (7) вытекает, во-первых, что $\psi = \psi(\varphi_0)$ и $\psi_0 = \psi_0(\varphi_0)$ и, следовательно, $\psi_0 = \psi_0(\psi)$, т.е. жидкость течет по магнитным поверхностям. Мы будем считать ψ и ψ_0 функциями от некоторой функции ξ , более точное определение которой дано ниже:

$$\psi = \psi(\xi), \quad \psi_0 = \psi_0(\xi). \quad (10)$$

Во-вторых, приравнивание $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \theta}$ и $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta \partial r}$ приводит к якобианному уравнению

$$\frac{\partial \left(\psi, \frac{I_0}{\beta} \right)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial \left(\psi_0, \frac{I}{\beta} \right)}{\partial(r, \theta)}. \quad (11)$$

4. Исключая $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ из последнего уравнения (7), получаем еще одно якобианное равенство

$$\frac{\partial(\psi, I)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(\psi_0, I_0)}{\partial(r, \theta)}. \quad (12)$$

Из (10)–(12) следует, что

$$I\psi' - I_0\psi'_0 = a_1(\xi), \quad I\psi'_0 - I_0\psi' = \beta b_1(\xi), \quad (13)$$

или, разрешая относительно I и I_0 ,

$$I = a\psi' + \beta b\psi'_0, \quad I_0 = a\psi'_0 + \beta b\psi', \quad (14)$$

где $a(\xi) = -\frac{a_1}{s}$, $b(\xi) = \frac{b_1}{s}$, $s = \psi_0'^2 - \psi'^2$ – функция ξ . Кроме того, при учете предыдущих соотношений из второго уравнения (7) получаем

$$dw = \left(D - \frac{2\alpha as}{\beta^2} \right) d\xi + \frac{1}{2\beta} d(a^2s - \beta^2 b^2s), \quad (15)$$

где $D = \psi_0'\Delta^*\psi_0 - \psi'\Delta^*\psi$. Условие того, что dw является полным дифференциалом, дает

$$\frac{\partial(\xi, D)}{\partial(r, \theta)} / \frac{\partial(\xi, \beta)}{\partial(r, \theta)} - \left[\frac{1}{2\beta^2} (a^2s)' - \frac{1}{2} (b^2s)' - \frac{4\alpha as}{\beta^3} \right] = 0. \quad (16)$$

Введем временно новые независимые переменные ξ и β вместо r и θ , тогда $\frac{\partial(\xi, D)}{\partial(r, \theta)} / \frac{\partial(\xi, \beta)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial D}{\partial \beta}$. Подставляя это в (16) и интегрируя по β , найдем

$$D + \frac{1}{2\beta} (a^2s)' + \frac{\beta}{2} (b^2s)' - \frac{2\alpha}{\beta^2} as + (su)' = 0. \quad (17)$$

Произвольная функция $u(\xi)$ определяется исключением D из (15) и (17):

$$w = -s(u + \beta b^2). \quad (18)$$

Преобразуя выражение для D , запишем уравнение (17) в виде

$$s\Delta^*\xi + \frac{s'}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\beta} (a^2s)' + \frac{\beta}{2} (b^2s)' - \frac{2\alpha}{\beta^2} as + (su)' = 0. \quad (19)$$

Полученное соотношение существенно упрощается, если выбрать ξ из условия $s = \psi_0'^2 - \psi'^2 = \text{const}$. При этом уравнение для ξ окончательно принимает вид

$$\Delta^*\xi + \frac{aa'}{\beta} + bb'\beta - \frac{2\alpha a}{\beta^2} + u' = 0. \quad (20)$$

Таким образом, мы можем произвольно задать три функции: $a(\xi)$, $b(\xi)$ и $u(\xi)$. Кроме того, произвольно выбирается одна из функций $\psi(\xi)$ или $\psi_0(\xi)$, и тогда оставшаяся из них определяется из уравнения $\psi_0'^2 - \psi'^2 = s$. Исходная система уравнений (1)–(3) сведена к одному уравнению (20). В качестве предельных случаев отсюда получаются:

1) уравнения для винтовых равновесных [8] магнитогидродинамических конфигураций ($\psi_0 = I_0 = 0$, откуда $s = -1$, $\xi = \psi$, $a = I$, $b = 0$, $u = w$):

$$w = p + \Phi, \quad \Delta^*\psi + \frac{1}{2\beta} \frac{dI^2}{d\psi} - \frac{2\alpha}{\beta^2} I + \frac{dw}{d\psi} = 0; \quad (21)$$

2) уравнения для винтовых течений в обычной гидродинамике ($\psi = I = 0$, т.е. $s = 1$, $\xi = \psi_0$, $a = I_0$, $b = 0$, $u = -w$):

$$w = p + \frac{v^2}{2} + \Phi, \quad \Delta^*\psi_0 + \frac{1}{2\beta} \frac{dI_0^2}{d\psi_0} - \frac{2\alpha}{\beta^2} I_0 - \frac{dw}{d\psi_0} = 0. \quad (22)$$

В этих уравнениях две функции $w(\psi)$ и $I(\psi)$ (или $w(\psi_0)$ и $I_0(\psi_0)$) задаются произвольно. Соответствующие формулы для трансляционной и аксиальной симметрии получаются из формул винтовой симметрии предельным переходом $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. Морозов А.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 331.
3. Власов А.А. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1954. Т. 27, № 2. С. 8.
4. Chandrasekhar S. // Astrophys. J. 1956. Vol. 124. P. 232.
5. Ткалич В.С. // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига, 1959. Т. 2. С. 191.
6. Ткалич В.С. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. Т. 5. С. 122.
7. Шафранов В.Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 61.
8. Кадомцев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 5.

О МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ*

В связи с проблемой удержания плазмы магнитным полем в настоящее время является актуальным изучение свойств магнитных поверхностей, т.е. поверхностей, образованных магнитными силовыми линиями. В данной работе выводятся уравнения усредненных магнитных поверхностей и уравнения магнитных поверхностей, близких к заданной магнитной поверхности.

1. УСРЕДНЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим магнитное поле \mathbf{H} , имеющее квазиоднородную продольную компоненту H^3 и малое по сравнению с ней возмущающее поле \mathbf{h} . Уравнения силовых линий запишем в криволинейных координатах x_1, x_2, x_3 , в которых координатные линии x_3 совпадают с силовыми линиями поля \mathbf{H}^3 :

$$\frac{dx_k}{dx_3} = \frac{H^k}{H^3} \quad (k = 1, 2). \quad (1.1)$$

Здесь через H^k обозначены контрвариантные компоненты полного магнитного поля \mathbf{H} . Мы будем считать, что поперечные поля $H^1 \equiv h^1$ и $H^2 \equiv h^2$ малы, а продольное поле $H^3 = H_0^3 + h^3$ содержит большую квазиоднородную часть $H_0^3(x_1, x_2)$, не зависящую от x_3 , и малую поправку h^3 . Уравнение (1.1) с точностью до членов порядка h^2 записывается в виде

$$\frac{dx_k}{dx_3} = \frac{1}{H_0^3} \left(h^k - \frac{h^3 h^k}{H_0^3} \right) \equiv f_k(x_i, x_3) \quad (i, k = 1, 2). \quad (1.2)$$

Предположим далее, что возмущающее поле \mathbf{h} является периодической функцией аргумента x_3 , и выберем h^3 таким образом, чтобы его среднее значение по x_3 равня-

* Совместно с Л.В. Кораблевым и А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 1153–1163.

лось нулю. В этом случае уравнения (1.2) могут быть заменены приближенными уравнениями [1], усредненными по x_3 :

$$\frac{d\bar{x}_k}{dx_3} = \bar{f}_k + \overline{\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \hat{f}_i}. \quad (1.3)$$

Черта сверху означает усреднение по аргументу x_3 , так что $f = \bar{f} + \tilde{f}$, где \bar{f} и \tilde{f} – "постоянная" и "переменная" части f , а оператором "Λ" обозначена переменная часть

интеграла по x_3 от переменной части f , т.е. $\hat{f} = \int_0^{\tilde{x}_3} \tilde{f} dx_3$. Например, в применении к

тригонометрическим функциям этот оператор дает

$$\widehat{\cos nx_3} = \frac{1}{n} \sin nx_3, \quad \widehat{\sin nx_3} = -\frac{1}{n} \cos nx_3.$$

Уравнение (1.3) определяет усредненный ход силовой линии. Поведение силовой линии с учетом ее колебаний около среднего положения с точностью до членов более высокого порядка малости дается формулами

$$x_k = \bar{x}_k + \hat{f}_k(\bar{x}_i, x_3). \quad (1.4)$$

Подставляя в (1.3) конкретные выражения для f_k из (1.2) и преобразуя полученные выражения с помощью тождества $\overline{\widehat{ab}} = -\widehat{a\bar{b}}$ и уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} H^i) = 0, \quad (1.5)$$

получим в предположении, что определитель метрического тензора $g = |g_{ik}|$ не зависит от x_3 , с точностью до членов второго порядка по \mathbf{h}

$$\frac{dx_1}{dx_3} = \frac{\bar{h}_1}{H_0^3} - \frac{1}{\sqrt{g} H_0^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\sqrt{g} \widehat{h^1 h^2}}{H_0^3} \right), \quad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{h^2}{H_0^3} + \frac{1}{\sqrt{g} H_0^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sqrt{g} \widehat{h^1 h^2}}{H_0^3} \right). \quad (1.6)$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$, то можно ввести векторный потенциал \mathbf{A} так, что $\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, т.е.

$$h^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right). \quad (1.7)$$

Заменяя h^i в первых членах (1.6) их выражениями из (1.7) и принимая во внимание, что $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial x_3} = 0$, получим

$$\frac{dx_1}{dx_3} = \frac{1}{\sqrt{g} H_0^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\bar{A}_3 - \frac{\sqrt{g}}{H_0^3} \widehat{h^1 h^2} \right), \quad \frac{dx_2}{dx_3} = -\frac{1}{\sqrt{g} H_0^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\bar{A}_3 - \frac{\sqrt{g}}{H_0^3} \widehat{h^1 h^2} \right). \quad (1.8)$$

Эти уравнения непосредственно интегрируются, и мы находим уравнение усредненных магнитных поверхностей:

$$\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv \bar{A}_3 - \frac{\sqrt{g}}{H_0^3} \widehat{H^1 H^2} = \text{const}, \quad (1.9)$$

где A_3 – продольная ковариантная компонента векторного потенциала; H_0^3 – по-

стоянная часть продольного поля, а H^i – компоненты "поперечного" поля, малого по сравнению с H_0^3 .

Выпишем функцию $\Phi(x_1, x_2)$ для "прямого", "тороидального" и "винтового" полей, выразив векторы \mathbf{H} и \mathbf{A} через их физические составляющие.

1. Если поле H^3 имеет прямые силовые линии, направленные вдоль оси z , то в декартовых координатах $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\Phi(x, y) = \bar{A}_z - \frac{1}{H_{z0}} \overline{\hat{H}_x H_y}, \quad (1.10)$$

а в цилиндрических координатах $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$

$$\Phi(r, \varphi) = \bar{A}_z - \frac{1}{H_{z0}} \overline{\hat{H}_r H_\varphi}. \quad (1.10')$$

В этих формулах усреднение и операция " \wedge " производятся по аргументу z .

2. В случае, когда H^3 имеет силовые линии, направленные по азимуту φ , в цилиндрических координатах $x_1 = z, x_2 = r, x_3 = \varphi$ находим

$$\Phi(r, z) = r\bar{A}_\varphi - \frac{r^2}{H_{\varphi 0}} \overline{\hat{H}_z H_r}, \quad (1.11)$$

где усреднение и операция " \wedge " осуществляются по аргументу φ .

3. Если силовые линии основного поля H^3 являются винтовыми линиями $\theta = \varphi - \alpha z = \text{const}$, где $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ ($L = \text{const}$ – шаг винта), получаем, выбрав, например, в качестве x_i координаты $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$,

$$\Phi = \bar{A}_z + \alpha r \bar{A}_\varphi - \frac{1}{H_{z0}} \overline{\hat{H}_r (H_\varphi - \alpha r H_z)}. \quad (1.12)$$

Усреднение и операция " \wedge " – по аргументу z вдоль линий $\theta = \text{const}$. Последняя формула может быть представлена также в виде

$$\Phi = \bar{A}_z + \alpha r \bar{A}_\varphi + \frac{r}{H_{\varphi 0}} \overline{\hat{H}_r (H_\varphi - \alpha r H_z)}, \quad (1.12')$$

где операция " \wedge " – по аргументу φ , так как $H_{\varphi 0} = \alpha r H_{z0}$, и вдоль $\theta = \text{const}$ имеем $\hat{H}_r^\varphi = \alpha \hat{H}_r^z$. Формулы (1.10') и (1.11) получаются из (1.12) и (1.12') предельными переходами $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$.

В заключение приведем выражение для среднего угла прокручивания силовых линий вокруг оси "прямого" поля [2]. В цилиндрических координатах $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$ из второй формулы (1.6) находим

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dz} = -\frac{1}{rH_{z0}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{A}_z - \frac{1}{H_{z0}} \overline{\hat{H}_r \hat{H}_\varphi} \right) = \frac{\bar{H}_\varphi}{rH_{z0}} + \frac{1}{rH_{z0}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overline{\hat{H}_r H_\varphi}}{H_{z0}} \right). \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) дает общее выражение для среднего прокручивания силовых линий, с помощью которого можно исследовать, например, влияние возмущений на угол прокручивания ("ротационного преобразования") стеллараторного [3, 4] поля.

Интересно отметить, что уравнение магнитных поверхностей можно выразить через средний угол прокручивания силовых линий. Действительно, согласно форму-

лам (1.10) и (1.13) получаем

$$\Phi(r, \varphi) = - \int_0^r H_{z0} \frac{d\bar{\varphi}}{dz} r dr = \text{const}.$$

Для определения истинных магнитных поверхностей с точностью до членов $\frac{H^i}{H_0^3}$ достаточно в формуле (1.9) заменить \bar{x}_1 и \bar{x}_2 на

$$\bar{x}_1 \approx x_1 - \frac{\hat{H}^1}{H_0^3}, \quad \bar{x}_2 \approx x_2 - \frac{\hat{H}^2}{H_0^3}. \quad (1.14)$$

2. МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ "ПРЯМОГО" ПОЛЯ

При рассмотрении частных примеров геометрии магнитных поверхностей "прямого" поля мы ограничимся случаем безвихревого магнитного поля

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z + \nabla \psi. \quad (2.1)$$

Скалярный потенциал ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$. Периодическое по z поле, конечное на оси $r = 0$, можно представить потенциалом

$$\psi = A_0 + \sum_n (A_n \cos nz + B_n \sin nz), \quad (2.2)$$

где

$$A_0 = \sum_m r^m (a_{0m} \cos m\varphi + b_{0m} \sin m\varphi),$$

$$A_n = \sum_m I_m(nr) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi),$$

$$B_n = \sum_m I_m(nr) (c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi).$$

Здесь $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$ – постоянные, которые определяются, например, заданием токов на поверхности цилиндра $r = \text{const}$, а период поля принят равным 2π .

Согласно формуле (1.10') усредненные магнитные поверхности такого поля описываются уравнением

$$\Phi = \bar{A}_z + \frac{1}{H_0} \sum_n \frac{1}{2nr} \left(\frac{\partial A_n}{\partial \varphi} \frac{\partial B_n}{\partial r} - \frac{\partial A_n}{\partial r} \frac{\partial B_n}{\partial \varphi} \right) = \text{const}. \quad (2.3)$$

Величина \bar{A}_z – определяется из любого из соотношений (для \bar{H}_r и \bar{H}_φ):

$$\frac{\partial A_0}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial \varphi}, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_0}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial r}.$$

2.1. Влияние постоянного перпендикулярного возмущения на стеллараторное поле

Выберем скалярный потенциал ψ в виде

$$\psi = h I_n(nr) \cos n(\varphi - z) - h_1 r \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Первый член описывает n -заходное стеллараторное поле, а второй – однородное поле, перпендикулярное к оси z стеллараторного поля. Используя (2.3), (2.4), находим магнитные поверхности

$$\Phi = h_1 r \sin \varphi - \frac{nh^2}{2H_0 r} I_n(nr) I_n'(nr) = \text{const.} \quad (2.6)$$

Это семейство вложенных друг в друга замкнутых поверхностей (рис. 1), центр которых смещен в направлении, перпендикулярном возмущающему полю. Смещение центра легко определить из уравнений $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ или

$$h_1 = \frac{nh^2}{2H_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{I_n I_n'}{r} \right). \quad (2.7)$$

2.2. Возмущение стеллараторного поля резонансным гофрированным полем

Соответствующее магнитное поле описывается скалярным потенциалом

$$\psi = h I_n(nr) \cos n(\varphi - z) + h_1 I_0(nr) \cos(nz + \theta), \quad \theta = \text{const.} \quad (2.8)$$

Магнитные поверхности определяются уравнением

$$\Phi = -\frac{nh I_n}{2r H_0} [h I_n' + h_1 I_0' \cos(n\varphi + \theta)] = \text{const.}, \quad (2.9)$$

разлагая которое вблизи оси $r = 0$, получим

$$hr^{2n-2} \left(1 + \frac{nr^2}{2} \right) + \frac{2^{n-1}(n-1)!}{n^{n-2}} h_1 r^n \left(1 + \frac{(n+3)n^2}{4n+4} r^2 \right) \cos(n\varphi + \theta) = \text{const.} \quad (2.10)$$

1. В случае однозаходного стеллараторного поля ($n = 1$) имеем

$$h \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) + h_1 r \cos(\varphi + \theta) = \text{const.}, \quad (2.11)$$

систему вложенных поверхностей, смещенных относительно оси z на расстояние

$$r = \frac{h_1}{h} \quad (\text{см. рис. 1}).$$

2. В случае двухзаходного стеллараторного поля ($n = 2$) система поверхностей

$$hr^2(1 + r^2) + 2h_1 r^2 \left(1 + \frac{5}{3} r^2 \right) \cos(2\varphi + \theta) = \text{const}$$

имеет различный вид в зависимости от амплитуды возмущающего поля h_1 . При $h_1 < \frac{h}{2}$

имеется только одна неподвижная точка, а при $\frac{3}{5}h > h_1 > \frac{h}{2}$ появляется двухлепестковая розетка (рис. 2, 3).

3. При $n \geq 3$ при любом сколь угодно малом возмущении резонансным гофрированным полем всегда вблизи оси z появляется n -лепестковая розетка (для $n = 3$ см. рис. 4), линейные размеры которой тем больше, чем больше поле возмущения.

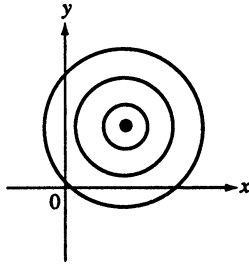


Рис. 1

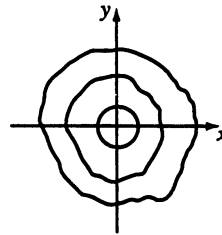


Рис. 2

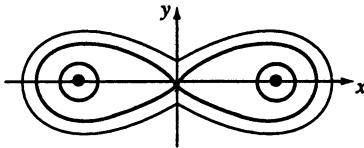


Рис. 3

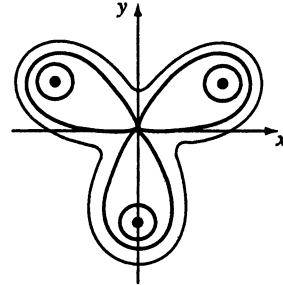


Рис. 4

Появление розеток при воздействии резонансного гофрированного поля на винтовое стеллараторное поле было впервые обнаружено И.М. Гельфандом и др. [5] путем численного построения магнитных поверхностей с помощью электронной машины, что и стимулировало написание настоящей работы.

2.3. Мультипольное возмущение стеллараторного поля

Аналогично гофрированному полю влияет и мультипольное возмущающее поле, которое можно представлять себе образованным проводниками с током чередующегося направления, параллельными оси z и окружающими ее. Возьмем ψ в виде

$$\psi = hI_n(nr) \cos n(\varphi - z) + h_1 r^m \cos(m\varphi + \theta), \quad \theta = \text{const.} \quad (2.12)$$

При этом магнитные поверхности определяются формулой

$$\Phi = h_1 r^m \sin(m\varphi + \theta) - \frac{nh^2}{2H_0 r} I_n I'_n = \text{const} \quad (2.13)$$

или вблизи оси z

$$\Phi = h_1 r^m \sin(m\varphi + \theta) - \frac{nh^2}{H_0} \frac{(nr)^{2n-2}}{2^{2n+1}(n-1)!^2} \left(1 + \frac{nr^2}{2}\right). \quad (2.14)$$

Ограничиваясь случаем трехзаходного стелларатора ($n = 3$), имеем (для $\theta = 0$)

$$r^m \sin m\varphi - \gamma r^4 \left(1 + \frac{3}{2} r^2\right) = \text{const}, \quad (2.15)$$

где $\gamma = \frac{3^5 h^2}{2^9 h_1 H_0}$. Из уравнения (2.15) видно, что для $m = 2$ и 3 при любом сколь угодно

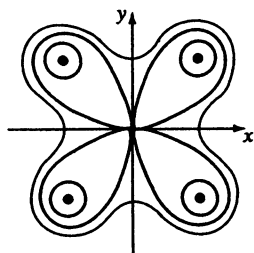


Рис. 5

малом возмущении около $r = 0$ появляются двух- и трехлепестковые розетки (см. рис. 3 и 4).

При $m = 4$ существует критическое значение величины возмущения $h_{1 \text{ кр}}$, определяющееся соотношением $\gamma = 1$, или

$$h_{1 \text{ кр}} = \frac{3^5 h^2}{2^9 H_0}. \quad (2.16)$$

При $h_1 < h_{1 \text{ кр}}$ в окрестности $r = 0$ розетка отсутствует (см. рис. 2) и появляется при $h_1 > h_{1 \text{ кр}}$ (рис. 5).

При $m > 4$ в окрестности $r = 0$ розетка не появляется ни при каком значении h_1 , если $\gamma \geq 1$.

2.4. Цепочки

Интересные конфигурации магнитных поверхностей могут быть получены при рассмотрении безвихревого магнитного поля, периодического как по z , так и по x . Пусть, например, магнитное поле задается скалярным потенциалом

$$\psi = f_1(y) \sin(kz - p_1 x) + f_2(y) \sin(kz - p_2 x), \quad (2.17)$$

где

$$f_1 = a_1 \operatorname{ch} q_1 y, \quad f_2 = a_2 \operatorname{sh} q_2 y, \quad q_i^2 = p_i^2 + k^2.$$

Усредненные по z магнитные поверхности согласно формуле (1.10) определяются уравнением

$$p_1 f_1 f_1' + p_2 f_2 f_2' + (p_1 f_1 f_2' + p_2 f_1' f_2) \cos(p_1 - p_2)x = \text{const}. \quad (2.18)$$

Коэффициенты этого уравнения можно подобрать таким образом, чтобы в области $q_i y \ll 1$ эти поверхности имели вид, изображенный на рис. 6 и описываемый уравнением

$$y^2 - l^2 \cos^2 \gamma x = \text{const}. \quad (2.19)$$

Путем разложения f_i по степеням $q_i y$ нетрудно убедиться в том, что для этого достаточно, чтобы удовлетворялось соотношение

$$p_1 a_1^2 q_1^2 = -p_2 a_2^2 q_2^2. \quad (2.20)$$

Используя подобную технику, в принципе можно построить и многослойные цепочки, например трехслойную, определяющуюся уравнением

$$\left(y^2 - l_0^2 \cos^2 x \right) \left[y^2 - (l_0 + l_1 - l_1 \cos x)^2 \right] = \text{const}. \quad (2.21)$$

Однако для этого, по всей вероятности, придется использовать поле, имеющее несколько несоизмеримых периодов по z (рис. 7).

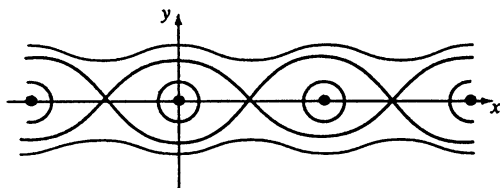


Рис. 6

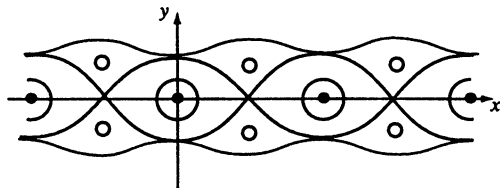


Рис. 7

3. УСРЕДНЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НЕПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В настоящем параграфе мы рассмотрим обобщение метода усреднения магнитных поверхностей на тот случай, когда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon x_3) \quad (3.1)$$

является периодической функцией третьего аргумента x_3 , но, кроме того, еще зависит от εx_3 , где ε – малый параметр порядка отношения поперечного поля к продольному. Нетрудно убедиться с помощью непосредственного расчета, что формулы усреднения (1.3) с точностью до выписанных там членов сохраняют свой вид и при наличии добавочного аргумента εx_3 . Далее, при выводе соотношения (1.9) использовалось только уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, и так как с принятой точностью производная по x_3 в этом уравнении может быть взята по третьему аргументу \mathbf{H} (см. (3.1)), то и уравнения магнитных поверхностей (1.9) сохраняют свою форму.

В р а щ а ю щ а я с я р о з е т к а. Рассмотрим в качестве примера усредненные магнитные поверхности "прямого" магнитного поля, описывающегося скалярным потенциалом ($\mathbf{H} = \nabla \psi$):

$$\psi = H_0 z + h I_n(nr) \cos n(\varphi - z) + h_1 I_0(\gamma nr) \cos \gamma n z, \quad (3.2)$$

где $\gamma = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Это поле представляет собой n -заходное прямое винтовое поле, к которому добавлено гофрированное поле с периодом, немного отличающимся от периода винтового поля.

Усредненные магнитные поверхности согласно формуле (1.10') описываются уравнением

$$\Phi = -\frac{nh I_n(nr)}{2rH_0} [h I_n'(nr) + h_1 \gamma I_0'(\gamma nr) \cos n(\varphi + \varepsilon z)] = \text{const}, \quad (3.3)$$

отличающимся от уравнения (2.9) заменой аргумента φ на $\varphi + \varepsilon z$. Следовательно, розетки, появляющиеся от воздействия гофрированного поля на стеллараторное, начинают медленно проворачиваться, если периоды стеллараторного и гофрированного полей не совпадают. Представляется интересным исследование подобных конфигураций с быстрым вращением розеток с помощью электронной счетной машины.

4. МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В предыдущих параграфах рассмотрение магнитных поверхностей производилось на основании приближенной теории, основанной на методе усреднения. Оказывается, что существуют интересные конфигурации магнитных поверхностей, которые можно получить и из точной теории. Если поле \mathbf{H} имеет винтовую симметрию:

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z + \nabla \psi(r, \theta), \quad \theta = \varphi - \alpha z, \quad (4.1)$$

то уравнение магнитных поверхностей представляется формулой

$$\Phi = H_0 \frac{\alpha r^2}{2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \text{const}, \quad (4.2)$$

где $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \psi$. Мы рассмотрим здесь такие магнитные поверхности, ось которых обви-

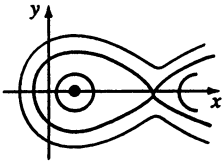


Рис. 8

вает ось z поля. Простейшим примером является однозаходное стеллараторное поле $\psi = h_1 I_1(r) \sin \theta$, магнитные поверхности которого $\Phi = H_0 \frac{r^2}{2} - r h_1 I_1'(r) \cos \theta = \text{const}$ вблизи оси в сечении $z = \text{const}$ представляют собой смещенные относительно $r = 0$ концентрические окружности (рис. 8).

Еще два примера дает рассмотрение комбинаций двухзаходного поля с трех- и четырехзаходным.

1. Пусть $\psi = h_2 I_2(2r) \sin 2\theta + h_3 I_3(3r) \sin 3\theta$, тогда вблизи оси уравнение поверхностей $\Phi = \text{const}$ запишется как

$$r^2 + ar^2 \cos 2\theta + br^3 \cos 3\theta = \text{const}. \quad (4.3)$$

При выборе параметров a и b так, чтобы было $b > 0$, $a < 0$, $1 < |a| < 3$, сечение магнитных поверхностей имеет вид, изображенный на рис. 9, причем координата центра винтовых магнитных трубок есть $r = -\frac{2}{3b}(1+a)$.

2. Если же $\psi = h_2 I_2(2r) \sin 2\theta + h_4 I_4(4r) \sin 4\theta$, то магнитные поверхности

$$r^2 + a \left(r^2 + \frac{2}{3} r^4 \right) \cos 2\theta + br^4 \cos 4\theta = \text{const}. \quad (4.4)$$

при малых r имеют два винтовых шнура, вьющихся вокруг оси z (рис. 10) и, следовательно, обвивающих друг друга, если представить себе, что поле замкнуто в тор. Это достигается, например, при $b > 0$, $1 < a < 2$. Координаты центров винтовых трубок определяются соотношением $r^2 = \frac{a-1}{2b}$ (при $b \gg 1$).

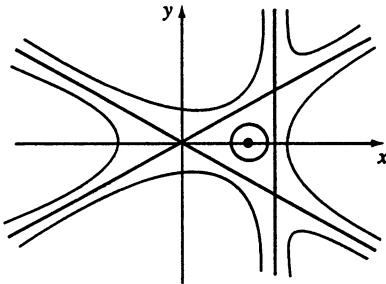


Рис. 9

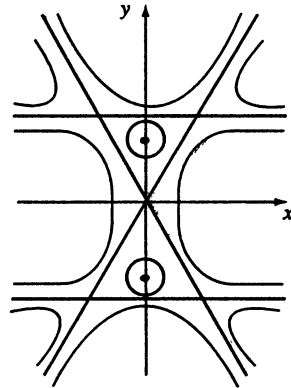


Рис. 10

Следует обратить внимание на то, что в отличие от рассмотренных в разд. 2 розеток (см. рис. 3, 4) винтовые трубки здесь окружены магнитными поверхностями, не охватывающими эти трубки.

Рассмотренные выше конфигурации магнитных поверхностей (розетки, цепочки, перевивающиеся трубки), по-видимому, представляют интерес с точки зрения их использования для удержания плазмы. Для этой цели необходимо исследовать равновесные конфигурации плазмы и их устойчивость в подобных полях.

5. МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, БЛИЗКИЕ К ЗАДАННОЙ

Если известно положение некоторой магнитной поверхности и расположение силовых линий на ней, то можно построить семейство магнитных поверхностей, близких к заданной. Введем координатную сетку x_1, x_2, x_3 так, чтобы линии x_1^0 и x_2^0 лежали на заданной поверхности, а $x_3 \equiv w$ была расстоянием, отсчитываемым по нормальям к заданной поверхности S . Уравнение $\text{div} \mathbf{H} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial w}(\sqrt{g} H^3) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sqrt{g} H^1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sqrt{g} H^2) = 0 \quad (5.1)$$

проинтегрируем в первом приближении по w и получим

$$\sqrt{g} H^3 = -w \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\sqrt{g} H^1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sqrt{g} H^2) \right]. \quad (5.2)$$

Здесь учтено, что $H^3|_S = 0$; у x_1 и x_2 опущены индексы "0", и все величины являются функциями x_1^0 и x_2^0 – координат на магнитной поверхности S .

Уравнения силовых линий магнитного поля (поделенные на \sqrt{g}) имеют вид

$$\frac{dx_1}{\sqrt{g} H^1} = \frac{dx_2}{\sqrt{g} H^2} = \frac{dw}{\sqrt{g} H^3}. \quad (5.3)$$

Пусть уравнение силовых линий на поверхности S

$$\sqrt{g} H^2 dx_1 - \sqrt{g} H^1 dx_2 = 0 \quad (5.4)$$

имеет интегрирующий множитель $\frac{1}{T(x_1, x_2)}$. Тогда

$$\sqrt{g} H^1 = T \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \sqrt{g} H^2 = -T \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad (5.5)$$

где $F(x_1, x_2) = \text{const}$ – интеграл уравнения силовых линий на S .

Подставляя (5.5) в (5.3), получим с учетом (5.2) и (5.4)

$$-\frac{dw}{w} = \frac{dx_1}{\sqrt{g} H^1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 \right). \quad (5.6)$$

Интегрируя полученное уравнение, находим, что расстояние между соседними магнитными поверхностями определяется формулой

$$wT = \text{const}. \quad (5.7)$$

При известном уравнении силовых линий на поверхности S функции $F(x_1, x_2)$ и $T(x_1, x_2)$ определяются из одного из уравнений (5.5). При наличии симметрии магнитного поля уравнение магнитных поверхностей можно записать непосредственно через компоненты поля. Пусть $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$, тогда $\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$ (в то время как $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ не обязательно равняется нулю, так как силовые линии, вообще говоря, не имеют той же симметрии, что и самое магнитное поле). Дифференцируя уравнения (5.5) по x_2 ,

получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial F}{\partial x_2} = \text{const}$, и так как согласно первому уравнению (5.5)

$T = \text{const} \sqrt{g} H^1$, то из (5.7) окончательно получаем

$$w \sqrt{g} H^1 = \text{const}. \quad (5.9)$$

Для полей, обладающих трансляционной ($\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)$), круговой ($\mathbf{H} = \mathbf{H}(r, z)$) и винтовой ($\mathbf{H} = \mathbf{H}(r, \theta)$) симметрией, согласно (5.9) получаем следующие уравнения магнитных поверхностей:

$$w H_{\perp} = \text{const}, \quad wr H_{\perp} = \text{const}, \quad w \sqrt{1 + \alpha^2 r^2} H_{\perp} = \text{const}, \quad (5.10)$$

где H_{\perp} — лежащая на заданной поверхности $w = 0$ компонента магнитного поля, перпендикулярная к линиям z в первом случае, линиям φ во втором случае и винтовым линиям $\theta = \varphi - \alpha z = \text{const}$ в третьем случае.

Мы благодарны И.М. Гельфанду и М.И. Граеву за плодотворную дискуссию вопросов, разбираемых в данной статье.

Мы благодарим М.А. Леонтовича за постоянный интерес к этой работе и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

УСРЕДНЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ "ПРЯМОГО" ПОЛЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

С учетом членов третьего порядка по $\frac{H_1}{H_0}$ уравнения силовых линий "прямого" магнитного поля ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) записываются в виде

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{H_k}{H_0 + H_z} \approx \frac{H_k}{H_0} \left(1 - \frac{H_z}{H_0} + \frac{H_z^2}{H_0^2} \right) \equiv f_k(x_i, z) \quad i, k = 1, 2; \quad H_0 = \text{const}. \quad (\text{П.1})$$

Соответствующие усредненные уравнения суть [7]

$$\frac{dx_k}{dz} = \bar{f}_k + \frac{\overline{\partial \hat{f}_k}}{\partial x_i} \hat{f}_i - \frac{\overline{\partial \hat{f}_k}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \hat{f}_j + \frac{\overline{\partial \hat{f}_k}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \hat{f}_j + \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial^2 \hat{f}_k}}{\partial x_i \partial x_j} \hat{f}_i \hat{f}_j. \quad (\text{П.2})$$

Компоненту H_z выбираем таким образом, чтобы $\bar{H}_z = 0$. Кроме того, мы ограничимся случаем, когда $\bar{H}_k = 0$. При этом, используя соотношение $\text{div} \mathbf{H} = 0$, из уравнений (П.1), (П.2) получаем

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dz} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (\text{П.3})$$

где

$$\Phi = - \frac{1}{H_0^2} \overline{\hat{H}_x H_y} - \frac{1}{H_0^3} \left\{ \overline{H_z H_x \hat{H}_y} - \frac{\overline{\partial H_x}}{\partial x} \hat{H}_x \hat{H}_y + \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial H_y}}{\partial x} \hat{H}_x^2 - \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial H_x}}{\partial y} \hat{H}_y^2 \right\}, \quad (\text{П.4})$$

и, следовательно, уравнениями усредненных магнитных поверхностей являются $\Phi(x, y) = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. С. 271.
3. Спитцер Л. Исследование на стеллараторе // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 505.
4. Джонсон Д., Оберман С., Кулсруд Р., Фримен Е. Некоторые устойчивые магнитогидродинамические равновесные конфигурации // Там же. С. 193.
5. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1960. Т. 31. С. 1164.
6. Бурштейн Э.Л., Соловьев Л.С. // Науч. тр. РТИ АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 2. С. 3.

МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХЗАХОДНОГО ВИНТОВОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВОЗМУЩЕННОГО ГОФРИРОВАННЫМ ПОЛЕМ*

ВВЕДЕНИЕ

Под безвихревым трехзаходным винтовым магнитным полем мы будем понимать поле, описываемое в цилиндрической системе координат скалярным потенциалом

$$\psi = H_0 z + \frac{h_3}{\alpha} I_3(3\alpha r) \sin 3(\varphi - \alpha z). \quad (1)$$

Здесь H_0 – напряженность "продольного" однородного поля, h_3 – амплитуда винтового магнитного поля, I_3 – бесселева функция третьего порядка от мнимого аргумента, $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, где L – шаг обмотки, создающей поле. Это поле представляет большой интерес для термоядерных систем [1, 2]. Так как это поле обладает винтовой симметрией, то уравнения силовых линий

$$\frac{dr}{dz} = \frac{H_r}{H_z}, \quad \frac{rd\varphi}{dz} = \frac{H_\varphi}{H_z} \quad (2)$$

имеют интеграл

$$\frac{H_0 \alpha r^2}{2} - r h_3 I_3'(3\alpha r) \cos 3(\varphi - \alpha z) = \text{const}, \quad (3)$$

который является уравнением магнитных поверхностей [1].

Исследование этого интеграла [3] показывает, что магнитные поверхности могут быть двух типов: поверхности первого типа представляют собой вложенные друг в друга трубчатые поверхности; поверхности второго типа не охватывают оси системы и неограниченно от нее удаляются. Разделяющая эти группы треугольная поверхность получила название сепаратрисы [3]. На рис. 1 изображено сечение магнитных поверхностей, описываемых уравнением (3), плоскостью $z = 0$ для случая, когда $h_3/H_0 = 3$.

* Совместно с И.М. Гельфандом, М.И. Граевым, Н.М. Зуевой, А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 1164–1169.

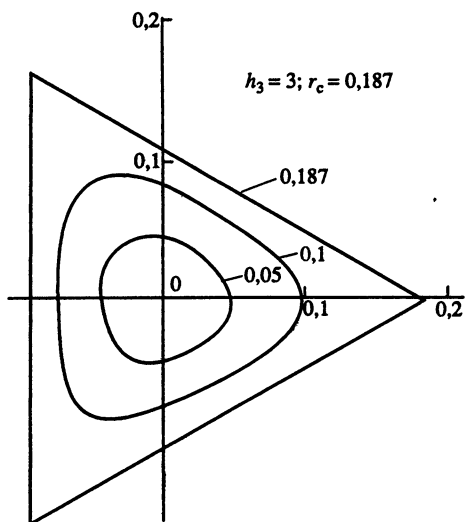


Рис. 1

и размером магнитных поверхностей нас интересовала также зависимость угла прокручивания [1, 3] $2\pi\omega$ от некоторого характерного радиуса магнитной поверхности.

Следует отметить, что угол прокручивания в принципе можно определить по-разному. В данной работе мы определяли его просто как умноженное на 2π отношение числа обходов силовой линии вокруг оси на большом числе периодов к числу периодов.

1. СХЕМА СЧЕТА

Для численного расчета магнитных поверхностей длина шага L была взята равной 2π , а напряженность продольного поля H_0 принята равной единице. Таким образом, исходный потенциал ψ был взят в виде

$$\psi = z + h_3 I_3(3r) \sin 3(\varphi - z) + h_0 I_0(kr) \sin kz. \quad (5)$$

Расчет был проведен для $k = 1$ и $k = 3$ при различных значениях h_0 . За основное поле было взято поле $h_3 = 3$, что соответствует при выбранном масштабе длины максимальному радиусу сепаратрисы $(r_c)_{\max} = 0,187$.

Для определения магнитной поверхности рассчитывалась одна магнитная силовая линия на интервале $0 \leq z \leq NL$ ($L = 2\pi$), где N достаточно велико, и затем все отрезки силовой линии, лежащие в интервалах $(k-1)L \leq z \leq kL$, $k = 1, \dots, N$, сдвигались в направлении оси z в интервал $0 \leq z \leq L$.

Интегрирование велось методом Рунге–Кутты с заданным шагом h (брался шаг, равный $\frac{2\pi}{40}$, $\frac{2\pi}{80}$ и $\frac{2\pi}{160}$). Принималось $N = 25$ и $N = 50$.

При практическом осуществлении термоядерной системы с полем (1)¹ на это поле накладываются различные возмущения. В настоящей работе поставлена задача выяснить в общих чертах характер влияния гофрирования поля, т.е. возмущений вида

$$\psi_{\text{гофр}} = \frac{h_0}{\alpha} I_0(k\alpha r) \sin k\alpha z \quad (4)$$

на магнитные поверхности при разных h_0 и k .

Поскольку суммарное поле (1) и (4) не обладает симметрией, магнитные поверхности могут быть рассчитаны или численно, или каким-либо приближенным методом. Таким приближенным методом является метод усреднения [4], но он неприменим вблизи сепаратрисы. Поэтому в основу данной работы был положен численный расчет. Результаты, получаемые методом усреднения, подробно изложены в [5]. Наряду с формой

¹ Такие системы получили название стеллараторов.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

1. $k = 1$.

На рис. 2 и 3 представлены сечения магнитных поверхностей при $h_0 = 0,3$ и $h_0 = 0,6$. Штриховыми линиями изображена для сравнения сепаратриса невозмущенного поля. Поскольку магнитные поверхности, лежащие за сепаратрисой возмущенного поля, трудно получить путем численного счета, то сепаратриса возмущенного поля может быть определена лишь с ограниченной точностью. На рис. 2 и 3 крестиком обозначены точки, оказавшиеся за сепаратрисой.

Сечения проведены при $z = 0$. Из рис. 2 и 3 видно, что при возрастании h_0 размеры сепаратрисы резко сокращаются. Кроме того, из рис. 3 видно, что при $h_0 = 0,6$ внутри

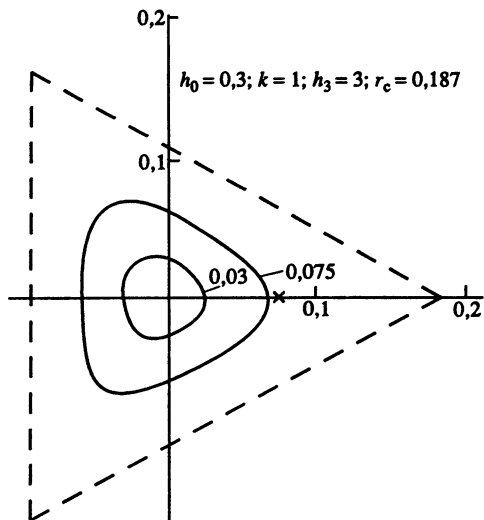


Рис. 2

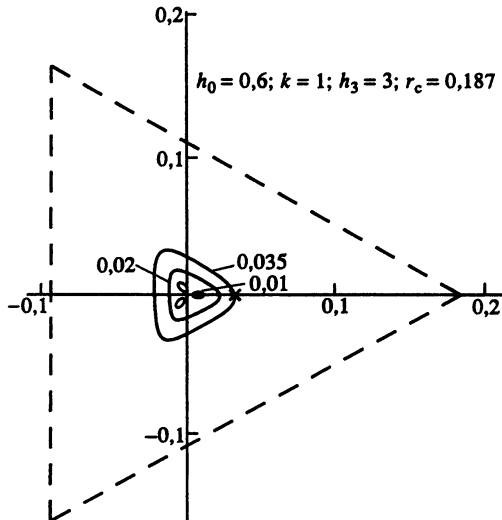


Рис. 3

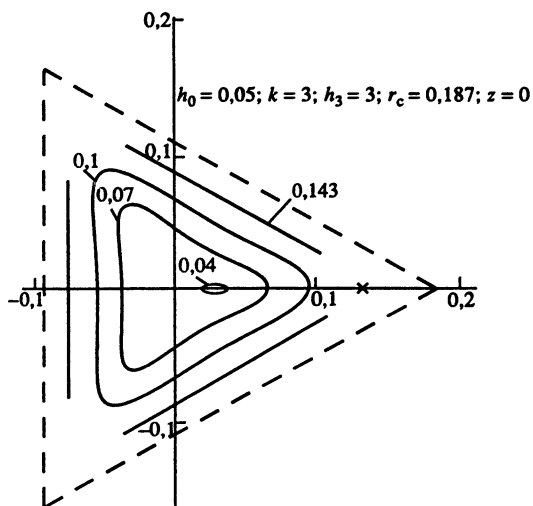


Рис. 4

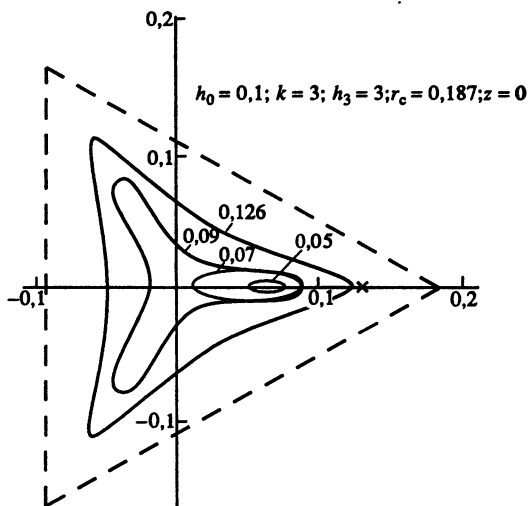


Рис. 5

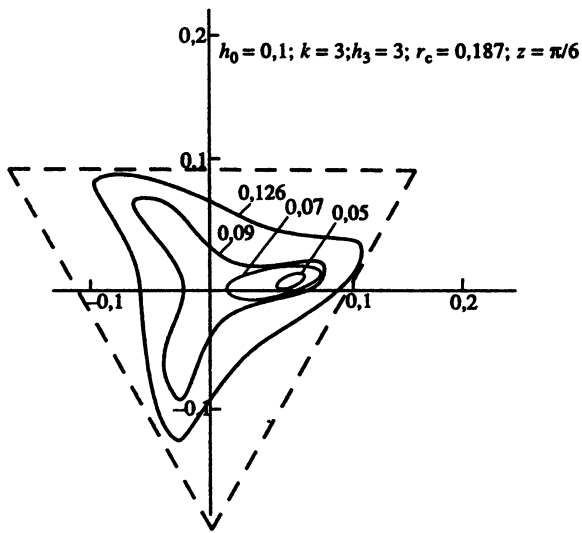


Рис. 6

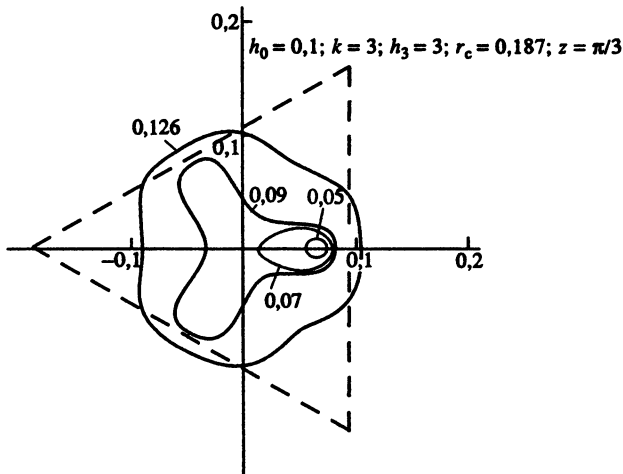


Рис. 7

сепаратрисы появляются замкнутые магнитные трубки, не охватывающие оси z . Наличие таких трубок при $h_0 = 0,3$ не выяснено из-за вычислительных трудностей.

Отметим, что угол прокручивания, в отличие от невозмущенного поля, не стремится к 2π при $r \rightarrow r_c$.

2. $k = 3$.

На рис. 4, 5 и 9 приведены сечения магнитных поверхностей при $h_0 = 0,05$, $h_0 = 0,1$ и $h_0 = 0,125$. Нетрудно видеть что эти поверхности имеют период (по z), равный $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому для выяснения хода магнитной поверхности для случая $h_0 = 0,1$ были найдены также сечения магнитной поверхности плоскостями $z = \frac{\pi}{6}$, $z = \frac{\pi}{3}$ и $z = \frac{\pi}{2}$ (рис. 6–8).

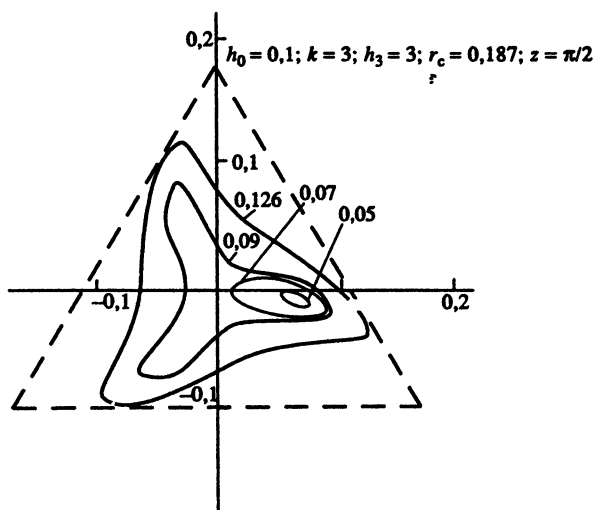


Рис. 8

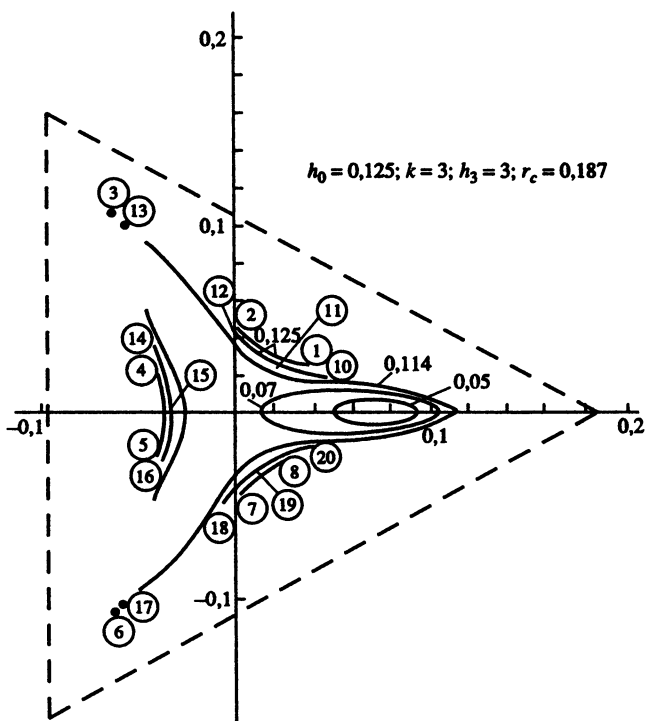


Рис. 9

Как видно из рис. 6–8, форма магнитных поверхностей при $k = 3$ качественно отлична от поверхностей невозмущенного поля (1) и совпадает с формой магнитных поверхностей при $k = 1$ и $h_0 = 0,6$. Именно в этом случае возникает еще одна сепаратриса. Эта сепаратриса имеет форму трилистника и лежит внутри прежней (рис. 10). Из рис. 5–8 видно, что эта новая сепаратриса не вращается вокруг оси, а лишь совершает колебательное движение.

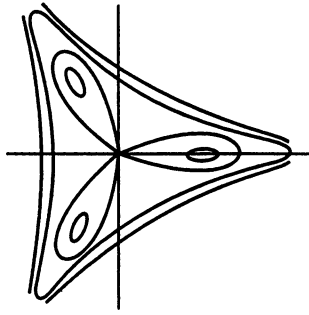


Рис. 10

При больших возмущениях магнитные поверхности, исчезают и точки ложатся на кривые, сечения которых имеют форму спирали (рис. 9 кривые 0,07 и 0,125). На рис. 9 цифрами в кружках обозначены порядковые номера точек кривой, вышедшей из точки $r_0 = 0,125$, $\varphi_0 = 0$. Выдача производилась через 2π .

ЛИТЕРАТУРА

1. Спитцер Л. Исследование на стеллараторе // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 505.
2. Джонсон Д., Оберман С., Кулсруд Р., Фримен Е. // Там же. С. 193.
3. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1956. Т. 30. С. 261.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958.
5. Кораблев Л.В., Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 1153.

КИНЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РАВНОВЕСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ*

ВВЕДЕНИЕ

Существует целый ряд практически интересных плазменных систем, свойства которых не могут быть описаны в рамках магнитной гидродинамики. Сюда относятся, например, системы с остроугольной геометрией, адиабатические ловушки с инъекцией ионов ("Огра", "Астрон"). Впервые задачи такого типа рассматривались Ферраро [1] в связи с проблемой взаимодействия корпускулярных солнечных потоков с магнитным полем Земли. В дальнейшем кинетический расчет равновесных конфигураций для отдельных частных случаев был выполнен рядом авторов [2–5]. В настоящей работе излагается общий подход к этим задачам и рассчитывается несколько конкретных систем.

Известно, что магнитная гидродинамика справедлива в предположении, что ларморовские радиусы как электронов, так и ионов малы по сравнению с масштабом неоднородности поля. Нас, однако, будут интересовать системы, размеры которых порядка одного эффективного ларморовского радиуса электрона или иона. Здесь

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1961. Т. 40. С. 1316–1324.

можно выделить два крайних случая: в одном мы имеем переходную область порядка ларморовского радиуса между плазмой без магнитного поля и магнитным полем, а в другом – вся область, занятая плазмой, имеет размер порядка ларморовского радиуса ("Огра", "Астрон").

В настоящей работе мы ограничимся одномерными задачами, в которых все величины зависят только от одной координаты.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим сначала случай, когда все величины зависят только от одной декартовой координаты x . В пренебрежении столкновениями равновесная плазменная конфигурация описывается системой уравнений Власова:

$$v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1a)$$

$$v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int (f_i - f_e) dv, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} \int \mathbf{v} (f_i - f_e) dv, \quad (1b)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

В том случае, когда магнитное поле не имеет продольной составляющей H_x , система уравнений характеристик (1a)

$$m v_x dv/dx = -e \left(\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right), \quad M v_x dv/dx = -e \left(\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \quad (2)$$

имеет шесть интегралов:

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 2e\Phi/m &= C_{0e}^2, & v_y - eA_y/(mc) &= C_{ye}, & v_z - eA_z/(mc) &= C_{ze}, \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2e\Phi/M &= C_{0i}^2, & v_y + eA_y/(Mc) &= C_{yi}, & v_z + eA_z/(Mc) &= C_{zi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если же $H_x \neq 0$, то система (2) имеет только четыре интеграла. Мы ограничимся случаем, когда $H_x = 0$. Значение полного набора интегралов (3) позволяет написать общее решение системы (1a):

$$\begin{aligned} f_e &= f_e \left(v^2 - 2e\Phi/m, v_y - eA_y/(mc), v_z - eA_z/(mc) \right), \\ f_i &= f_i \left(v^2 + 2e\Phi/M, v_y + eA_y/(Mc), v_z + eA_z/(Mc) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1b), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} &= -4\pi e \int (f_i(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \Phi) - f_e(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \Phi)) dv, \\ \frac{d^2 \mathbf{A}}{dx^2} &= -\frac{4\pi e}{c} \int \mathbf{v} (f_i(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \Phi) - f_e(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \Phi)) dv. \end{aligned} \quad (5)$$

Если f_i и f_e заданы как функции C_0^2, C_y, C_z , то (5) определяет нам зависимость Φ и \mathbf{A}

от x . Эта система уравнений имеет один первый интеграл, выражающий закон сохранения импульса:

$$\frac{H^2 - E^2}{8\pi} = \int v_x^2 (Mf_i + mf_e) dv. \quad (6)$$

Функции $f_{i,e}(C_0^2, C_y, C_z)$ являются произвольными функциями своих аргументов. При конкретных расчетах они должны выбираться из тех или иных физических соображений, например из соображений устойчивости. В дальнейшем мы ограничимся конфигурациями, которые условно будем называть "однолармовскими". Это такие системы, в которых, например, все ионы пересекают некоторую плоскость $x = x_0$, тогда как электроны или также обладают этим свойством ("двухкомпонентные" системы), или же распределены по Больцману ("однокомпонентные" системы). Специфической особенностью таких систем является то, что достаточно задать функцию распределения "небольцмановских" частиц в одной плоскости $x = x_0$, чтобы знать распределение частиц во всем пространстве. Такая ситуация является характерной для систем с инжекцией.

Полагая при $x = x_0$ потенциалы Φ и A равными нулю, получим

$$C_0^2 = v_0^2, \quad C_y = v_{0y}, \quad C_z = v_{0z}. \quad (7)$$

Отсюда следует условие

$$C_0^2 \geq C_y^2 + C_z^2. \quad (8)$$

Это условие определяет область интегрирования по dv в правых частях (5). Подставляя в (8) выражения для C_0^2, C_y, C_z из (3), получим для ионов следующее условие на область интегрирования по скоростям:

$$v_x^2 + 2e\Phi/M \geq e^2 A^2 / (M^2 c^2) + 2evA/(Mc), \quad (9)$$

и аналогично для электронов.

Если система обладает аксиальной симметрией, все величины зависят только от r и при этом $H_r = 0$, то уравнения характеристик системы (1а) также имеют полный набор интегралов:

$$\begin{aligned} v^2 - 2e\Phi/m &= C_{0e}^2, & r(v_\varphi - eA_\varphi/(mc)) &= C_{\varphi e}, & v_z - eA_z/(mc) &= C_{ze}, \\ v^2 + 2e\Phi/M &= C_{0i}^2, & r(v_\varphi + eA_\varphi/(Mc)) &= C_{\varphi i}, & v_z + eA_z/(Mc) &= C_{zi}, \end{aligned} \quad (10)$$

а уравнения (5) заменяются на

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} &= -4\pi e \int (f_i - f_e) dv, \\ \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r A_\varphi &= -\frac{4\pi e}{c} \int v_\varphi (f_i - f_e) dv, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr} &= -\frac{4\pi e}{c} \int v_z (f_i - f_e) dv. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение систем (5) и (11) существенно упрощается, если плазму можно считать квазинейтральной. В этом случае из условия $n_i = n_e$ вытекает связь Φ и A , что позволяет ограничиться рассмотрением уравнений только для A .

2. ПЛОСКИЕ "ОДНОКОМПОНЕНТНЫЕ" СИСТЕМЫ

Как отмечалось выше, под "однокомпонентными" системами мы будем понимать такие системы, где ток создается только одним сортом частиц, тогда как вторые просто служат для компенсации заряда и распределены по Больцману ($n = n_0 \exp(-Ze\Phi/T)$). Ниже мы увидим, что средняя энергия этих "больцмановских" частиц должна быть много меньше энергии "токонесущих" частиц, если мы хотим вообще пренебречь влиянием электрического поля на движение "токонесущих" частиц.

А. Рассмотрим нормальное падение односкоростного пучка ионов на магнитное поле. Пусть при $x = -\infty$ все ионы имеют одну и ту же скорость v_0 , направленную вдоль оси x (рис. 1), а магнитное и электрическое поля отсутствуют ($\Phi = 0, A = 0$). При $x = +\infty$ магнитное поле однородно, направлено по оси z и равно H_0 , а электрическое поле и плотности ионов и электронов равны нулю. Подставляя в (5) функцию распределения ионов

$$f_i = 2v_0 n_0 \delta(v^2 + 2e\Phi/M - v_0^2) \delta(v_y + eA/(Mc)) \delta(v_z), \quad (12)$$

получим уравнения для потенциалов

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi e n_0}{c} \frac{eA}{Mc} \left[1 - \frac{2e\Phi}{M v_0^2} - \left(\frac{eA}{Mc} \right)^2 \frac{1}{v_0^2} \right]^{-1/2},$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -4\pi e n_0 \left\{ \left[1 - \frac{2e\Phi}{M v_0^2} - \left(\frac{eA}{Mc} \right)^2 \frac{1}{v_0^2} \right]^{-1/2} - \exp(e\Phi/T) \right\}. \quad (13)$$

Здесь n_0 – концентрация частиц при $x = -\infty$, $A \equiv A_y, A_z \equiv 0, T$ – электронная температура в энергетических единицах.

Пусть в точке $x = 0$ подкоренное выражение (13) обращается в нуль. Тогда в этой точке будет происходить остановка ионов. Следовательно, система (13) пригодна при $x < 0$, тогда как при $x > 0$

$$d^2 \Phi/dx^2 = 4\pi e n_0 \exp(e\Phi/T), \quad d^2 A/dx^2 = 0. \quad (14)$$

Из (13) и (14) и граничных условий можно заключить, что качественно ход потенциалов A и Φ будет подобен изображенному на рис. 2. Система (14) в области $x > 0$ интегрируется при указанных выше граничных условиях, и мы получаем

$$A = A_0 + H_0 x, \quad x = D_e \left[\exp(-e\Phi/2T) - \exp(-e\Phi_0/2T) \right]. \quad (15)$$

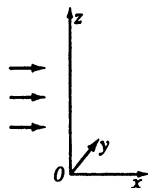


Рис. 1

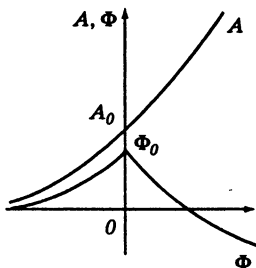


Рис. 2

Здесь A_0 и Φ_0 – значения потенциалов при $x = 0$, а $D_e = \sqrt{T/(4\pi e^2 n)}$ – электронный дебаевский радиус. Таким образом, эффективная толщина электронного слоя, выступающего в область $x > 0$, как и следовало ожидать, порядка дебаевского радиуса.

В области $x < 0$ поля описываются системой (13), которую удобно переписать в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} = \frac{a}{\sqrt{1 - \alpha\psi - a^2}}, \quad \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = -\frac{Mc^2}{T} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha\psi - a^2}} - e^\psi \right). \quad (16)$$

Здесь

$$\psi = e\Phi/T, \quad a = eA/(Mc v_{0i}), \quad \xi = x/D_{ic}, \quad \alpha = 2T/(M v_{0i}^2),$$

$$D_{ic} = c/\omega_{0i}, \quad \omega_{0i}^2 = 4\pi e^2 n_0/M.$$

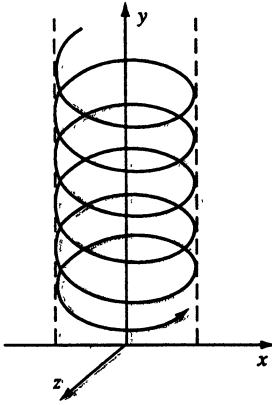


Рис. 3

Если $Mc^2/T \gg 1$, т.е. энергия электронов существенно меньше собственной энергии ионов, то плазму можно считать квазинейтральной всюду, за исключением области вблизи остановки ионов, ширина которой должна быть порядка электронного дебаевского радиуса. Из условия квазинейтральности вытекает уравнение, связывающее ψ и A :

$$e^\psi = 1/\sqrt{1 - \alpha\psi - a^2}. \quad (17)$$

Если $\alpha \ll 1$, что и было предложено нами в самом начале, то система уравнений для потенциалов принимает вид

$$d^2 a/d\xi^2 = a/\sqrt{1 - a^2}, \quad (18a)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} \ln(1 - a^2). \quad (18b)$$

Уравнение (18a) имеет интеграл

$$\frac{1}{2} (da/d\xi^2)^2 = \text{const} - \sqrt{1 - a^2}. \quad (19)$$

При граничных условиях $a|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$, $\dot{a}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$ постоянная интегрирования оказывается равной единице. Интегрируя при этом условии (19) еще раз, получим

$$\xi = \ln \left| \text{tg} \frac{\chi}{4} / \text{tg} \frac{\pi}{8} \right| + 2 \left(\cos \frac{\chi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right), \quad \sin \chi = a, \quad (20)$$

Аналогичный закон был получен в свое время Ферраро [1], но в отличие от него, рассматривавшего двухкомпонентную плазму, у нас масштабом переходного слоя является ионный, а не электронный ларморовский радиус.

Б. Рассмотрим плазменную систему, изображенную на рис. 3, которую естественно назвать "одноларморовским" слоем. По-прежнему будем считать, что все ионы имеют одинаковую скорость, и при $x = 0$ эта скорость направлена вдоль оси x . Электроны, компенсирующие заряд, считаем холодными.

Эта плазменная система описывается уравнениями (18), но интеграл (19) теперь примет вид

$$\dot{a}^2 = h_1^2 + 2 \left(1 - \sqrt{1 - a^2} \right). \quad (21)$$

Здесь

$$h_1 = H_1 e D_{ic} / (M c v_{oi}),$$

а H_1 – напряженность магнитного поля при $x = 0$. Интегрируя (21), получим закон изменения поля:

$$\xi = -4k^{-2} [E(k) - E(k, \pi/2 - \chi)] + 2(1 + 2/k^2) [K(k) - F(k, \pi/2 - \chi)], \quad (22)$$

где $k^2 = 4/(4 + h_1^2)$, $a = \sin \chi$, а $E(k)$, $E(k, \varphi)$, $K(k)$ и $F(k, \varphi)$ – эллиптические интегралы. Случай $k = 1$ мы рассматривали выше. Случай $k \rightarrow 1$, соответствующий $h_1 \rightarrow \infty$, может быть легко рассчитан путем разложения (21) по степеням h_1^{-1} :

$$h = h_1 + h_1^{-1} \left(1 - \sqrt{1 - h_1^2 \xi^2} \right). \quad (23)$$

В. Рассмотрим границу между плазмой и полем в случае ионов, распределенных при $x = -\infty$ по Максвеллу, при наличии холодных электронов, компенсирующих объемный заряд (см. рис. 1). Пусть функция распределения ионов будет¹

$$f = n_0 (\pi c_T^2)^{-3/2} \exp \left\{ -v^2 / c_T^2 \right\}. \quad (24)$$

Здесь n_0 – концентрация частиц при $x \rightarrow -\infty$, c_T – тепловая скорость. Подставив (24) в (5) и вводя безразмерные переменные

$$a = eA / (M c c_T), \quad \eta_x = v_x / c_T, \quad \eta_y = v_y / c_T, \quad \xi^2 = x^2 4e^2 n_0 / (M c_T^2),$$

после интегрирования по v_z получаем уравнение

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} = \iint_G \eta_y \exp \left[-(\eta_x^2 + \eta_y^2) \right] d\eta_x d\eta_y. \quad (25)$$

Область интегрирования G определяется соотношением (9), которое в безразмерной форме принимает в нашем случае вид (рис. 4)

$$\eta_x^2 \geq a^2 + 2\eta_y a. \quad (26)$$

Интегрируя правую часть (25) по η_y , получим

$$\ddot{a} = \frac{a}{2} \int_0^\infty \exp \left[-a^2 (1 + \xi^2)^2 / 4 \right] d\xi. \quad (27)$$

Отсюда, используя граничное условие $a = 0$, $\dot{a} = 0$ при $x \rightarrow -\infty$, получаем

$$\dot{a}^2 = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^\infty \frac{\exp \left[-a^2 (1 + \xi^2)^2 / 4 \right]}{(1 + \xi^2)^2} d\xi. \quad (28)$$

Интегрируя еще раз, найдем явную зависимость $a = a(\xi)$:

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a dx \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp \left[-x^2 (1 + \xi^2)^2 / 4 \right] d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \right\}^{-1/2}. \quad (29)$$

¹ Считая электроны холодными, мы в первом приближении можем считать электрическое поле полностью отсутствующим.

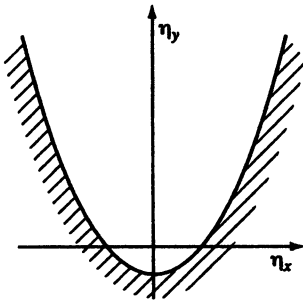


Рис. 4

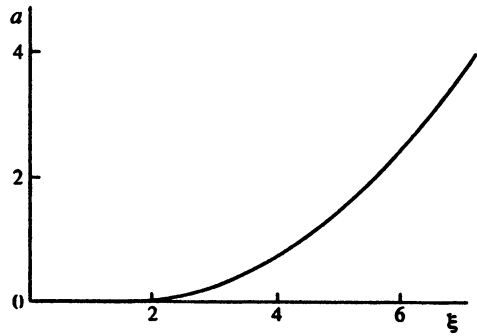


Рис. 5

Выражение в правой части (29) является универсальной функцией a . При выборе в (29) постоянной интегрирования учтено, что, при малых a поле растет с координатой по степенному закону, и точка появления поля принята за начало координат. Вычисляя (29) при малых ξ , получим

$$a \approx 0,0028 \xi^4, \quad (30)$$

тогда как при больших ξ

$$a \approx \xi \sqrt{\pi/2}. \quad (31)$$

График зависимости (29) изображен на рис. 5.

3. ДВИЖЕНИЕ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

А. Пусть плазменный цилиндр образован монохроматическими ($v = v_0$) ионами и холодными электронами, распределенными по Максвеллу ($T_e \ll Mv_i^2/2$). Пусть далее $H_\phi = H_r = 0$, $H_z \neq 0$ и все величины зависят только от r . Если к тому же предположить, что $v_{iz} = 0$, то траектории движения ионов в такой системе будут иметь вид, изображенный на рис. 6, а или рис. 6, б, в зависимости от того, будет ли ларморовский радиус больше радиуса цилиндра или меньше его. При сделанных предположениях уравнение (11) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r A_\phi \right) = - \frac{4\pi Q}{cr} \left(\frac{P}{Mr} - \frac{eA_\phi}{Mc} \right) \left[v_0^2 - \left(\frac{P}{Mr} - \frac{eA_\phi}{Mc} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (32)$$

Здесь Q – радиальный поток частиц, P – обобщенный импульс:

$$Q = enr v_r = \text{const}, \quad P = r(Mv_\phi + eA_\phi/c) = \text{const}. \quad (33)$$

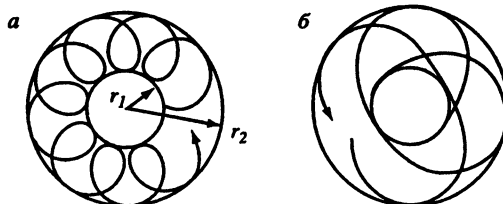


Рис. 6

Вводя безразмерные величины

$$a = eA_\phi / (Mc v_0), \quad p = P / (M v_0), \quad (34)$$

получим для a уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dra}{dr} \right) = - \frac{4\pi e Q}{Mc^2 v_0} \frac{p/r - a}{r \sqrt{1 - (p/r - a)^2}}. \quad (35)$$

Магнитное поле внутри цилиндрической трубы с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 определяется уравнением (35), где r_1 и r_2 – корни подкоренного выражения в (35). Поле вне r_2 и внутри r_1 является однородным. Постоянная Q при известном a может быть выражена через число частиц N в сечении цилиндра:

$$N = \int_{r_1}^{r_2} n 2\pi r dr.$$

Используя (33), получаем

$$N = \frac{2\pi Q}{c v_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - (p/r - a)^2}}. \quad (36)$$

Если ток, создаваемый ионами, мал, то уравнение (35) можно решить методом последовательных приближений. В нулевом приближении поле однородно и $A_\phi = H_0 r / 2$. Величина Q при этом приближенно равна

$$Q = e^2 H_0 N / (2\pi^2 Mc). \quad (37)$$

Подставляя нулевое приближение для A_ϕ в правую часть (35) и интегрируя, получим с учетом (37) формулу для магнитного поля H :

$$H = H_0 \left(1 - \frac{2e^2 N}{\pi Mc^2} \arccos \frac{r_1 r_2 / r + r}{r_1 + r_2} \right), \quad r_1 \leq r \leq r_2. \quad (38)$$

Для случая, изображенного на рис. 6, *а*, в формуле (38) следует считать $r_1 > 0$, тогда как для случая, изображенного на рис. 6, *б*, вместо r_1 нужно подставить $-r_1$. При $r_1, r_2 \rightarrow \infty$ формула (38) переходит в (23). График функции (38) изображен на рис. 7. Обращает на себя внимание своеобразное изменение функции $H(r, r_1, r_2)$ при переходе через r_1 .

Аналогичный результат был получен Тонксом [5] путем численного интегрирования уравнения (35). Им рассмотрены случаи как редкой, так и плотной плазмы. В дальнейшем Тонкс [6] обобщил эти результаты на случай наличия разброса по импульсам P .

Выражение (38) показывает, что параметром малости указанного выше метода последовательных приближений является так называемый "погонный протон" $\Pi = e^2 N / (Mc^2)$. Не представляет большого труда получить в (38) члены разложения $\sim \Pi^2$ и выше.

Рассмотрим теперь движение частиц в цилиндрическом столбе. Уравнение движения имеет вид

$$d\phi/dr = v_\phi / (r v_r).$$

С другой стороны, уравнение для напряженности поля ($dH/dr = -4\pi j_\phi / c$) с исполь-

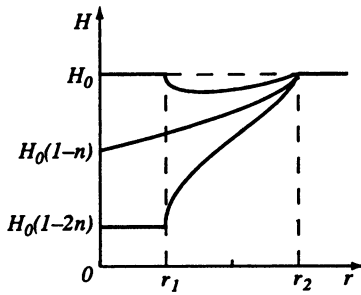


Рис. 7

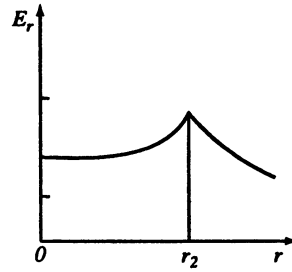


Рис. 8

зованием (33) может быть представлено в виде

$$dH/dr = -(4\pi Q/c) [v_\phi / (r v_r)].$$

Отсюда следует, что

$$H = -(4\pi Q/c)\phi + \text{const.} \quad (39)$$

Учитывая (39) и график на рис. 7, мы видим, что при $r_1 > 0$ (рис. 6, а) частицы в первом приближении не обходят ось системы, тогда как при $r_1 < 0$ (рис. 6, б) они обходят эту ось.

Б. Если плазма очень редкая, а магнитное поле достаточно большое, то предыдущие расчеты можно применить к облаку быстрых частиц при отсутствии компенсирующих электронов. Согласно (33) распределение плотности выражается через векторный потенциал соотношением

$$n = \frac{Q}{e v_0} \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{p}{r} - a \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (40)$$

Полагая в нулевом приближении магнитное поле однородным, $a = \alpha r$, запишем уравнение $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e n$ в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_r = \frac{4\pi Q}{r v_0} \left[1 - \left(\frac{p}{r} - a \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (41)$$

Интегрируя и подставляя значения Q , p и α через r_1 и r_2 , получаем следующую окончательную формулу для распределения электрического поля внутри кольцевой области:

$$E_r = \frac{2eN}{\pi r} \arccos \cos \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (42)$$

Поле внутри кольца $r < r_1$ равно нулю, а поле вне цилиндра равно $E_r = 2eN/r$. Распределение электрического поля в случае $r_1 = 0$ выражается формулой

$$E_r = \frac{4eN}{\pi r_2} \frac{\arcsin (r/r_2)}{r/r_2} \quad (43)$$

и изображено на рис. 8.

4. "ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ" СИСТЕМЫ

В качестве примера "двухкомпонентной" системы мы рассмотрим нормальное падение на магнитное поле односкоростных потоков ионов и электронов. Скорости ионов и электронов на бесконечности считаем, вообще говоря, различными² и равными соответственно v_{0i} и v_{0e} . Уравнения (5) после подстановки функций распределения

$$\begin{aligned} f_i &= 2v_{0i}n_0\delta(v^2 + 2e\Phi/M - v_{0i}^2)\delta(v_y + eA/(Mc))\delta(v_z), \\ f_e &= 2v_{0e}n_0\delta(v^2 - 2e\Phi/m - v_{0e}^2)\delta(v_y - eA/(mc))\delta(v_z) \end{aligned} \quad (44)$$

принимают в области совместного движения частиц вид

$$\begin{aligned} d^2\psi/d\xi^2 &= (c^2/v_{0e}^2)\left[(1 + \psi - a^2)^{-1/2} - (1 - \theta\psi - \mu\theta a^2)^{-1/2}\right], \\ d^2a/d\xi^2 &= a\left[(1 + \psi - a^2)^{-1/2} + \sqrt{\mu\theta}(1 - \theta\psi - \mu\theta a^2)^{-1/2}\right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} eA/(m v_{0e}c) &= a, \quad 2e\Phi/(m v_{0e}^2) = \psi, \quad \xi^2 = x^2 4\pi e^2 n_0 / (mc^2), \quad \mu = m/M, \\ \theta &= m v_{0e}^2 / (M v_{0i}^2). \end{aligned}$$

Остановка ионов и электронов происходит соответственно при

$$1 + \psi - a^2 = 0, \quad 1 - \theta\psi - \mu\theta a^2 = 0. \quad (46)$$

Если $\mu\theta < 1$, то первыми останавливаются электроны, а при $\mu\theta > 1$ – ионы.

Если плазма нерелятивистская, то $c^2/v_{0e}^2 \gg 1$ и при решении системы (47) ее можно считать квазинейтральной³, т.е. $n_i = n_e$. Тогда первое уравнение (45) дает связь ψ и a :

$$\psi = (1 - \mu\theta)a^2 / (1 + \theta). \quad (47)$$

Подставляя это значение ψ во второе уравнение (45), получим

$$d^2a_1/d\xi_1^2 = a_1/\sqrt{1 - a_1^2}, \quad (48)$$

где

$$a_1 = a[(1 + \mu)\theta/(1 + \theta)]^{1/2}, \quad \xi_1 = \xi[1 + \sqrt{\mu\theta}]^{1/2}. \quad (49)$$

Уравнение (48) тождественно с (18). Это приводит, в частности, к выводу, что толщина переходного слоя равна

$$\delta \sim [mc/(4\pi e^2 n_0)] [1 + \sqrt{\mu\theta}]^{1/2}.$$

Величина δ порядка электронного ларморовского радиуса в поле H_0 , рассчитанного по средней энергии ионов и электронов.

² Случай $v_{0e} = v_{0i}$ был рассмотрен Ферраро [1].

³ Это, разумеется, справедливо, вообще говоря, лишь при давлении порядка $H^2/8\pi$ и может быть несправедливо, если оно много меньше $H^2/8\pi$.

Аналогичные выводы можно сделать и относительно "слоя" типа, рассмотренного в разд. 2, п. В. И здесь толщина слоя при наличии квазинейтральности будет порядка электронного ларморовского радиуса. Граница между плазмой и полем при наличии максвелловского распределения по-прежнему масштаба электронного ларморовского радиуса, но конкретная картина переходного слоя не выражается в простой аналитической форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ferraro V.G.* // Geophys. Res. 1952. Vol. 57. P. 15.
2. *Фирсов О.Б.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 327.
3. *Трубников Б.А.* // Там же. Т. 4. С. 309.
4. *Сагдеев Р.З.* // Там же. Т. 3. С. 346.
5. *Тонкс Л.* // Докл. на II Всесоюз. конф. по газовой электронике. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
6. *Tonks L.* // Phys. Rev. 1960. Vol. 118. P. 2.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

1. В работе [1] была получена следующая система магнитогидродинамических уравнений для стационарных винтовых течений идеально проводящей несжимаемой жидкости в магнитном поле:

$$s\Delta^*\xi + \frac{s'}{2\beta}(\nabla\xi)^2 + \frac{1}{2\beta}(a^2s)' + \frac{\beta}{2}(b^2s)' - \frac{2\alpha}{\beta^2}as + u' = 0, \quad (1)$$

$$s = \psi_0'^2 - \psi'^2, \quad p + \frac{v^2}{2} = -u - s\beta b^2, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_\phi \\ H_\phi \end{pmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_r \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} v_\phi \\ H_\phi \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} + \beta b \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix}.$$

Здесь r, ϕ, z – цилиндрические координаты, $\theta = \phi - \alpha z$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, $\Delta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, L – шаг винта, v – скорость жидкости, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi}$, \mathbf{B} – магнитное поле, p – давление, а плотность ρ принята равной единице. Величины ψ_0, ψ, a, b и u являются произвольными функциями, зависящими только от ξ , и штрих означает дифференцирование по ξ . Уравнение $\xi(r, \theta) = \text{const}$ описывает семейство магнитных поверхностей, обладающих винтовой симметрией.

Волны установившегося вида, рассматриваемые в движущейся системе координат, являются частным случаем стационарных течений. Уравнение для винтовых волн в круглом плазменном цилиндре выделяется из уравнения (1) подходящим выбором функций s, a, b и u , которые определяются равновесным распределением скорости $v(r)$ и магнитного поля $\mathbf{B}(r)$ и выбираются так, чтобы уравнение (1) наряду с винтовыми решениями имело бы также решение $\xi = \xi(r)$, описывающее невозмущенное состояние с цилиндрическими магнитными поверхностями. При выводе волнового уравнения используется инвариантность функций от ξ относительно деформаций магнитных поверхностей, т.е. перехода от невозмущенного к возмущенному состоянию. Полученное таким образом волновое уравнение, вообще говоря, нелинейно.

Если описывать магнитное поле вне плазмы также соответствующей функцией тока $\psi_e(r, \theta) = A_z + \alpha r A_\phi$, то граничные условия касательности силовых линий запишутся в виде $\xi|_\Sigma = \text{const}$, $\psi_e|_\Sigma = \text{const}$. Третье граничное условие для ξ и ψ_e , выте-

* Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 1071–1074.

кающее из баланса давлений на свободной поверхности плазмы $2p + H^2 = H_e^2$, всегда нелинейно.

Мы приведем здесь только линеаризованные уравнения и граничные условия для волн в плазменной струе. Если представить ξ и ψ_e в виде

$$\xi = \frac{r^2}{2} + \tilde{\xi}, \quad \psi_e = H_{ze} \frac{\alpha r^2}{2} - H_{\varphi e} r \ln r + \tilde{\psi}_e,$$

где $\tilde{\xi}_e = f_m(r)e^{im\theta}$, $\tilde{\psi}_e = f_{me}(r)e^{im\theta}$, то уравнение для f_{me} и линеаризованное (по $\tilde{\xi}$) уравнение для f_m примут вид

$$\left(\frac{r}{\beta} f'_m \right)' - \frac{m^2}{r} f_m = 0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{r}{\beta} f'_m \right)' + \left[-\frac{m^2 s}{r} + \frac{4\alpha^2 r a_1^2}{\beta s} + \left(\frac{2a_1}{\beta} + v_\Phi^2 - h_\Phi^2 \right)' \right] f_m = 0. \quad (5)$$

Граничное условие, которое должно выполняться на невозмущенной границе плазменного цилиндра $r = R$, получается с помощью линеаризации по $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\psi}_e$:

$$s \frac{R f'_m}{f_m} + J_e^2 \frac{R f'_{me}}{f_{me}} + \beta \left(\frac{2a_1}{2} + v_\Phi^2 - h_\Phi^2 + h_{\varphi e}^2 \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь $s = J_0^2 - J^2$; $a_1 = J_0 v_\Phi - J h_\Phi$; $J_0 = \alpha(v_z + v_\Phi) - v_\Phi$; $J = \alpha H_z - h_\Phi$; $r v_\Phi = v_\Phi$; $r h_\Phi = H_\Phi$; $v(r)$ и $H(r)$ являются заданными (равновесными) функциями радиуса; $v_\Phi = \omega/k$ – фазовая скорость волны. Параметр α связан с волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ соотношением $\alpha m = k$. Аналогичные уравнения, описывающие распространение линейных волн в покоящемся плазменном цилиндре ($v_z = v_\Phi = 0$), получены в работах [2, 3].

2. В случае вращающегося как целое плазменного цилиндра ($v_\Phi = \text{const}$) с однородным продольным током ($h_\Phi = \text{const}$) и однородным продольным магнитным полем ($H_z = \text{const}$) уравнение (5) является точным (независимо от амплитуды возмущения) и задача о стационарных винтовых волнах в таком плазменном цилиндре, граничащем с идеально проводящей стенкой, может быть решена точно. Уравнение (5) при этом имеет решения $f_m(r) \sim \varepsilon J_m(\kappa r) - \alpha r \kappa J'_m(\kappa r)$, где $J_m(x)$ – бесселева функция, $\kappa^2 = \varepsilon^2 - \alpha^2 m^2$, $\varepsilon = 2\alpha a_1/s$. Обозначая через $i_n = (\kappa R)_n$ корни¹ $f_m(R)$, из граничного условия $f_m(R) = 0$ найдем

$$v_\Phi = v_\Phi \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{R}{j_n} \right) \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{J^2 - \frac{2\alpha R h_\Phi}{j_n} + \frac{\alpha^2 R^2 v_\Phi^2}{j_n^2}}, \quad (7)$$

где $j_n^2 = i_n^2 + \alpha^2 m^2 R^2$.

Если подкоренное выражение отрицательно, фазовая скорость содержит как

¹ Для длинных волн ($kR \ll 1$) i_n близки к корням $J_m(x)$.

действительную, так и мнимую части, т.е. имеет место неустойчивость колебательного типа [4]. Условием устойчивости является $v_\phi^2 \geq h_\phi^2$.

В рассматриваемой равновесной плазменной конфигурации давление распределено по параболическому закону. Из условия равновесия

$$(p + H^2/2)' = r(v_\phi^2 - h_\phi^2) \quad (8)$$

вытекает возможность спадающего по радиусу давления, если $v_\phi^2 < 2h_\phi^2$. Таким образом, при

$$B_\phi^2 \leq 4\pi r v_\phi^2 < 2B_\phi^2 \quad (9)$$

плазменный цилиндр с давлением (а следовательно, и температурой), обращаемся в нуль при $r = R$, устойчив относительно произвольных винтовых возмущений.

3. Рассмотрим теперь случай произвольного распределения магнитного поля $\mathbf{B}(r)$ и предположим, что $v \parallel \mathbf{B}$. Избавляясь от члена с первой производной с помощью подстановки $F = \sqrt{rs/\beta} f_m$ и разлагая уравнение (5) в окрестности точки $r = r_s$, где $J = 0$, получим

$$\frac{d^2 F}{d\zeta^2} + \left[-E - \frac{N}{(1 + \zeta^2)^2} + \frac{M}{1 + \zeta^2} \right] F = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\zeta = \frac{r - r_s}{\gamma} + i \frac{J'_0}{J'}, \quad \gamma^2 = - \left(\frac{\alpha v_\phi J'}{J'^2 - J_0'^2} \right)^2, \quad E = \frac{m^2}{r_s^2} \gamma^2,$$

$$N = 1 + 4\alpha^2 h_\phi^2 / J'^2, \quad M = - \frac{2\alpha^2 (p + v^2/2)'}{r_s (J'^2 - J_0'^2)}.$$

При выводе (10) предполагалось, что v_ϕ мнимо и достаточно мало по абсолютной величине, $m \gg 1$, и использовано уравнение равновесия (8). Если уравнение (10) имеет локализованное решение при $E > 0$, то плазменный цилиндр неустойчив ($v_\phi^2 < 0$) независимо от граничных условий. Для действительных $\zeta = x$ условием существования собственных значений $E > 0$ является $M > 1/4$ [5]. Локальное решение на действительной оси x можно аналитически продолжить и в комплексную плоскость ζ . Таким образом, при $M > 1/4$ для $\zeta = x + iJ'_0/J'$ также существуют локальные решения, если $|J'_0| < |J'|$, т.е. если параллельный сдвиг оси меньше расстояния до особых точек $\pm i$. Последнее условие сводится к требованию $4\pi r v^2 < B^2$. В развернутой форме критерий устойчивости $M < 1/4$ имеет вид

$$\frac{8\pi}{B_z^2} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} \right)' + \frac{r}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 \left(1 - \frac{4\pi r v^2}{B^2} \right) > 0, \quad (11)$$

где $\mu = B_\phi / (r B_z)$. При $v = 0$ (11) переходит в критерий Сайдема [6], а для $B_\phi \sim r$, $B_z = \text{const}$ – в полученное выше условие (9).

4. Для аксиально-симметричных колебаний ($m = 0$) вращающегося плазменного цилиндра без продольного поля ($B_z = 0$) согласно (5) имеем уравнение

$$\left(\frac{1}{r} f_0'\right)' + \left\{ -\frac{k^2}{r} + \frac{k^2}{\omega^2} \left[\frac{(r^4 v_\phi^2)'}{r^4} - (h_\phi^2)' \right] \right\} f_0 = 0. \quad (12)$$

Из общей теории Штурма–Лиувилля [7] следует, что необходимым и достаточным условием существования $\omega^2 > 0$ для краевой задачи $f_0(0) = f_0(R) = 0$ является положительность выражения в квадратных скобках. Отсюда получаем условие устойчивости

$$\left(\rho r^2 v_\phi^2\right)' - \frac{r^4}{4\pi} \left(\frac{B_\phi^2}{r^2}\right)' > 0, \quad (13)$$

которое при $B_\phi = 0$ переходит в критерий Рэлея [8], а при $B_\phi \sim r$, $v_\phi \sim r$ в условие $v_\phi^2 > 0$, вытекающее из решения точной задачи в п. 2, если $B_z = 0$. Критерий (13), так же как и (11), имеет локальный характер и может быть установлен на основе анализа баланса сил [4].

5. Условие (11) выводится из уравнения (5) без учета граничного условия (6). С другой стороны, из (6) в случае непрерывности полей B_z и B_ϕ на поверхности плазменного цилиндра, граничащего с внешним магнитным полем, можно получить достаточное условие неустойчивости без конкретизации решений (5). Если на границе цилиндра $r = R$ величины J и v_ϕ малы, то, пренебрегая их квадратами, получим из (6)

$$J_0 = -\frac{v_\phi f_m}{R f_m'} \pm \sqrt{\frac{2h_\phi J f_m}{R f_m'}}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что границей области устойчивости для моды m является $J = 0$ или

$$B_z = \frac{m B_\phi}{k R}. \quad (15)$$

Для плазменного цилиндра с однородным продольным полем и однородным током условие возникновения неустойчивости (15) было получено в работе [9], однако в этом частном случае неустойчивость следует и из критерия Сайдема. Рассмотренная поверхностная неустойчивость возникает тогда, когда винтовое возмущение поверхности плазмы направлено вдоль силовых линий магнитного поля. Она связана только с существованием свободной границы плазменного цилиндра и имеет место независимо от распределения внутреннего магнитного поля и, следовательно, от выполнения критерия Сайдема.

Отметим в заключение, что рассмотрение нелинейных винтовых волн показывает, что при приближении к границе области устойчивости (15) имеется тенденция к заострению гребней волн на поверхности плазменного цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 4.
2. Tayler R.J. // Proc. Phys. Soc. 1958. Vol. 70B. P. 1049.
3. Вандакуров Ю.В., Лурье К.А. // Журн. техн. физики. 1959. Т. 29. С. 9.
4. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Успехи физ. наук. 1961. Т. 73. С. 4.

5. Кадомцев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37, № 12. С. 6.
6. Сайдём В. Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.
7. Сансоне Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 2.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. Шафранов В.Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 61.

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА*

В настоящей работе исследуются гидромагнитные волны установившегося вида, распространяющиеся по поверхности плазменного цилиндра, находящегося во внешнем магнитном поле и помещенного внутри идеально проводящего цилиндра ("кожуха"). Задача о волнах конечной амплитуды, вызывающих конечные деформации границы плазмы с полем, представляет интерес с точки зрения проблемы устойчивости плазменных конфигураций. Рассмотрение нелинейных колебаний плазменного цилиндра позволяет определить зависимость границы области устойчивости от амплитуды колебаний. Кроме того, при этом выявляются области существования и несуществования волн заданного типа, переход между которыми не связан с обращением в нуль фазовой скорости волны. Мы ограничимся здесь рассмотрением аксиально-симметричных волн, считая плазму идеально проводящей и несжимаемой. Кроме того, будем предполагать, что характерная длина волны велика по сравнению с радиусом кожуха. Основное внимание уделяется одиночным возмущениям ("уединенным волнам"). Однако основные характеристики уединенных волн в общих чертах свойственны также и периодическим волнам с достаточно большой длиной волны, поэтому последние рассмотрены более кратко.

1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОФИЛЯ ВОЛНЫ

Рассмотрим плазменный цилиндр, расположенный внутри коаксиального с ним идеально проводящего кожуха (рис. 1). Пусть в невозмущенном состоянии магнитное поле внутри плазмы H_{zi} и внешнее магнитное поле H_{ze} однородны и, кроме того, имеется продольный поверхностный ток, который создает вне плазменного шнура поле $H_{\phi a} \frac{a}{r}$. Для отыскания волн установившегося вида перейдем к системе координат, движущейся вдоль оси z цилиндра со скоростью, равной фазовой скорости волны. В этой системе координат мы приходим к задаче о стационарном течении жидкости. Поле v скоростей жидкости и магнитные поля \mathbf{H}_i и \mathbf{H}_e внутри и вне плазменного шнура будем описывать с помощью функций тока ψ_0 , ψ_i и ψ_e , определенных соотношениями

$$rv_z = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad rv_r = -\frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \quad rH_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rH_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1)$$

обеспечивающими обращение в нуль $\text{div } v$ и $\text{div } \mathbf{H}$. Простейшими течениями являются безвихревые ($\text{rot } v = \text{rot } \mathbf{H} = 0$). При этом все введенные функции ψ_0 , ψ_i и ψ_e

* Журн. техн. физики. 1962. Т. 32. С. 934–947.

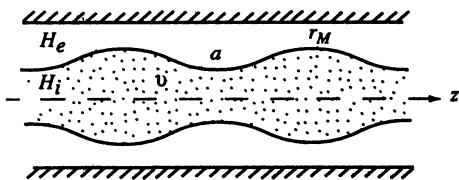


Рис. 1

удовлетворяют уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

причем ψ_0 и ψ_i пропорциональны друг другу: $\psi_0 = \chi \psi_i$, $\chi = \text{const}$ [1].

Примем радиус кожуха равным единице.

Для определения поверхностей $\psi_{0,i,e} = \text{const}$,

на которых лежат линии скорости жидкости и магнитные силовые линии, используем условие $\lambda \gg 1$, т.е. будем считать, что $\psi = \psi(r, \mu z) \equiv \psi(r, \zeta)$. Здесь $\mu \sim \frac{1}{\lambda}$ – малый параметр. Решение уравнения (2), переписанного в переменных r и ζ , ищем в виде разложения по малому параметру μ^2 : $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$, где $\psi^{(1)}$ порядка μ^2 и т.д. Методом последовательных приближений находим, что

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= f(z)r^2 + f_1(z), \\ \psi^{(1)} &= -f'' \frac{r^4}{8} - f_1'' \frac{r^2}{4} (\ln r^2 - 1) + f_2 \frac{r^2}{2} + f_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где f_i – произвольные функции z .

Для определения линий тока жидкости (или магнитных силовых линий в нуле поля H_i) необходимо рассматривать разложение (3) в области, включающей ось z . При этом функции f_1 и f_3 необходимо положить равными нулю из условия конечности скорости (или магнитного поля) при $r = 0$. Кроме того, можно положить $f_2 = 0$, если потребовать, чтобы скорость на оси полностью описывалась функцией $f(z) \equiv f_0(z)$; таким образом, мы получаем

$$\psi_0(r, z) = f_0(z)r^2 - f_0''(z) \frac{r^4}{8} + \dots \quad (4)$$

Здесь $f_0(z)$ описывает скорость жидкости вдоль линии тока $r = 0$, а именно: $2f_0(z) = v_z|_{r=0}$.

Для определения магнитных поверхностей в внешнем поле необходимо потребовать, чтобы цилиндр $r = 1$ был магнитной поверхностью, т.е. $H_r|_{r=1} = 0$. В этом

случае $f_1 = -f$ и также $f_2 = \frac{1}{2} f''$ из условия, что все поле при $r = 1$ описывается

функцией f . Для $f_3 = \frac{1}{8} f''$ из граничного условия при $r = 1$, и, следовательно, полу-

чаем

$$\psi_e(r, z) = f(z)(r^2 - 1) + \frac{1}{4} f''(z) \left[r^2 \ln r^2 - \frac{1}{2} (r^4 - 1) \right] + \dots, \quad (5)$$

где $2f(z) = H_z|_{r=1}$.

Уравнения $\psi(r, z) = \text{const}$ дают уравнения аксиально-симметричных магнитных поверхностей с осевой силовой линией $r = 0$ в первом случае (4) и с цилиндрической магнитной поверхностью $r = 1$ во втором случае (5) с точностью до членов порядка

$\frac{r^2}{\lambda^2}$ включительно. Эти уравнения содержат произвольные функции $f_0(z)$ и $f(z)$.

Пусть искомая поверхность плазменного цилиндра при наличии волны определяется уравнением $r = r(z)$. Тогда согласно (4) и (5) в нулевом приближении

$f_0 = \frac{\Psi_0}{r^2}$, а $f = \frac{\Psi_e}{r^2 - 1}$, где $\Psi_0 = \text{const}$ и $\Psi_e = \text{const}$ – значения $\Psi_0(r, z)$ и $\Psi_e(r, z)$ на поверхности $r(z)$. Подставляя эти выражения в (4) и (5), найдем, что с точностью до членов $\sim \frac{1}{\lambda^2}$

$$f_0(z) = \Psi_0 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{r^2}{8} \left(\frac{1}{r^2} \right)'' \right],$$

$$f(z) = \Psi_e \left[\frac{1}{r^2 - 1} - \frac{r^2 \ln r^2 - \frac{1}{2}(r^4 - 1)}{4(r^2 - 1)} \left(\frac{1}{r^2 - 1} \right)'' \right]. \quad (6)$$

Определим теперь квадраты скорости и внешнего магнитного поля, выразив их через $r(z)$. С принятой точностью для обоих случаев получаем согласно (1), (4)–(6) с учетом внешнего азимутального поля

$$v^2 = 2\Psi_0^2 \left(\frac{2}{r^4} + \frac{r''}{r^3} - \frac{r'^2}{r^4} \right),$$

$$H_e^2 = 2\Psi_e^2 \left\{ \frac{2}{(1-r^2)^2} + \frac{2 \ln z^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} r r'' + \right. \\ \left. + \frac{2(1-r^2)^3 + (1+3r^2) [2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)]}{(1-r^2)^5} r'^2 \right\} + H_{\Phi a}^2 \frac{a^2}{r^2}. \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение для границы шнура с внешним магнитным полем $r = r(z)$ получается из условия баланса давлений на этой границе. Используя теорему

Бернулли $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$ и условившись измерять магнитное поле в единицах альфвеновской скорости $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, получаем граничное условие при $r = r(z)$

в виде

$$v^2 - H_i^2 + H_e^2 = P = \text{const}. \quad (8)$$

Подставив в его левую часть выражения (7), получаем дифференциальное уравнение для $r(z)$. Оно имеет интегрирующий множитель rr' . Обозначая через a значение r в экстремуме $r(z)$, путем интегрирования (8) найдем

$$r'^2 \left[\Psi_0^2 - \Psi_i^2 + \Psi_e^2 r^4 \frac{2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} \right] = \\ = 2(r^2 - a^2)r^2 \left[- \frac{\Psi_0^2 - \Psi_i^2}{a^2 r^2} - \frac{\Psi_e^2}{(1-a^2)(1-r^2)} - \frac{H_{\Phi a}^2 a^2 \ln \frac{r^2}{a^2}}{4(r^2 - a^2)} + \frac{P}{4} \right]. \quad (9)$$

Постоянную P можно выразить через значение второй производной r''_a в точке

$r = a$. Действительно, согласно (7), (8) получаем при условии $r_a = 0$

$$P = 4 \frac{\Psi_0^2 - \Psi_i^2}{a^4} + 4 \frac{\Psi_e^2}{(1-a^2)^2} + H_{\Phi a}^2 + 2r_a'' \left[\frac{\Psi_0^2 - \Psi_i^2}{a^3} + \Psi_e^2 a \frac{2 \ln a^2 + (1-a^2)(3-a^2)}{(1-a^2)^4} \right].$$

Таким образом, уравнение для профиля волны окончательно приводится к виду

$$\begin{aligned} r'^2 \left[\Psi_0^2 - \Psi_i^2 + \Psi_e^2 r^4 \frac{2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} \right] = \\ = \frac{2(r^2 - a^2)^2}{a^4} \left\{ \Psi_0^2 - \Psi_i^2 - \Psi_e^2 \frac{a^4 r^2}{(1-a^2)^2 (1-r^2)} + \frac{H_{\Phi a}^2 a^4}{4} \frac{r^2 - a^2 - a^2 \ln \frac{r^2}{a^2}}{(r^2 - a^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{r_a'' a r^2}{2(r^2 - a^2)} \left[\Psi_0^2 - \Psi_i^2 + \Psi_e^2 a^4 \frac{2 \ln a^2 + (1-a^2)(3-a^2)}{(1-a^2)^4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь постоянные Ψ_0 , Ψ_i и Ψ_e определяют потоки жидкости внутреннего и внешнего магнитного поля, а величина r_a'' характеризует кривизну профиля волны в экстремуме $r = a$.

Нетрудно убедиться, что ограниченные решения уравнения (10) либо периодические, либо имеют вид уединенной волны, т.е. одиночного горба или впадины. Для получения из (10) уравнения, описывающего уединенную волну, потребуем, чтобы радиус $r = a$ достигался при $z = \pm \infty$, где $r_a' = r_a'' = 0$ (рис. 2). При этом из (4), (5)

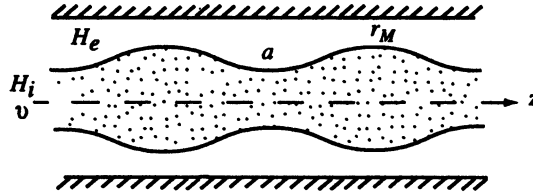


Рис. 2

находим выражения для Ψ_0 , Ψ_i и Ψ_e через значения невозмущенных величин скорости и магнитных полей при $z = \pm \infty$:

$$\Psi_0 = v_z \frac{a^2}{2}, \quad \Psi_i = H_{zi} \frac{a^2}{2}, \quad \Psi_e = -H_{ze} \frac{1-a^2}{2}. \quad (10')$$

Величина v_z и является фазовой скоростью волны. Подставляя эти выражения в (10) и полагая там $r_a'' = 0$, получим уравнение для профиля уединенной волны:

$$\begin{aligned} r'^2 \left[v_z^2 - H_{zi}^2 + H_{ze}^2 \frac{(1-a^2)^2}{a^4} r^4 \frac{2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} \right] = \\ = \frac{2(r^2 - a^2)^2}{a^4} \left[v_z^2 - H_{zi}^2 - H_{ze}^2 \frac{r^2}{1-r^2} + H_{\Phi a}^2 r^2 \frac{r^2 - a^2 - a^2 \ln \frac{r^2}{a^2}}{(r^2 - a^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

То обстоятельство, что полученные уравнения (10) и (11) являются дифференциальными уравнениями первого порядка, позволяет произвести качественное исследование областей существования и несуществования решения. Фазовая скорость волн, зависящая от величин обоих экстремумов a и r_M и от кривизны профиля волны r_a'' в одном из экстремумов a , определяется приравниванием нулю правой части (10) или (11) при $r = r_M$.

2. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

Уравнение уединенной волны (11) запишем в виде

$$r'^2 = 2r^2 \frac{(r^2 - a^2)^2}{a^4} \frac{A(r)}{B(r)}, \tag{12}$$

где

$$A(r) = \frac{v_z^2 - H_{zi}^2}{r^2} - \frac{H_{ze}^2}{1 - r^2} + \frac{H_{\Phi a}^2}{a^2} \Phi_1(x), \tag{13}$$

$$B(r) = v_z^2 - H_{zi}^2 + H_{ze}^2 \Phi^2(a^2) \Phi_2(r^2),$$

а $\Phi(r^2)$, $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(r^2)$ – универсальные функции своих аргументов r^2 и $x \equiv \frac{r^2 - a^2}{a^2}$:

$$\Phi(r^2) = \frac{1 - r^2}{r^2}, \quad \Phi_1(x) = \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2},$$

$$\Phi_2(r^2) = \frac{r^4}{(1 - r^2)^4} [2 \ln r^2 + (1 - r^2)(3 - r^2)]. \tag{14}$$

Графики функций Φ_1 и Φ_2 приведены на рис. 3, 4.

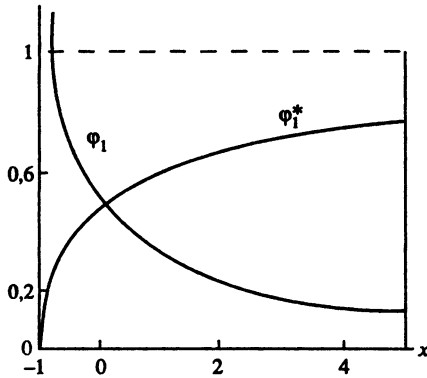


Рис. 3

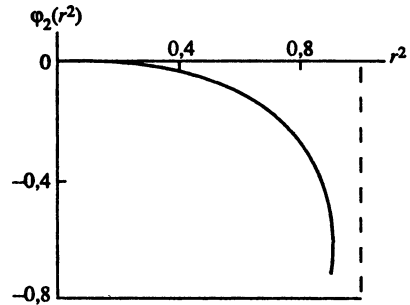


Рис. 4

Уравнение, определяющее фазовую скорость уединенной волны, записывается в виде $A(r_M) = 0$, где r_M – координата горба или впадина волны в зависимости от того, какая из этих возможностей реализуется. Это уравнение имеет вид

$$v_z^2 = H_{zi}^2 + H_{ze}^2 \Phi^{-1}(r_M^2) - H_{\Phi a}^2 \Phi_1^*(x_M), \tag{15}$$

где $\Phi_1^*(x_M) = (1 + x_M)\Phi_1(x_M)$, а $x_M \equiv \frac{r_M^2 - a^2}{a^2}$.

График функции $\varphi_1^*(x)$ также изображен на рис. 3. С помощью уравнения (15) можно исключить $v_z^2 - H_{zi}^2$ из дифференциального уравнения (12), в результате чего получим

$$r'^2 = 2 \frac{(r^2 - a^2)^2}{a^4} \frac{\varphi^{-1}(r_M^2) - \varphi^{-1}(r^2) - h_\varphi^2 [\varphi_1^*(x_M) - \varphi_1^*(x)]}{\varphi^{-1}(r_M^2) + \varphi^2(a^2)\varphi_2(r^2) - h_\varphi^2 \varphi_1^*(x_M)}. \quad (16)$$

Область существования решения (16) определяется тремя параметрами a , r_M и $h_\varphi^2 \equiv \frac{H_{\varphi a}^2}{H_{z e}^2}$. Для того чтобы получить область существования уединенных волн, следует еще исключить ту часть области, в которой $v_z^2 < 0$. Далее мы будем исследовать дифференциальное уравнение профиля уединенной волны в форме (12)–(14), рассматривая отдельно случаи $v_z^2 > H_{zi}^2$ и $v_z^2 < H_{zi}^2$. Остановимся сначала на случае $H_{zi} = 0$.

2.1. Уединенные волны на поверхности плазменного цилиндра без внутреннего магнитного поля

При $H_{zi} = 0$ в области (0,1) возможного изменения r функция $A(r)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ и, следовательно, имеет один корень $r = r_M$. При этом радиусе в случае существования решения достигается максимальное либо минимальное значение решения $r(z)$. При $r < r_M$ величина $A > 0$, а при $r > r_M$ $A < 0$. Функция $B(r)$ также монотонно убывает от значения v_z^2 до $-\infty$ и соответственно имеет один корень r_3 , ниже которого $B > 0$, а выше $B < 0$.

В случае $r < a$ величина r_3 должна быть меньше, чем r_M , чтобы в области существования решения (r_M, a) знаменатель $B(r)$ в (12) не обращался в нуль и чтобы $A(r)$ и $B(r)$ имели одинаковые знаки (оба отрицательны). В случае же, когда $r_M > a$, r_3 должно быть больше r_M , чтобы $B(r)$ не обращалось в нуль в области (a, r_M) и A и B были одного знака (положительные). Поскольку $B(r)$ – монотонно убывающая функция, то для обоих случаев ($r_M > a$ и $r_M < a$) условие существования решения можно записать соответственно в виде $B(r_M) - B(r_3) = B(r_M) > 0$ и $B(r_M) - B(r_3) = B(r_M) < 0$. Или, исключая из $B(r)$ величину v_z^2 с помощью уравнения (15) получаем

$$\varphi^2(a^2)\varphi_2(r_M^2) + [\varphi^{-1}(r_M^2) - h_\varphi^2 \varphi_1^*(x_M)] \geq 0, \quad (17)$$

причем верхний знак соответствует условию существования горба, а нижний – впадины. При этом должно выполняться еще дополнительное условие $v_z^2 > 0$, что эквивалентно требованию положительности квадратной скобки в (17).

А. Рассмотрим прежде всего шнур без продольного тока ($h_\varphi = 0$). При этом условие (17) переписывается в виде

$$\varphi^{-2}(a^2) \geq -\varphi(r_M^2)\varphi_2(r_M^2) \equiv \varphi_3^2(r_M^2).$$

Отсюда получаем, что граница областей существования горба и впадины определяется уравнением

$$a^2 = \frac{\varphi_3(r_M^2)}{1 + \varphi_3(r_M^2)}. \quad (18)$$

Эти области заштрихованы на рис. 5. Кривая $r_M^2 - a^2$ пересекает ось абсцисс в точке $a_{k_0}^2 = 0,417$. Таким образом, если радиус плазменного шнура меньше чем 0,645 от радиуса кожуха, то может распространяться только перетяжка, а если $a > 0,645$, то может распространяться только вздутие. В окрестности $a = a_{k_0}$ уединенных волн достаточно большой амплитуды не существует. В точке $a = a_{k_0}$ не существует даже волн сколь угодно малой амплитуды.

В рассматриваемом случае $H_\phi = 0$ условие $v_z^2 > 0$ всегда выполняется и граница области существования решения (18) не связана с переходом v_z^2 через нуль. Она определяется одновременным обращением в нуль числителя $A(r)$ и знаменателя $B(r)$ уравнения профиля волны (12). Поскольку оба корня r_M и r_3 простые, то правая часть (12) при $r_3 \rightarrow r_M$ стремится к положительной константе.

Таким образом, по мере приближения к границе области существования вершина волны все более заостряется, и в пределе образуются волны с углом при вершине как в случае горба, так и в случае впадины. Однако, по мере того как волна заостряется, мы выходим за границы области применимости метода, предполагающего малость производных $r(z)$, и о последнем результате можно говорить лишь как о существующей тенденции.

Б. При наличии продольного тока ($h_\phi \neq 0$) области существования решения зависят еще от одного параметра h_ϕ^2 и, кроме того, появляется новое ограничение $v_z^2 > 0$. На рис. 6, а изображены границы областей существования решения для различных значений h_ϕ^2 , построенные на основании соотношения (17), и границы $v_z^2 = 0$, соответствующие этим же значениям h_ϕ^2 , изображенные штриховыми линиями.

В переменных a^2 и $r_M^2 - a^2$ граница области устойчивости $v_z^2 = 0$ согласно (15) определяется параметрическими уравнениями

$$a^2 = \frac{1}{1 + x_M} \frac{h_\phi^2 \Phi_1^*(x_M)}{1 + h_\phi^2 \Phi_1^*(x_M)}, \quad (19)$$

$$r_M^2 - a^2 = x_M a^2.$$

Две характерные области существования волн для $h_\phi^2 = 0,1$ и $h_\phi^2 = 2$ изображены на рис. 6, б и 6, в. С увеличением продольного тока граница области существования смещается в сторону больших радиусов шнура a .

Точку пересечения границы с осью абсцисс обозначим через a_k^2 . Аналогично предыдущему при $a < a_k$ может распространяться только впадина, а при $a > a_k$ только

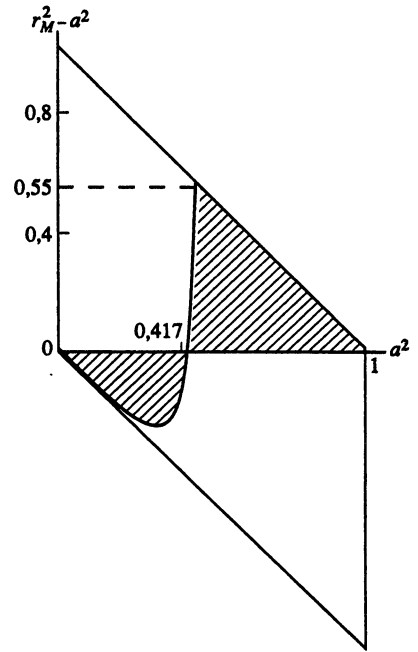


Рис. 5

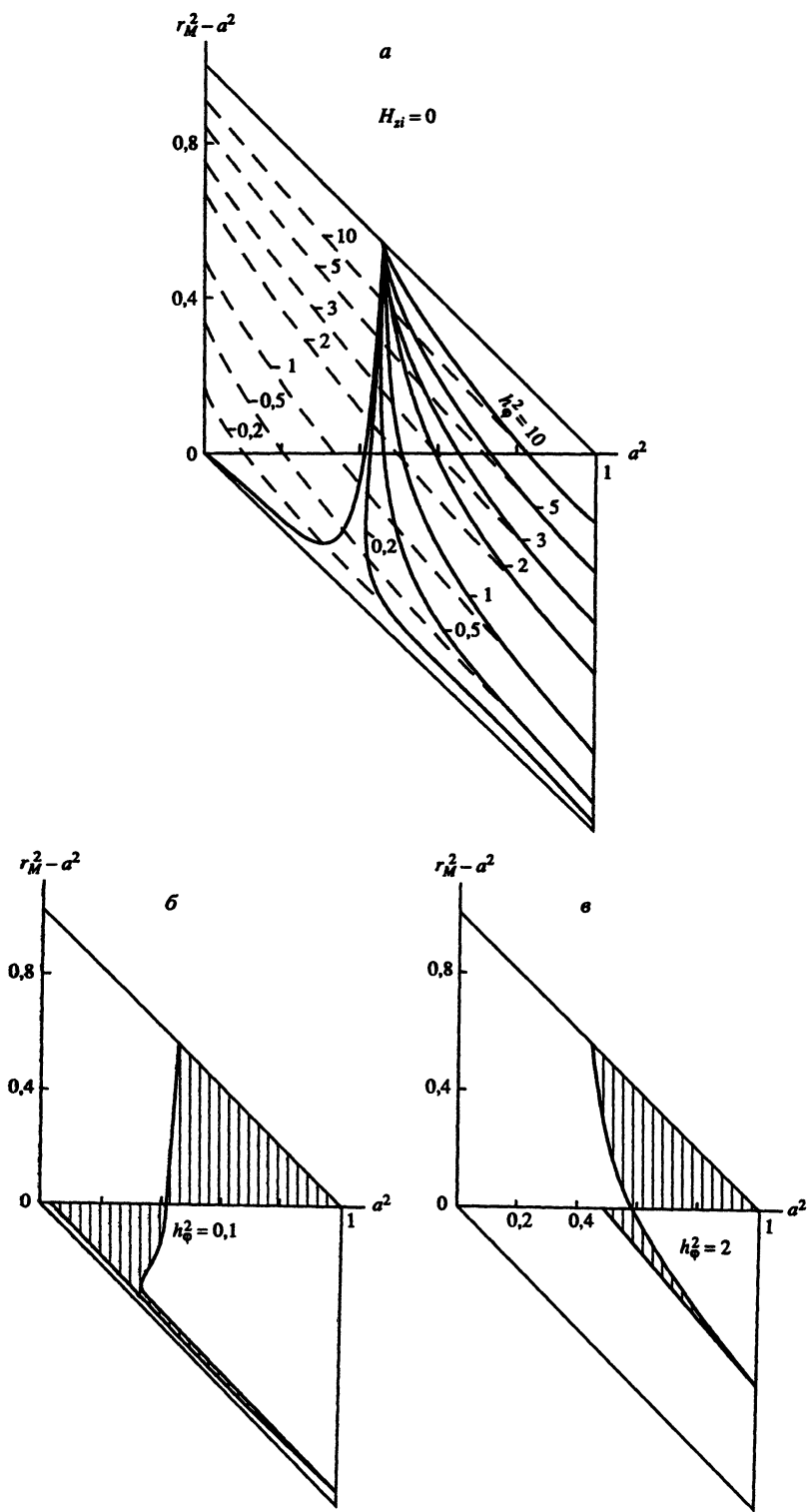


Рис. 6

горб. Граница области устойчивости $v_z^2 = 0$ примыкает к области существования перетяжек.

В случае, изображенном на рис. 6, в, при малых a возможны перетяжки от сколь угодно малой до предельной амплитуды, определяемой условием устойчивости $v_z^2 > 0$. При $a < a_k$, но достаточно близких к a_k возможны также горбы, которые, однако, могут иметь только конечную амплитуду. При $a > a_k$ могут существовать горбы любой амплитуды; наоборот, перетяжки могут иметь лишь конечную амплитуду. В случае, изображенном на рис. 6, б, при $a < a_k$, но достаточно близких к a_k существуют перетяжки с малой и с большей амплитудой, а область промежуточных амплитуд выпадает.

В окрестности точки $a = a_k$ в случае, приведенном на рис. 6, б, не существует волн достаточно больших амплитуд, а в случае рис. 6, в может распространяться как горб, так и впадина.

2.2. Уединенные волны при наличии внутреннего магнитного поля

При исследовании уравнения (12) в случае $H_{zi} \neq 0$ разобьем область изменения параметров a и r_M на две части линией $v_z^2 - H_{zi}^2 = 0$ (см. (15)). Эти линии изображены на рис. 6, а штриховыми линиями для различных значений параметра h_ϕ^2 (они соответствуют границам области устойчивости $v_z^2 = 0$ для случая $H_{zi} = 0$). Выше соответствующей линии $v_z^2 > H_{zi}^2$ области существования решения остаются теми же, что и в случае $H_{zi} = 0$, поскольку при этом $v_z^2 > 0$, и все рассуждения, на которых основан вывод формулы (17), остаются в силе. В области же, лежащей ниже этой линии $v_z^2 < H_{zi}^2$, появляются новые области существования решения. В этой области $B(r) < 0$, и, следовательно, для существования решения (12) необходимо, чтобы было $A(r) < 0$. Функция $A(r)$ в рассматриваемом случае имеет в интервале $0 < r < 1$ два корня и стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 1$.

Решение (12) будет существовать, если $r = a$ лежит в области $A(r) < 0$, т.е. условием существования решения будет $A(a) < 0$, или

$$\Phi^{-1}(r_M^2) - \Phi^{-1}(a^2) - h_\phi^2 \left[\Phi_1^*(x_M) - \frac{1}{2} \right] < 0. \quad (20)$$

На рис. 7, соответствующем $h_\phi^2 = 1$, горизонтальной штриховкой отмечены области существования, которые были и при отсутствии внутреннего поля, а вертикальной штриховкой – добавляющиеся к ним области при $H_{zi} \neq 0$. Картина этих дополнительных областей не зависит от H_{zi} , поскольку, как упоминалось выше, уравнение для профиля волны сводится к уравнению (16), не содержащему H_{zi} .

Зависимость областей существования от H_{zi}^2 проявляется в том, что от дополнительных областей, изображенных на рис. 7, следует отрезать части, в которых $v_z^2 < 0$.

Последние изображены на рис. 8 для различных значений параметра $h_i^2 \equiv \frac{H_{zi}^2}{H_{ze}^2}$. Они ограничены осью ординат и линиями, определяющимися параметрическими уравне-

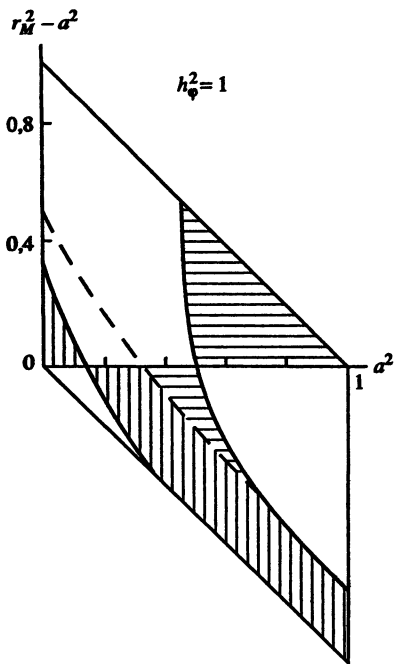


Рис. 7

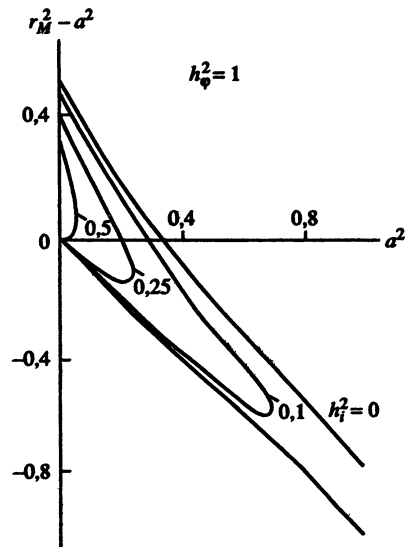


Рис. 8

НИЯМИ

$$a^2 = \frac{1}{1+x_M} \frac{\Phi_1^*(x_M) - h_i^2}{1 + \Phi_1^*(x_M) - h_i^2}, \quad (21)$$

$$r_M^2 - a^2 = a^2 x_M,$$

которые вытекают из (15), если положить там $\nu_z^2 = 0$.

2.3. Уединенные волны в отсутствие внешнего магнитного поля

Уравнение профиля волны, распространяющейся вдоль плазменного цилиндра с внутренним полем H_{zi} , но при отсутствии внешнего поля H_{ze} , можно получить из (16)

предельным переходом $h_\phi^2 = \frac{H_{\phi a}^2}{H_{ze}^2} \rightarrow \infty$. Это уравнение имеет вид

$$r'^2 = 2 \frac{(r^2 - a^2)^2}{a^4} \frac{\Phi_1^*(x_M) - \Phi_1^*(x)}{\Phi_1^*(x_M)}. \quad (22)$$

Так как знаменатель здесь положителен, то должно быть $x_M < x$, т.е. $r_M > r$, так что могут распространяться только горбы. Условие положительности квадрата фазовой скорости согласно (15) записывается в виде

$$h_{\phi i}^2 \Phi_1^*(x_M) < 1, \quad h_{\phi i}^2 \equiv \frac{H_{\phi a}^2}{H_{zi}^2}. \quad (23)$$

Поскольку $\varphi_1^*(x_M)$ всегда меньше единицы, оно накладывает ограничение на область существования волн $r_M > a$ только для $h_{\varphi_i}^2 > 1$. При $h_{\varphi_i}^2 > 2$ решения не существует, так как $\varphi_1^*(x_M) < \frac{1}{2}$ соответствует только отрицательным аргументам $x_M = \frac{r_M^2 - a^2}{a^2}$ (см. рис. 3). Таким образом, уединенные волны существуют только при $h_{\varphi_i}^2 < 2$ и только в виде вздутый шнура. Граница области существования решения, определяющаяся неравенством (23) в переменных $a^2, r_M^2 - a^2$, представляется прямой линией. На рис. 9 показаны границы областей существования волн для различных значений параметра $h_{\varphi_i}^2$. Волны существуют только в области, расположенной ниже соответствующих прямых.

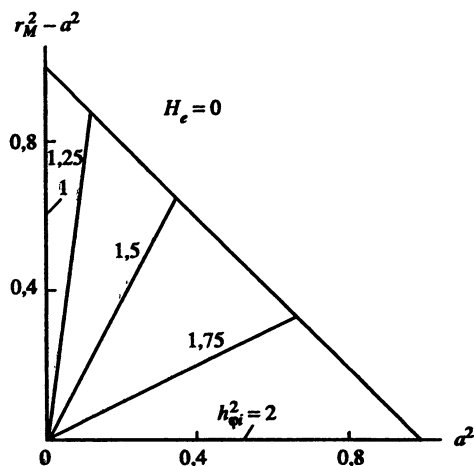


Рис. 9

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Исследование уравнения (10), описывающего периодические волны, является более сложным по сравнению с исследованием уравнения (11) для уединенных волн, поскольку оно содержит новый параметр r_a'' , определяющий кривизну одного из экстремумов решения. Однако для рассматриваемых здесь длинных волн, удовлетворяющих условию малости производных $r(z)$, этот параметр должен быть мал. При $r_a'' \rightarrow 0$ мы приходим к разобранному выше случаю уединенных волн. Если r_a'' достаточно мало, то картина областей существования решения будет мало отличаться от соответствующей картины для уединенных волн. Для того чтобы проследить характер получающихся при этом отличий, мы ограничимся здесь рассмотрением периодических волн при отсутствии продольного тока.

Исключая $\psi_0^2 - \psi_i^2$ из уравнения (10) с помощью "дисперсионного" соотношения, которое получается приравниванием нулю правой части (10) в точке $r = r_M$, получим дифференциальное уравнение для границы плазмы с полем $r(z)$ в виде

$$r'^2 = \frac{2(r^2 - a^2)(r_M^2 - r^2)}{a^4(1 - r_M^2)(1 - r^2)} \left\{ \frac{r^2 - a^2 + \sqrt{(1 - r_M^2)(1 - r^2)\varphi_2(a^2) + \varphi^{-1}(a^2)r_M^2 r^2}}{\varphi^{-1}(r_M^2) + \varphi^2(a^2)\varphi_2(r^2) - \nu \frac{r_M^2}{a^2} [\varphi_2(a^2) - \varphi_2(r^2)]} \right\}, \quad (24)$$

где $\nu = \frac{r_a''(1 - a^2)^2}{2a(r_M^2 - a^2)}$. Это уравнение содержит три параметра: расстояния от оси цилиндра до экстремумов профиля волны a и r_M и кривизну экстремума r_a'' в точке $r = a$.

Отметим, прежде всего, что величина ν всегда положительна, так как если в точке a находится минимум $r(z)$, то $r_a'' > 0$, но при этом в точке r_M должен быть максимум

и, следовательно, $r_M^2 > a^2$, и наоборот. Далее, числитель выражения в фигурных скобках (24) – монотонно возрастающая функция r , поскольку $\varphi_2(a^2) < 0$, а $\varphi^{-1}(a^2) > 0$, а знаменатель – монотонно убывающая функция r вследствие монотонного убывания $\varphi_2(r^2)$ (см. рис. 4).

Для того чтобы существовало решение (24) в виде периодической волны с $r_M > a$, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$r_2^2 < a^2 \quad (25a)$$

и либо

$$r_3^2 < a^2, \quad (25б)$$

либо

$$r_3^2 > r_M^2, \quad (25в)$$

где r_2 и r_3 – корни числителя и знаменателя выражения в фигурных скобках уравнения (24), или же неравенства

$$r_2^2 > r_M^2 \quad (26a)$$

и либо

$$r_3^2 < a^2, \quad (26a)$$

либо

$$r_3^2 > r_M^2. \quad (26б)$$

Обозначим числитель и знаменатель выражения в фигурных скобках (24) через $A(r)$ и $B(r)$. Воспользовавшись тем, что числитель является монотонно возрастающей функцией r , запишем неравенство (25a) в виде $A(a^2) > A(r_2^2) = 0$, или

$$\varphi^2(a^2)\varphi_2(a^2) + \varphi^{-1}(r_2^2) > 0. \quad (27a)$$

Аналогично, пользуясь монотонным убыванием знаменателя, представим неравенство (25б) в форме $B(a^2) < 0$, или

$$\varphi^2(a^2)\varphi_2(a^2) + \varphi^{-1}(r_3^2) < 0, \quad (27б)$$

а неравенство (25в) в виде $B(r_M^2) > 0$, т.е.

$$\varphi^{-1}(r_M^2) + \varphi^2(a^2)\varphi_2(r_M^2) - \sqrt{\frac{r_M^2}{a^2}} [\varphi_2(a^2) - \varphi_2(r_M^2)] > 0. \quad (27в)$$

Из монотонного возрастания числителя следует также, что неравенство (26a) может быть записано в виде $A(r_M^2) < 0$, или

$$r_M^2 - a^2 + \sqrt{(1 - r_M^2)^2 \varphi_2(a^2) + r_M^4 \varphi^{-1}(a^2)} < 0. \quad (28)$$

Нетрудно проследить, что в случае $r_M < a$ знаки всех этих неравенств меняются на обратные. Области, где выполняются все поставленные выше условия, соответствующие значениям параметра $r_a'' = \pm 0,2$, представлены на рис. 10 (заштрихованы). Штриховыми линиями проведена граница областей существования для уединенной волны ($r_a'' = 0$) без продольного тока. При $r_a'' \neq 0$ эта граница l смещается так, что области существования как для $r_a'' < 0$, так и для $r_a'' > 0$ уменьшаются. Упомянутое

смещение $\sim r_a'' a$. Однако при этом к областям существования добавляются еще области, ограниченные линией 2 (см. рис. 10) и осью абсцисс, ширина которых $\sim \sqrt{r_a'' a}$.

Аналогично случаю уединенных волн, при $a = 0,645$ волн рассматриваемого типа не существует, даже если амплитуда их сколь угодно мала. Граница 1, так же как и раньше, связана с заострением волн на гребне (или во впадине) при $r = r_M$. При приближении же к границе 2 волна стремится к уединенной волне с экстремумом в точке $r = a$. Последнее определяется тем, что на этой границе $r_2 \rightarrow r_M$ и r_M становится кратным корнем числителя в (24).

Таким образом, при достаточно малой кривизне профиля волн в одном из экстремумов $r = a$ картина областей существования периодических волн близка к картине областей существования уединенных волн на поверхности плазменного цилиндра радиуса a . При этом, если $r_a'' > 0$, то соответствующей областью существования уединенных волн будет область, где $r_M > a$, т.е. распространяется горб, а если $r_a'' < 0$, то область, где $r_M < a$, т.е. область существования перетяжек. Границы областей существования связаны с заострением гребней или впадин волн во втором из экстремумов $r = r_M$ либо с переходом фазовой скорости волны через нуль. Для определения границы области устойчивости $v_z^2 = 0$ плазменного цилиндра относительно периодических волн конечной амплитуды с достаточно гладким профилем также можно использовать формулу (15) для уединенной волны. Как видно из графиков, приведенных в разд. 2, учет конечности амплитуды приводит к ухудшению устойчивости шнура по отношению к аксиально-симметричным возмущениям (в случае, если волны рассматриваемого типа существуют), поскольку при достаточно большой амплитуде возмущения, если $H_\phi \neq 0$, всегда может быть достигнута граница $v_z^0 = 0$ (см., например, рис. 6).

Выражаю глубокую благодарность М.А. Леонтовичу, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, и Э.Л. Бурштейну за плодотворные дискуссии.

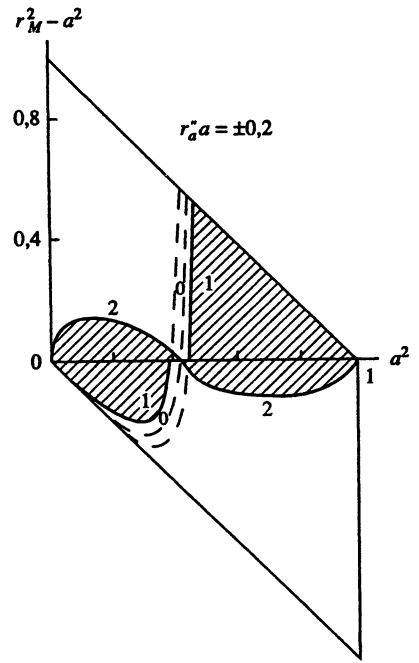


Рис. 10

ПРИЛОЖЕНИЕ

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ТОКОМ, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

Исследованное выше уравнение (10) может быть обобщено и на случай цилиндра с распределенным током, вращающегося вокруг своей оси. Если ψ_0 и ψ пропорциональны ($\psi_0 = \chi\psi$, $\chi = \text{const}$), то уравнения магнитной гидродинамики для аксиально-симметричных течений идеально проводящей несжимаемой жидкости сводятся к системе [2] (см. также [1])

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{2r^2} \frac{d\alpha^2}{d\psi} + \frac{r^2}{2} \frac{d\beta^2}{d\psi} + \frac{du}{d\psi} = 0, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{I - \chi I_0}{1 - \chi^2}, \quad \beta = -\frac{1}{r^2} \frac{\chi I - I_0}{1 - \chi^2}, \quad (2)$$

$$\rho + \frac{\rho v^2}{2} = (1 - \chi^2)(u + r^2 \beta^2), \quad (3)$$

где α , β и u – произвольные функции ψ , а скорость жидкости v и магнитное поле H , измеряющиеся в единицах альфвеновской скорости $H = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$, выражаются через функции ψ_0 , ψ , I_0 и I

соотношениями

$$r v_z = \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad r v_r = -\frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \quad r v_\phi = I_0, \quad (4)$$

$$r H_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad r H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad r H_\phi = I. \quad (5)$$

Для того чтобы в невозмущенном состоянии эти уравнения описывали плазменный цилиндр с однородным продольным током (допускается также существование поверхностного тока), вращающийся как целое вокруг своей оси, необходимо положить

$$\alpha(\psi) = \varepsilon\psi, \quad \beta(\psi) = \text{const}, \quad u(\psi) = A\psi. \quad (6)$$

При этом уравнение для ψ принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} \psi + A = 0. \quad (7)$$

Определим константы ε и β (константа A нам не понадобится). Подставляя (6) в (2) и полагая $r = a$ (см. рис. 2), получим с учетом (4), (5) и соотношения $\psi_0 = \chi\psi$

$$\varepsilon = a \frac{\psi H_\phi - \psi_0 v_\phi}{\psi^2 - \psi_0^2}, \quad \beta = -\frac{\psi}{a} \frac{\psi v_\phi - \psi_0 H_\phi}{\psi^2 - \psi_0^2}. \quad (8)$$

Здесь $\psi_0 = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ – значения ψ_0 и ψ на границе плазмы с полем, проходящей через точку $r = a$, а v_ϕ и H_ϕ – значения азимутальной скорости и магнитного поля в этой же точке $r = a$.

Решение уравнения (7) аналогично тому, как это было сделано в разд. 1, ищем методом разложения по малому параметру, предполагающим малость производных от функции $r(z)$, описывающей форму волны. Кроме того, предположим для простоты, что параметр ε также мал ($\varepsilon \ll r'$). Это имеет смысл, например, для определения границы области устойчивости

($\psi_0 = 0$) для малых $\frac{H_\phi}{H_z}$. При этих предположениях функция ψ , конечная при $r = 0$, определяется формулой

$$\psi(r, z) = \left[\frac{A}{\varepsilon^2} + f(z) \right] r^2 - (\varepsilon^2 f + f'') \frac{r^4}{8} + \dots \quad (9)$$

Отсюда с той же точностью имеем при $r = r(z)$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \psi^2 \left(\frac{4}{r^4} + \frac{2r''}{r^3} - \frac{2r'^2}{r^4} - \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) + \text{const.}$$

Граничное условие равенства давлений $\frac{p}{\rho} + \frac{H^2}{2} = \frac{H_e^2}{2}$ при $r = r(z)$, используя (3), можно представить теперь в виде

$$(\psi^2 - \psi_0^2) \left(\frac{4}{r^4} + \frac{2r''}{r^3} - \frac{2r'^2}{r^4} + \frac{r^2 \beta^2}{\psi^2} \right) + H_e^2 = P = \text{const.} \quad (10)$$

Постоянная P определяется отсюда же, если положить $r = a$, $r' = 0$ и $r'' = r_a''$. Внешнее поле H_e , очевидно, не отличается от того, что было и в разд. 1 (см. (7)). В результате интегрирования (10) окончательно получим

$$\begin{aligned}
 & r'^2 \left[\Psi_0^2 - \Psi^2 + \Psi_e^2 r^4 \frac{2 \ln r^2 + (1-r^2)(3-r^2)}{(1-r^2)^4} \right] = \\
 & = \frac{2(r^2 - a^2)^2}{a^4} \left\{ \Psi_0^2 - \Psi^2 - \frac{\Psi_0^2 - \Psi^2}{8\Psi^2} \beta^2 a^4 r^2 - \Psi_e^2 \frac{a^4 r^2}{(1-a^2)^2 (1-r^2)} + \frac{H_{\Phi a}^2 a^4}{4} r^2 \frac{r^2 - a^2 - a^2 \ln \frac{r^2}{a^2}}{(r^2 - a^2)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_a'' a r^2}{2(r^2 - a^2)} \left[\Psi_0^2 - \Psi^2 + \Psi_e^2 a^4 \frac{2 \ln a^2 + (1-a^2)(3-a^2)}{(1-a^2)^4} \right] \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Здесь все обозначения совпадают с введенными в разд. 1. Все отличие, вносимое наличием распределенного тока и вращения шнура, заключается в появлении члена, содержащего постоянную β^2 , определяющуюся формулой (8). Уравнение для уединенной волны получается из (10), если положить $r_a'' = 0$. При этом значения постоянных Ψ_0 , Ψ и Ψ_e выражаются через фазовую скорость u_z и невозмущенные поля H_z и H_{ze} соотношениями (10') из разд. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 4.
2. Ткалич В.С. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. Т. 5. С. 122.

О СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ*

В настоящей работе приводится схема вывода системы уравнений (10)–(12), описывающей стационарные течения идеально проводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле при винтовой симметрии [1], и рассматриваются некоторые примеры плоских и осесимметричных течений.

1. Исходной является система уравнений магнитной гидродинамики для бездиссипативных процессов [2]:

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - \rho\nabla\Phi, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}\nabla S = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, ρ – плотность, p – давление, S – энтропия, $\mathbf{B} \equiv \sqrt{4\pi}\mathbf{H}$ – магнитное поле, Φ – потенциал сил неэлектромагнитного происхождения.

Из (2) вытекает возможность введения энтальпии W согласно равенству $dW = dp/\rho$, справедливому вдоль линии тока жидкости. При винтовой симметрии течения все величины зависят только от двух переменных: r и $\theta \equiv \varphi - \alpha z$, где r , φ , z – цилиндрические координаты, $L \equiv 2\pi/\alpha = \text{const}$ – шаг винта. Равенство нулю дивергенции векторов $\rho\mathbf{v}$ и \mathbf{H} , а также $\mathbf{j}_0 \equiv \operatorname{rot} \mathbf{v}$ и $\mathbf{j} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{H}$ позволяет ввести "функции тока" ψ_0 , ψ , I_0 , I , определяемые равенствами¹

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$r \begin{pmatrix} j_{0r} \\ j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial I}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \alpha r \begin{pmatrix} j_{0z} \\ j_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} j_{0\varphi} \\ j_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_0}{\partial r} \\ \frac{\partial I}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Введенные функции характеризуются тем, что линии тока жидкости лежат на поверхностях $\psi_0(r, \theta) = \text{const}$, магнитные силовые линии – на "магнитных поверхностях" $\psi(r, \theta) = \text{const}$, линии электрического тока – на поверхностях $I(r, \theta) = \text{const}$, а вихревые линии – на поверхностях $I_0(r, \theta) = \text{const}$, причем все эти поверхности

* Совместно с А.И. Морозовым // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 550–553.

¹ Получающиеся уравнения имеют симметричный вид относительно \mathbf{v} и \mathbf{H} , и их удобно записывать в двухкомпонентной форме.

обладают винтовой симметрией. Функция ψ выражается через компоненты векторного потенциала A формулой $\psi = A_z + \alpha r A_\varphi$.

Из уравнения (3) следует, что $\psi_0 = \psi_0(\psi)$, т.е. жидкость течет по магнитным поверхностям. Введя для симметрии новую функцию ξ , будем считать, что $\psi_0 = \psi_0(\xi)$, $\psi = \psi(\xi)$.

Из определений векторов \mathbf{j}_0 и \mathbf{j} находим

$$I_0 = v_z + \alpha r v_\varphi, \quad I = H_z + \alpha r H_\varphi. \quad (7)$$

Из (1) и (3) соответственно получаются якобианские равенства

$$\frac{\partial(\psi, I)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(\psi_0, I_0)}{\partial(r, \theta)}, \quad \frac{\partial(\psi, I_0/\beta)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(\psi_0, I/(\beta\rho))}{\partial(r, \theta)}, \quad (8)$$

где $\beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2$. Согласно (8) получаем

$$I_0 \psi'_0 - I \psi' = A(\xi), \quad I \psi'_0 / \rho - I_0 \psi' = \beta B(\xi). \quad (9)$$

Здесь штрихом обозначена производная по ξ , а A и B – произвольные величины, зависящие только от ξ , причем первая величина связана с сохранением момента, а вторая – с вмороженностью магнитного поля.

Из уравнения (1) с учетом выписанных выше соотношений выводится уравнение для ξ и уравнение для W , являющееся аналогом интеграла Бернулли в обычной гидродинамике.

Полная система уравнений для случая винтовой симметрии при $S(\xi) = \text{const}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{s}{\rho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\beta\rho} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{\beta\rho^3} (\nabla\rho \nabla \xi) + \frac{1}{2\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \\ + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi_0'}{\rho s \psi'} - \frac{2\alpha A}{\beta^2 \rho} - U' = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\beta B^2}{s} + \frac{AB\psi_0'}{\rho s \psi'} = U, \quad s \equiv \frac{\psi_0'^2}{\rho} - \psi'^2; \quad (11)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0' / \rho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0' / \rho \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0' / \rho \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{\beta B}{s} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}.$$

"Интегралы движения" ψ_0, ψ, A, B и U являются произвольными функциями ξ ,

$\Delta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, частная производная по ξ берется при фиксированном ρ .

В качестве предельных случаев из (10)–(12) можно получить соответствующие уравнения для плоской задачи ($\alpha \rightarrow 0$) и для аксиально-симметричной задачи (при $\alpha \rightarrow \infty$).

В случае трансляционной симметрии, когда нет зависимости от координаты z , получаем

$$\frac{s}{\rho} \Delta \xi + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{\rho^3} (\nabla\rho \nabla \xi) + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi_0'}{\rho s \psi'} - U' = 0; \quad (13)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{B^2}{s} + \frac{AB\Psi'_0}{\rho s\Psi'} = U, \quad s \equiv \frac{\Psi_0'^2}{\rho} - \Psi'^2; \quad (14)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} + \frac{B}{s} \begin{pmatrix} \Psi' \\ \Psi'_0 \end{pmatrix},$$

где Δ – оператор Лапласа, а функция ψ равна A_z – компоненте векторного потенциала. Для того чтобы представить (13)–(15) в декартовых координатах x, y, z , достаточно уравнения для поперечных компонент \mathbf{v} и \mathbf{H} переписать в виде

$$\begin{pmatrix} v_x \\ H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \begin{pmatrix} v_y \\ H_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (15')$$

В случае аксиальной симметрии, когда нет зависимости от азимута φ , система уравнений стационарного течения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{s}{\rho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\Psi_0'^2}{\rho^3 r^2} (\nabla \rho \nabla \xi) + \\ + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\Psi'_0}{\rho s\Psi'} - U' = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{r^2 B^2}{s} + \frac{AB\Psi'_0}{\rho s\Psi'} = U, \quad s \equiv \frac{\Psi_0'^2}{\rho} - \Psi'^2; \quad (17)$$

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r},$$

$$r \begin{pmatrix} v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \Psi'_0/\rho \\ \Psi' \end{pmatrix} + \frac{r^2 B}{s} \begin{pmatrix} \Psi' \\ \Psi'_0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь, аналогично (10) – (15), ψ_0, ψ, A, B, U – функции, зависящие только от ξ , которые могут быть заданы произвольно; штрих означает производную по ξ ; частная производная по ξ берется при постоянном ρ , а $\Delta^* \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Функция

$\psi(r, z)$ связана с азимутальной компонентой векторного потенциала соотношением $\psi = rA_\varphi$.

Отметим, что в частном случае $\Psi' = 0$ члены, содержащие Ψ' в знаменателе, в формулах (10)–(18) отсутствуют. Уравнения, аналогичные (13) – (18), для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) были получены в работах [3, 4], а уравнения винтовых течений, аналогичные (10)–(12), – в работе [5].

2. Представляют существенный интерес задачи о течениях, медленно изменяющихся вдоль одной из координат, которые в ряде случаев могут быть решены до конца в "адиабатическом приближении".

А. Для плоского течения, не зависящего от координат x и z , система (13)–(15) имеет интеграл $p + H^2/2 = \text{const}$ (далее полагаем $\Phi = 0$). В адиабатическом приближении, отбрасывая члены порядка $(\partial \xi / \partial x)^2$ и $\partial^2 \xi / \partial x^2$, исключая U из уравне-

ний (13) и (14), получим $\frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{H^2}{2} \right) = 0$. Отсюда следует, что

$$p + \frac{H^2}{2} = \frac{f^2(x)}{2}, \quad (19)$$

где $f(x)$ – медленно изменяющаяся функция x .

Например, в случае $\psi' = 0$, $A = 0$, $W = 0$ ($\xi = \psi_0$) уравнения (19) и (14) позволяют свести задачу к квадратуре вида

$$\int_0^\xi \frac{B d\xi}{\sqrt{U - fB}} = \sqrt{2} f\{y - Y(x)\}. \quad (20)$$

Здесь U и B – произвольные функции ξ , а $Y(x)$ – медленная функция x .

Б. Для осесимметричного течения, аналогично предыдущему, в адиабатическом приближении медленности вдоль z (в пренебрежении членами порядка $(\partial\xi/\partial z)^2$ и $\partial^2\xi/\partial z^2$) получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H^2}{2} \right) + \frac{1}{r} (H_\phi^2 - \rho v_\phi^2) = 0. \quad (21)$$

Это уравнение в общем виде не интегрируется, однако в некоторых частных случаях с его помощью также могут быть получены первые интегралы системы (16)–(18).

Рассмотрим течение, когда $\psi' = 0$, $A = 0$ ($\xi = \psi_0$), при этом согласно (21) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial r} + B \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 B) = 0. \quad (22)$$

Последнее уравнение интегрируется в случаях $W = 0$ и $B = \text{const}$. В первом случае получаем $\rho r^2 B = f(z)$ и, используя (17), приходим к квадратуре

$$\int_0^\xi \frac{B d\xi}{\sqrt{U - fB}} = \sqrt{2} f \ln \frac{r}{R(z)}, \quad (23)$$

где $R(z)$ – произвольная (медленная) функция z . Во втором случае первым интегралом является $W + \rho r^2 B^2 = f(z)$. Определяя отсюда $\rho = \rho(r, z)$ и подставив в (17), мы тоже приходим к квадратуре, в которой, однако, ρ является неявной функцией r .

В. В ряде случаев адиабатический интеграл системы (16)–(18) может быть получен и помимо соотношения (21). Например, когда ψ'_0 , ψ' , A , B , U постоянны, уравнение (16) имеет интеграл $\frac{s}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = f(z)$. Полагая $W = 0$ и определяя ρ из уравнения (17), найдем

$$\psi'^2 \rho = \psi_0'^2 \pm \frac{\psi_0'}{r} \sqrt{\frac{(A\psi' + r^2 B \psi_0')^2 + r^2 f^2 \psi'^2}{r^2 B^2 + 2U\psi'^2}}. \quad (24)$$

Отсюда для ξ получаем квадратуру

$$\xi = \frac{f}{\psi'^2} \left\{ \mp \psi_0' \int_R^r \sqrt{\frac{r^2 B^2 + 2U\psi'^2}{(A\psi' + r^2 B \psi_0')^2 + r^2 f^2 \psi'^2}} r^2 dr - \frac{r^2 - R^2}{2} \right\}, \quad (25)$$

выражающуюся через эллиптические интегралы. Отметим, что получаемые таким образом решения позволяют просто определять форму канала, границами которого являются поверхности $\xi = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Л.С. Нелинейные гидромагнитные колебания плазменного шнура: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1962.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
3. Chandrasekhar S. // Astrophys. J. 1956. Vol. 124. P. 232.
4. Ткалич В.С. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. Т. 4. С. 98.
5. Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 4.

О ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ*

В настоящей работе получено уравнение, описывающее распространение линейных волн в идеально проводящем сжимаемом плазменном цилиндре с произвольным распределением внутреннего магнитного поля, скоростей, плотности и температуры, и рассмотрены некоторые вопросы устойчивости по отношению к возмущениям, развивающимся вдоль магнитных силовых линий.

Поскольку линейные волны общего вида $\sim \exp i(kz - m\phi - \omega t)$ в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны $v_\phi = \omega/k$, представляются стационарными винтовыми течениями, то уравнение малых колебаний можно получить, исходя из уравнений магнитной гидродинамики [1] для стационарных течений

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}[\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}] - \rho\nabla\Phi, \quad (1)$$

$$\text{div } \rho\mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$(\mathbf{v}\nabla)S = 0, \quad \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность, p – давление, S – энтропия, \mathbf{v} – скорость, \mathbf{B} – магнитное поле, Φ – потенциал неэлектромагнитных сил.

В предположении о винтовой симметрии течения, когда в цилиндрической системе координат r, ϕ, z все величины зависят только от r и $\theta = \phi - \alpha z$, где $L = 2\pi/\alpha$ – шаг винта, уравнения (1)–(3) могут быть сведены к системе двух уравнений для функций r и ξ [2]:

$$\Delta^*\xi + \frac{1}{2\beta\rho} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla\xi)^2 - \frac{\Psi_0'^2}{\beta\rho^3} (\nabla\rho\nabla\xi) + \frac{1}{2\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\Psi_0'}{\rho s \Psi'} - \frac{2\alpha A}{\beta^2\rho} + TS' - U' = 0, \quad (4)$$

$$W(\rho, S) + \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\beta B^2}{s} + \frac{AB\Psi_0'}{\rho s \Psi'} = U. \quad (5)$$

Линии тока жидкости и магнитные силовые линии лежат на поверхностях $\xi(r, \theta) = \text{const}$. Компоненты скорости и магнитного поля выражаются через ξ следующими соотношениями, которые удобно записать в матричной форме:

$$r \begin{pmatrix} v_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \Psi_0' \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad \alpha r \begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_\phi \\ H_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \Psi_0' \\ \Psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ H_z \end{pmatrix} + \alpha r \begin{pmatrix} v_\phi \\ H_\phi \end{pmatrix} = \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \Psi_0' \\ \Psi' \end{pmatrix} + \frac{\beta B}{s} \begin{pmatrix} \Psi' \\ \Psi_0' \end{pmatrix}.$$

* Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. С. 1048–1051.

Величины ψ_0 , ψ , A , B , U и S зависят только от ξ , т.е. постоянны на магнитных поверхностях. Штрих означает производную по ξ , частная производная по ξ берется при фиксированном ρ , через W и T обозначены энтальпия и температура, $s = \frac{1}{\rho} \psi_0'^2 - \psi'^2$,

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2, \quad \Delta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{4\pi} \mathbf{H}. \quad \text{При выводе (4), (5) использовано}$$

термодинамическое равенство $dW = \frac{1}{\rho} dp + T dS$.

Считая, что в равновесном состоянии все величины зависят только от r , легко получить связь равновесных распределений плотности, давления, скорости и магнитного поля. Полагая далее $\Phi = 0$, имеем

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{H^2}{2} \right) + h_\phi^2 - \rho v_\phi^2 = 0, \quad (7)$$

где $rh_\phi = H_\phi$, $rv_\phi = v_\phi$.

Выберем функцию ξ в равновесном состоянии равной $\bar{\xi} = r^2/2$; тогда при наличии волны $\xi = r^2/2 + \tilde{\xi}(r, \theta)$. Равновесная плотность $\bar{\rho}(r)$ также получает некоторое возмущение $\tilde{\rho}(r, \theta)$, так что $\rho = \bar{\rho}(r) + \tilde{\rho}(r, \theta)$. Связь между $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}$ получается из уравнения (5), если использовать то, что $U = U(\xi)$. В линейном по $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}$ приближении, полагая $\tilde{\xi} = f(r)e^{im\theta}$, $\tilde{\rho} - \frac{\bar{\rho}'}{r} \tilde{\xi} = g(r)e^{im\theta}$ и имея в виду, что $S = S(\xi)$, найдем

$$g = -\frac{rs}{\beta G} f' - \frac{Q - b^2}{G} f, \quad (8)$$

где

$$G = c_T^2 s / (\rho J_0^2) + H^2 / \rho - r^2 J_0^2 / \beta, \quad Q = 2a / \beta + \rho v_\phi^2 - h_\phi^2,$$

$$s = \rho J_0^2 - J^2, \quad a = \rho J_0 v_\phi - J h_\phi, \quad J_0 b = J_0 h_\phi - J v_\phi,$$

$J = \alpha H_z - h_\phi$, $J_0 = \alpha(v_z - v_\phi) - v_\phi$, $\alpha = k/m$, $v_\phi = \omega/k$ — фазовая скорость волны, $c_T^2 = (\partial p / \partial \rho)_S = \gamma p / \rho$ — квадрат звуковой скорости.

Уравнение для $\tilde{\xi}$ получается из (4) линеаризацией по $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\rho}$, если использовать зависимость $U' = U'(\xi)$ и учесть уравнение состояния и уравнение адиабаты $p = \rho k T$,

$\rho \rho^{-\gamma} = \exp\left(\frac{\gamma-1}{k} S\right)$. Исключая g с помощью соотношения (8), в результате получим

$$\left(\frac{rs}{1-\kappa} \frac{f'}{\beta} \right)' + \left\{ -\frac{m^2 s}{r} + \frac{4\alpha^2 r a^2}{\beta s} - \left(\frac{Q - \kappa b^2}{1-\kappa} \right)' - \frac{\kappa}{1-\kappa} \frac{\beta}{rs} (Q - b^2)^2 \right\} f = 0, \quad (9)$$

где

$$\kappa = \frac{r^2 J_0^2}{\beta} \left(\frac{c_T^2 s}{\rho J_0^2} + \frac{H^2}{\rho} \right)^{-1}.$$

Если плазма граничит с идеально проводящим кожухом, расположенным при $r = R$, то граничным условием будет $f(R) = 0$. Если же плазменный цилиндр удерживается внешним магнитным полем $\mathbf{B}_e = \sqrt{4\pi} \mathbf{H}_e$, то граничным условием является

условие баланса давлений $p + H^2/2 = H_e^2/2$ на возмущенной поверхности цилиндра $r = R + \delta R(\theta)$.

Будем описывать возмущенное внешнее поле функцией тока

$$\Psi_e = \bar{\Psi}_e + \tilde{\Psi}_e = \frac{\alpha r^2}{2} H_z^e - H_\phi^e r \ln r + f_e(r) e^{im\theta}.$$

Компоненты поля определяются через $\Psi_e(r, \theta)$ соотношениями

$$rH_r^e = \partial\Psi_e / \partial\theta, \quad \alpha rH_z^e - H_\phi^e = \partial\Psi_e / \partial r, \quad H_z^e + \alpha rH_\phi^e = \text{const}.$$

Радиальная часть возмущения $f_e(r)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\left(\frac{r}{\beta} f_e' \right)' - \frac{m^2}{r} f_e = 0, \quad (10)$$

решениями которого являются функции $rI_m'(\alpha m r)$ и $rK_m'(\alpha m r)$, где I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя.

На невозмущенной поверхности плазменного цилиндра, граничащего с внешним магнитным полем, должно выполняться граничное условие

$$\left\{ \frac{rs}{1-\kappa} \frac{f'}{f} + \beta \frac{Q - \kappa b^2}{1-\kappa} + rJ_e^2 \frac{f_e'}{f_e} + \beta h_{\phi e}^2 \right\}_{r=R} = 0, \quad (11)$$

которое вытекает из баланса давлений и требований $\xi|_{R+\delta R} = \text{const}$ и $\Psi_e|_{R+\delta R} = \text{const}$.

Величины $J_e = \alpha H_z^e - h_{\phi e}$, $h_{\phi e} = H_\phi^e / r$ аналогичны введенным выше для внутреннего поля. Функция $f_e(r)$ выбирается либо из требования убывания при $r \rightarrow \infty$, если рассматривается плазменный цилиндр в свободном пространстве, либо из условия $f(R_0) = 0$, если при $r = R_0$ находится идеально проводящий экран, и т.п.

Таким образом, отношение f_e'/f_e является однозначно определенной известной функцией, и для f мы имеем уравнение (9) с граничным условием типа Штурма-Лиувилля (11). Согласно соотношениям (6) радиальная часть $f(r)$ возмущения $\tilde{\xi}(r, \theta)$ пропорциональна радиальным частям v_r и H_r , т.е. $f \sim rv_r / J_0 \sim rH_r / J$ и соответственно $f_e \sim rH_r^e$.

Вблизи границы $u_\phi = 0$ области устойчивости покоящегося плазменного цилиндра ($u_z = v_\phi = 0$) величина $\kappa \rightarrow 0$, и за исключением случая $J = 0$ в уравнении (9) можно пренебречь всеми членами $\sim \kappa$. Далее $\kappa \rightarrow 0$ при $c_T^2 \rightarrow \infty$ и при $H^2 \rightarrow \infty$. Если в (9) и (11) можно пренебречь членами порядка κ , мы приходим к уравнениям

$$\left(\frac{rs}{\beta} f' \right)' + \left(-\frac{m^2 s}{r} + \frac{4\alpha^2 r a^2}{\beta s} + Q' \right) f = 0, \quad (12)$$

$$\left\{ \frac{rs}{\beta} \frac{f'}{f} + Q + \frac{rJ_e^2}{\beta} \frac{f_e'}{f_e} + h_{\phi e}^2 \right\}_{r=R} = 0, \quad (13)$$

которые совпадают с полученными в [3] в предположении о несжимаемости жидкости.

Поскольку уравнение (9) описывает волны общего винтового типа $\sim \exp i(kz - m\phi - \omega t)$, то при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ из него легко получить уравнения соответственно для азимутальных и аксиально-симметричных волн.

Мы ограничимся далее случаем $J = \alpha H_z - h_\phi = 0$ или $kH = 0$, когда возмущения

направлены вдоль силовых линий магнитного поля. Если возмущения винтовые, то, поскольку $\alpha = \text{const}$, этот случай реализуется при $\mu = h_\varphi / H_z = \text{const}$; для аксиально-симметричных волн должно быть $H = H_\varphi$, а для азимутальных $H = H_z$.

При $J = 0$ уравнение (9) записывается в виде

$$\left(\frac{\rho r J_0^2 c_s^2 f'}{\beta c_s^2 - r^2 J_0^2} \right)' + \left\{ \frac{-m^2 \rho J_0^2}{r} + \frac{4\alpha^2 r \rho v_\varphi^2}{\beta} + \left(\frac{\beta c_s^2 Q - r^2 J_0^2 h_\varphi^2}{\beta c_s^2 - r^2 J_0^2} \right)' - \frac{r\beta(Q - h_\varphi^2)^2}{\rho(\beta c_s^2 - r^2 J_0^2)} \right\} f = 0, \quad (14)$$

где $c_s^2 = c_T^2 + H^2/\rho$. Рассмотрим некоторые случаи, когда из уравнения (14) можно просто получить условия появления неустойчивости, т.е. условия существования решений с частотой ω , содержащей мнимую часть.

1. А. Пусть плазма вращается как целое¹ ($v_\varphi = \text{const}$), так что $J_0 = -\alpha v_\varphi - v_\varphi = \text{const}$; тогда при $J_0 \rightarrow 0$ согласно (14) имеем

$$\left(\frac{\rho r}{\beta} f' \right)' + \left\{ -\frac{m^2 \rho}{r} + \frac{1}{J_0^2} \left[\frac{4\alpha^2 r \rho v_\varphi^2}{\beta} + (\rho v_\varphi^2 - h_\varphi^2)' - \frac{r(\rho v_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{\rho c_s^2} \right] \right\} f = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует [4], что необходимым условием устойчивости ($J_0^2 > 0$) плазменного цилиндра, граничащего с идеально проводящим кожухом, по отношению к винтовым волнам является положительность выражения в квадратных скобках:

$$\frac{4\alpha^2 r \rho v_\varphi^2}{\beta} + (\rho v_\varphi^2 - h_\varphi^2)' - \frac{r(\rho v_\varphi^2 - 2h_\varphi^2)^2}{\rho c_s^2} > 0. \quad (16)$$

Б. Если плазменный цилиндр с однородным продольным током ($h_\varphi = \text{const}$) вращается как целое ($v_\varphi = \text{const}$), то для длинноволновых колебаний ($\alpha^2 r^2 \ll 1$) в случае $v_\varphi^2 \ll c_s^2$ уравнение (14) примет вид

$$(\rho r f')' + \left\{ -\frac{m^2 \rho}{r} - \frac{\rho'}{J_0^2} (2J_0 v_\varphi + v_\varphi^2) \right\} f = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим цилиндр со свободной границей и без поверхностных токов; тогда $J_e(R) = 0$ и граничное условие (11) запишется в виде

$$\left\{ J_0^2 \frac{r f'}{f} + 2J_0 v_\varphi + v_\varphi^2 \right\}_{r=R} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) и граничное условие (18) удовлетворяются решением $f \sim r^m$, откуда для частоты ω получаем выражение $\omega = (1 - m \pm \sqrt{1 - m}) v_\varphi$. Если продольного тока нет, то случай $J = 0$ соответствует азимутальным волнам. Этот случай рассмотрен в работе [5], а для конкретного распределения плотности $\rho \sim \exp(-qr^2)$ – в работе [6]. При $\rho = \text{const}$ уравнение (14) решается точно [3], и для длинноволновых колебаний мы получаем, естественно, ту же формулу для ω , поскольку она не содержит ρ . Таким образом, при произвольной зависимости $\rho(r)$ вращающийся как целое плазменный шнур со свободной границей гидродинамически неустойчив относительно возмущений, параллельных \mathbf{H} . Инкремент развития неустойчивости $\sqrt{m-1} v_\varphi$ растет с m , что указывает на тенденцию к расшнуровыванию вращающейся плазмы.

2. Для аксиально-симметричных волн во вращающейся плазме при $H = H_\varphi$ уравне-

¹ Здесь это ограничение не является существенным.

ние (14) принимает вид

$$\left(\frac{\rho c_s^2}{c_s^2 - v_\Phi^2} \frac{f'}{r} \right)' + \left\{ -\frac{k^2 \rho}{r} + \frac{4\rho v_\Phi^2}{r v_\Phi^2} + \left[\frac{c_s^2 (\rho v_\Phi^2 - h_\Phi^2) - v_\Phi^2 h_\Phi^2}{v_\Phi^2 (c_s^2 - v_\Phi^2)} \right]' - \frac{r (\rho v_\Phi^2 - h_\Phi^2)^2}{\rho v_\Phi^2 (c_s^2 - v_\Phi^2)} \right\} f = 0. \quad (19)$$

При $v_\Phi^2 \rightarrow 0$ из него получается уравнение типа (15), откуда следует необходимое условие устойчивости

$$\frac{4\rho v_\Phi^2}{r} - (\rho v_\Phi^2 - h_\Phi^2)' - \frac{r (\rho v_\Phi^2 - h_\Phi^2)^2}{\rho c_s^2} > 0. \quad (20)$$

Достаточность этого условия для устойчивости по отношению к аксиально-симметричным возмущениям установлена в работе [7]. Для невращающейся плазмы ($v_\Phi = 0$) условие (20) совпадает с необходимым условием устойчивости плазмы с замкнутыми силовыми линиями, которое вытекает из критерия Кадомцева [8]:

$$-w \left(\frac{\nabla u}{u} \right)^2 < \nabla u \nabla p < \gamma p \frac{(\nabla u)^2}{|u|}, \quad \text{где } u = -\oint \frac{dl}{H}, \quad w = \oint H dl \text{ при } H = H_\Phi.$$

3. Для азимутальных волн ($J_0 = -\frac{\omega}{m} - v_\Phi$) при $H = H_z$ уравнение (14) дает

$$\left(\frac{\rho r J_0^2 c_s^2 f'}{c_s^2 - r^2 J_0^2} \right)' + \left\{ \frac{-m^2 \rho J_0^2}{r} + \left[\frac{c_s^2 (2\rho J_0 v_\Phi + \rho v_\Phi^2)}{c_s^2 - r^2 J_0^2} \right]' - \frac{r (2\rho J_0 v_\Phi + \rho v_\Phi^2)^2}{\rho (c_s^2 - r^2 J_0^2)} \right\} = 0. \quad (21)$$

Устремляя J_0 к нулю, аналогично предыдущему получим критерий устойчивости относительно азимутальных (желобковых) возмущений в виде

$$(\rho v_\Phi^2)' - \frac{\rho r v_\Phi^4}{c_s^2} > 0. \quad (22)$$

Отсюда следует, что в случае однородного вращения ($v_\Phi = \text{const}$) для устойчивости необходимо $\rho' > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
2. Соловьев Л.С. Нелинейные гидромагнитные колебания плазменного шнура: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1962.
3. Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 1316.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Вандакуров Ю.А. // Журн. техн. физики. 1963. Т. 33. С. 9.
6. Rosenbluth M.H., Krall N.A., Rostoker N. // Nucl. Fusion. Suppl. 1962. Pt 1. P. 143.
7. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Успехи физ. наук. 1961. Т. 73. С. 4.
8. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 4. С. 382.

О ТИПИЧНОЙ СТРУКТУРЕ ТОРОИДАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

Если силовые линии магнитного поля заполняют некоторую тороидальную область V_i , не имеют в ней особых точек и не покидают ее, то магнитное поле, содержащее такую область, называют тороидальным. Поле может состоять только из области V_i ; таково, например, поле внутри произвольно мятой тороидальной идеально проводящей трубы, на поверхности которой $H_n = 0$. Однако область V_i может составлять лишь часть более общего поля (поле может содержать также и несколько тороидальных областей). Тогда границу рассмотренной выше области мы будем называть сепаратрисой, а область V_i – внутренней областью тороидального магнитного поля.

Будем пока предполагать, что сепаратриса – замкнутая тороидальная поверхность без щелей. К тороидальным полям следует причислить также "прямые" поля, периодические вдоль оси z . Очевидно, один период L такого поля топологически эквивалентен тору.

Ранее [1] нами было показано, что если прямое поле обладает симметрией, в наиболее общем случае винтовой, то уравнения силовых линий имеют интеграл – уравнение магнитных поверхностей:

$$\Psi = A_z(r, \theta) + \alpha r A_\varphi(r, \theta) = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь A_z и A_φ – компоненты векторного потенциала, $\theta = \varphi - \alpha z$, $\alpha = 2\pi/L$, где L – период поля.

Пусть среди магнитных поверхностей такого поля существуют магнитные поверхности, диаметр которых равен нулю. Эта вырожденная поверхность является винтовой силовой линией, которая может быть найдена из условий

$$\partial\Psi/\partial r = 0, \quad \partial\Psi/\partial\theta = 0, \quad (2a)$$

$$(\partial^2\Psi/\partial r^2)(\partial^2\Psi/\partial\theta^2) - (\partial^2\Psi/\partial r\partial\theta)^2 > 0. \quad (2b)$$

Такая линия, замыкающаяся сама на себя на одном периоде, называется магнитной осью. Число таких магнитных осей в магнитном поле может быть самым различным. Поверхности, отделяющие области с разными магнитными осями, имеют ребра и называются сепаратрисами.

Если взять простейшее безвихревое, так называемое трехзаконное магнитное поле, задав его скалярным потенциалом

$$\Phi = H_0 z + h_3 I_3(3\alpha r) \sin 3(\varphi - \alpha z), \quad (3)$$

то у такого поля имеется одна магнитная ось – ось z и три ребра сепаратрисы, являющиеся винтовыми линиями с шагом $L = 2\pi/\alpha$. Сечение плоскостью $z = \text{const}$ магнитных поверхностей (1) такого поля изображено на рис. 1.

Силовые линии, лежащие на магнитных поверхностях, несмотря на условие $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, обвивают магнитную ось [2]. Это обвивание можно характеризовать параметром прокручивания ω (Ψ), обратное значение которого $1/\omega$ равно среднему числу периодов, необходимых для обхода магнитной оси. Если ω – рациональное число m/n , то магнитная поверхность состоит из силовых линий, замыкающихся (в топологическом смысле) после n периодов¹. Если же силовая линия не замыкается, то она всюду плотно покрывает поверхность.

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 45. С. 955–959.

Исключения составляют сепаратрисы, на которых имеется лишь конечное число замыкающихся силовых линий, к которым асимптотически прижимаются остальные линии поверхности.

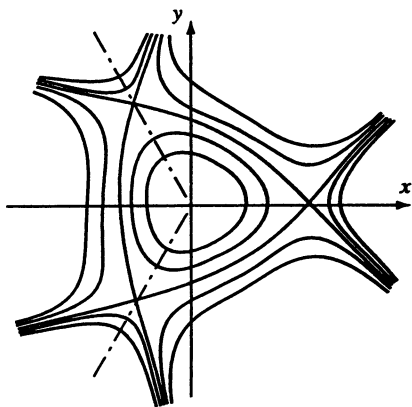


Рис. 1

Если нарушить симметрию поля, например наложить возмущение с другой симметрией² или изогнуть прямое поле в тор, то уравнения силовых линий уже не будут иметь общего интеграла, аналогичного (1), а следовательно, вообще говоря, не существует однозначных магнитных поверхностей. Однако, если у "прямого" поля имеется постоянная z -составляющая H_0 , много большая, чем периодическая часть поля $\mathbf{h}(r, \varphi; z)$, или же у поля, свернутого в тор, имеется составляющая $H_\varphi = H_0 a/r$, много большая составляющей $\mathbf{h}(r, z; \varphi)$, периодичной по φ , то, как показано в [3], уравнения силовых линий, усредненные по z или соответственно по φ , имеют интеграл. Во втором случае он имеет вид

$$\psi = \overline{rA_\varphi} + H_0^{-1} r^2 \overline{h_z \hat{h}_r} = \text{const.} \quad (4)$$

Здесь черта означает усреднение по φ , а \hat{h}_r – переменную часть интеграла $\int_0^\varphi \tilde{h}_r d\varphi$ от переменной части $\tilde{h}_r \equiv h_r - \overline{h}_r$.

Таким образом, и в этом случае существуют магнитные поверхности, но в отличие от прежних точных, это – приближенные или адиабатические поверхности. В реальных стеллараторах наблюдаемые с помощью электронных пучков магнитные поверхности относятся к этому классу.

При росте амплитуды периодической части поля и возрастании степени асимметричности³ структура поля, характеризуемая вложенными друг в друга адиабатическими поверхностями, должна все более явственно отличаться от истинной структуры поля [4]. Однако и теперь можно составить себе представление о структуре поля.

Действительно, если ω при малых \mathbf{h} переменна, то существует всюду плотное множество адиабатических поверхностей, на которых $\omega = m/n$ является рациональным числом. А это означает, что на этих поверхностях существуют силовые линии, которые замыкаются сами на себя после n обходов (однако теперь, как мы увидим ниже, такие линии не покрывают целую поверхность). При возрастании \mathbf{h} и все возрастающем разрушении адиабатических поверхностей по-прежнему будут сохраняться замкнутые силовые линии. Это следует, при отсутствии ухода силовых линий из V_i , из теоремы о неподвижной точке, гласящей, что при любом непрерывном отображении замкнутой односвязной области самой на себя имеется по крайней мере одна неподвижная точка [5]. При этом, если разрушение магнитных поверхностей достаточно мало, то замкнутые линии будут находиться вблизи тех поверхностей, на которых ω рационально. Так, например, было показано [6, 7] при помощи численного счета, что сильно возмущенное поле действительно содержит систему замкнутых силовых линий, замыкающихся после $n = 1, 12, 23$ и т.д. периодов, причем эти силовые линии лежат вблизи тех поверхностей, на которых они должны быть по данным метода усреднения. Однако число линий, замыкающихся один раз после n обходов, оказывается не бесконечным, а конечным, в частности [7] равным двум.

² Примером могут служить возмущения винтового поля (3) аксиально-симметричным гофрированным полем.

³ Под степенью асимметричности можно понимать соотношение амплитуд полей с разной степенью симметрии.

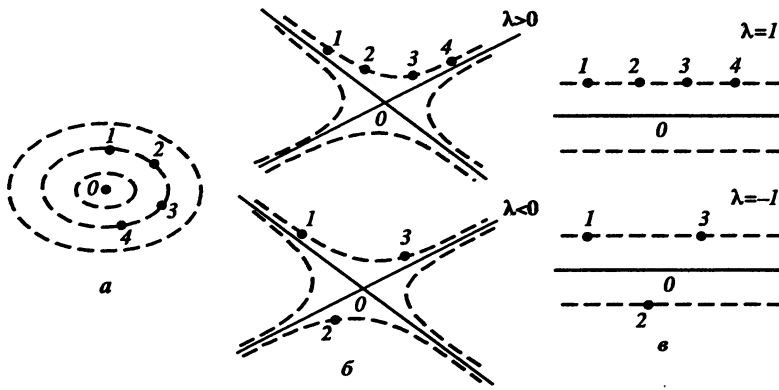


Рис. 2

В окрестности силовой линии $r = r_0(\varphi)$, $z = z_0(\varphi)$, замыкающейся после n обходов тора, структура поля легко определяется, если уравнения силовых линий допускают линеаризацию. Действительно, подставляя

$$z = z_0(\varphi) + \xi, \quad r = r_0(\varphi) + \eta$$

в уравнения силовой линии и ограничиваясь членами порядка ξ и η , получим линейную систему с коэффициентами, период которых равен $2\pi n$, где 2π – период тора.

Если ξ_1, η_1 – координаты изображающей точки силовой линии, т.е. точки пересечения силовой линии с плоскостью $\varphi = \text{const}$, то через период эти координаты будут равны

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix},$$

где матрица (α_{ik}) в силу сохранения потока ($\text{div } \mathbf{H} = 0$) имеет детерминант, равный единице⁴. Собственные значения (λ_1, λ_2) матрицы (α_{ik}) являются комплексно-сопряженными или действительными числами, связанными соотношением $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, и поэтому возможны следующие три случая:

- 1) $\lambda_1, \lambda_2 = e^{\pm i\mu}$, μ – вещественно;
- 2) $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1/\lambda, \lambda > 0$ или $\lambda < 0, \lambda$ – вещественно;
- 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$.

В первом случае изображающая точка движется вокруг неподвижной точки – следа замкнутой силовой линии – по эллипсам (рис. 2, а), во втором – по гиперболам, причем, если $\lambda > 0$, то изображающая точка движется все время по одной ветви, а при $\lambda < 0$ она перескакивает с одной ветви на другую (рис. 2, б). Наконец, в последнем случае, при $\lambda = \pm 1$ существует поверхность, проходящая через неподвижную точку, все силовые линии на которой замкнуты, а изображающие точки в ее окрестности сдвигаются без перескока или с перескоком вдоль соседних поверхностей (рис. 2, в). Точки без перескока мы будем называть точками первого рода, тогда как точки с перескоком – точками второго рода.

Очевидно, общая структура поля является своеобразным сложением окрестностей замкнутых силовых линий. При этом в изображающей плоскости для разных n

⁴ Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением ближайшей окрестности замкнутой линии, величину H_z на данной силовой линии при $z = 0$ и $z = 2\pi$ можно считать постоянной.

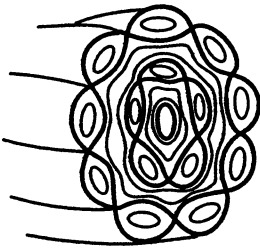


Рис. 3

мы будем получать, вообще говоря, разные картины, приобретающие все более сложную структуру при $n \rightarrow \infty$.

Поля, соответствующие вырожденному случаю $\lambda = +1, -$ это поля с точными магнитными поверхностями. Это вырождение, вообще говоря, снимается, если поле становится несимметричным. Хотя сейчас нет детальных данных по динамике разрушения несимметричных полей, однако можно думать [7], что при малой асимметрии поверхности с $\omega = 1/n$, расщепляясь, принимают вид, изображенный на рис. 3, т.е. вокруг одной из силовых линий возникает волокно, склеивающееся вдоль другой силовой линии, которая

в плоскости $z = \text{const}$ изображается гиперболическими точками. Этим объясняется появление $2n$ неподвижных точек в слое с $\omega = 1/n$. Таким образом, вокруг каждой "эллиптической" замкнутой магнитной силовой линии, являющейся магнитной осью порядка n , возникают свои магнитные поверхности, образованные силовыми линиями, обвивающими эту ось n -го порядка.

При возрастании неадиабатичности скорость вращения вокруг осей n -го порядка возрастает [7], и, когда она становится сравнимой со скоростью вращения вокруг O – первоначальной магнитной оси первого порядка, структура поля снова перестраивается.

Так, в приведенном в [7] примере "устойчивые" эллиптические точки при $x < x^{**}$ превращаются в гиперболические точки второго рода, и, следовательно, все неподвижные точки становятся гиперболическими. Выше мы предполагали, что силовые линии не покидают области V_i . В работах Мельникова [8] было установлено, что при возмущениях симметричных полей у сепаратрисы, вообще говоря, появляются щели. При этом замкнутые силовые линии могут полностью исчезнуть. Однако, если $d\omega/d\psi \neq 0$ и щели не очень велики, то, по всей вероятности, картина в типичных случаях останется прежней, о чем говорит уже цитированный пример [7].

Наконец, при еще большей неадиабатичности системы роль щелей становится, по всей вероятности, определяющей, и тороидальное поле практически исчезает.

Резюмируя, можно сказать, что магнитные поверхности, существуют лишь как вырождение более общих структур поля. У полей, близких к симметричным и слабо неадиабатичным, структура поля волокнистая, типа изображенной на рис. 3. У полей с достаточно большой неадиабатичностью начинается сильное перепутывание силовых линий, поскольку все или, по крайней мере, большинство окрестностей замкнутых силовых линий становятся гиперболическими, первого и второго рода. Наконец, при дальнейшем росте неадиабатичности область полностью исчезает из-за роста щелей в сепаратрисе.

Разумеется, в конкретных случаях, мы можем наблюдать все эти стадии одновременно, причем область наибольшей неадиабатичности лежит в окрестности сепаратрисы [6, 7].

Следует подчеркнуть, что все приводившиеся в данной работе рассуждения использовали только уравнение непрерывности $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и не связаны с безвихревым характером поля.

Можно думать, что обнаруженное "квантование" плазменных шнуров [9], волокнистый характер астрофизических магнитоплазменных образований связаны с указанной особенностью невырожденного магнитного поля. В пользу этого утверждения говорит тот факт, что неустойчивости в плазменных тороидальных конфигурациях, состоящих из вложенных поверхностей, развиваются около замкнутых силовых линий (неустойчивости Шафранова–Крускала и Сайдема, конвективная и токово-конвективная неустойчивость). Эти неустойчивости можно рассматривать как тенденцию к снятию вырождения, о котором говорилось выше.

Образующаяся при этом волокнистая структура плазменного шнура типа рис. 3 может оказаться в целом достаточно устойчивой, поскольку плазменный шнур будет состоять из перевитых плазменных волокон, охватывающих кольцевую ось тора 0, 1, 2 и т.д. раз. Эти волокна могут находиться как в состоянии покоя, так и некоторого стационарного движения. В свете работы Мерсье [10] можно думать, что и отдельные волокна будут достаточно устойчивы.

В заключение мы хотим выразить свою глубокую благодарность М.А. Леонтовичу за плодотворное обсуждение вопросов, затронутых в данной работе. Мы благодарны также Н.М. Зуевой и М.С. Михайловой за проверку на машине ряда приведенных в статье соображений. Наконец, нам хочется поблагодарить И.М. Гельфанда и М.И. Граева за постоянный интерес к данным вопросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. С. 516.
2. Спитцер Л. Исследование на стеллараторе // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 505.
3. Корблев Л.В., Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1961. Т. 31. С. 1153.
4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М. и др. // Там же. С. 1164.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
6. Гельфанд И.М., Граев М.И., Зуева Н.М. и др. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. С. 1286.
7. Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И. // Там же. Т. 153. С. 5.
8. Мельников В.К. // Там же. 1962. Т. 144. С. 747.
9. Butt E.P. // Instrum. and Measur. N.Y.; London: Acad. Press. 1961. Vol. 2. P. 938.
10. Mercier C. // Nucl. Fusion. 1962. Suppl. 2. P. 801.

О СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

В настоящей работе рассматриваются плоские и аксиально-симметричные течения проводящей сжимаемой жидкости. Получена система уравнений, описывающая течения вдоль эквипотенциалей электрического поля. Рассмотрен класс решений этих уравнений, а также решения для течений в узких каналах.

Мы предположим для простоты, что жидкость невязкая и нетеплопроводная, тогда стационарное течение описывается следующими уравнениями магнитной гидродинамики [1]:

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + [\mathbf{j}\mathbf{H}], \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\epsilon} = 0, \quad \rho T \mathbf{v} \nabla S = v_m \mathbf{j}^2, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \mathbf{E} = v_m \mathbf{j} - [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \nabla \Phi$, $\mathbf{j} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{H}$, $v_m = c^2/(4\pi\sigma)$, ρ – плотность, p – давление, σ – проводимость, T – температура, S – энтропия, \mathbf{v} – скорость, $\mathbf{B} \equiv \sqrt{4\pi} \mathbf{H}$ – магнитное поле, \mathbf{E} – электрическое поле. Из (1) – (3) вытекает уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(W + \frac{v^2}{2} \right) + [\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{H}], \quad (4)$$

выражающее сохранение потока энергии \mathbf{q} . Здесь W – энтальпия, связанная с p и S термодинамическим соотношением

$$dW = \frac{dp}{\rho} + T dS. \quad (5)$$

Рассмотрим течение в аксиально-симметричном канале поперек азимутального магнитного поля: $H = H_\phi$, $u_\phi = 0$. Введем для $\rho \mathbf{v}$ и \mathbf{j} функции тока ψ и $I = rH_\phi$ согласно соотношениям

$$\begin{pmatrix} \rho v_z \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \psi \\ I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho v_r \\ j_r \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \psi \\ I \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Потребуем далее, чтобы поверхности $\psi = \text{const}$, на которых лежат линии тока жидкости, совпадали с эквипотенциальными поверхностями $\Phi = \text{const}$, т.е. $\Phi = \Phi(\psi)$. При этом из первого уравнения (3) вытекает, что $(\nabla I \nabla \psi) = 0$, т.е. линии тока жидкости $\psi = \text{const}$ и линии электрического тока $I = \text{const}$ образуют ортогональные семейства траекторий.

Для рассматриваемых аксиально-симметричных течений получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + I \Phi''(\psi) + T \frac{\nabla S \nabla \psi}{\rho^2 r^2 v^2} - U'(\psi) = 0, \quad (7a)$$

* Совместно с А.И. Морозовым // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154. С. 306–309.

$$W + \frac{v^2}{2} + I\Phi'(\psi) = U(\psi), \quad (7б)$$

$$\frac{I}{\rho r^2} - v_m \frac{v\nabla I}{\rho r^2 v^2} = \Phi'(\psi), \quad (7в)$$

$$\rho T v \nabla S = \frac{v_m}{r^2} (\nabla I)^2. \quad (7г)$$

Уравнение Бернулли (7б) вытекает из уравнения (4), (7в) вытекает из равенства $\epsilon = \nabla\Phi$, а (7а) – из уравнения Эйлера (1). В системе (7) неизвестными являются ψ , ρ и I , а $\Phi(\psi)$ и $W(\psi)$ – произвольные функции ψ . Если считать S функцией ψ и I , то член в (7а), пропорциональный T , можно записать в виде $T\partial S/\partial\psi$. Поскольку уравнения (7) определяют только производную $\partial S/\partial I$ вдоль линий тока $\psi = \text{const}$, то S как функцию от ψ можно задать произвольно, и, в частности, можно положить $\partial S/\partial\psi = 0$. Для течений идеально проводящей жидкости ($v_m = 0$) система (7) переходит в полученную в работе [2].

Аналогично плоские течения, не зависящие от z , при $H = H_z$, $v_z = 0$ описываются системой уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} + H\Phi''(\psi) + T \frac{\nabla S \nabla \psi}{\rho^2 v^2} - U'(\psi) = 0, \quad (8а)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + H\Phi'(\psi) = U(\psi), \quad (8б)$$

$$\frac{H}{\rho} - v_m \frac{v\nabla H}{\rho v^2} = \Phi'(\psi), \quad (8в)$$

$$\rho T v \nabla S = v_m (\nabla H)^2, \quad (8г)$$

где функция тока ψ введена соотношениями $\rho v_x = \partial\psi/\partial y$, $\rho v_y = -\partial\psi/\partial x$, а компоненты \mathbf{j} определяются через \mathbf{H} равенствами $j_x = \partial H/\partial y$, $j_y = -\partial H/\partial x$.

Уравнение (8г) с учетом (8б) и (8в) можно преобразовать к виду

$$\rho v \nabla \frac{v^2}{2} + v \nabla \left(p + \frac{H^2}{2} \right) = 0. \quad (8д)$$

Будем искать решение (8), задавая ρ как известную функцию скорости $\rho = F'(v^2)$; тогда согласно (8д) имеем

$$\frac{F}{2} + p + \frac{H^2}{2} = G(\psi). \quad (9)$$

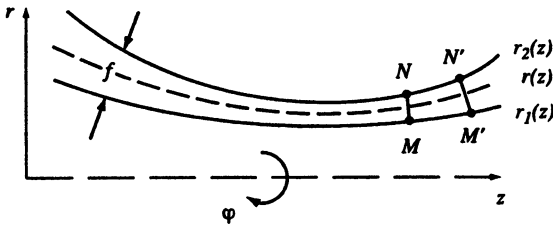
Исключая из (8б) и (9) давление $p = \kappa \rho W$, где $\kappa \equiv (\gamma - 1)/\gamma$, найдем $H = H(v^2)$:

$$H = \kappa \Phi' F' \pm \sqrt{(\kappa \Phi' F')^2 - F + 2G + \kappa(v^2 - 2U)F'}. \quad (10)$$

Из уравнения (8в) получим квадратуру, определяющую зависимость v от длины дуги s вдоль линии тока:

$$s = 2v_m \int \frac{H'(v^2) dv}{F(v^2) - F'(v^2)\Phi'(\psi)}. \quad (11)$$

Для нахождения линий тока в общем случае необходимо решать уравнение (8а). В простейшем случае $\Phi'' = 0$, $U' = 0$, $\partial S/\partial\psi = 0$ и $\rho = \text{const}$ задача сводится к решению



уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ с заданной соотношением (11) нормальной производной $\partial\psi/\partial u$ при $u = 0$. Если ограничиться приближением медленности изменения параметров течения вдоль оси x , то, пренебрегая членами $\sim (\partial\psi/\partial x)^2$ и $\partial^2\psi/\partial x^2$, в указанном случае $\Phi'' = U' = \partial S/\partial\psi = 0$ из (8а) полу-

чим $\psi = F'(v^2)uv$, где скорость $u(x)$ можно приближенно считать равной $u(s)$, определяемой уравнением (11).

Если расстояние f между электродами мало по сравнению с характерными размерами, то уравнения (7) сводятся к системе

$$\rho f v = \alpha = \text{const}, \quad (12a)$$

$$\frac{I}{\rho r^2} - \frac{v_m}{\rho r^2 v} \frac{dI}{ds} = \beta = \text{const}, \quad (12б)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \beta I = U = \text{const}, \quad (12в)$$

$$\rho v T \frac{dS}{ds} = \frac{v_m}{r^2} \left(\frac{dI}{ds} \right)^2. \quad (12г)$$

Здесь ds – элемент дуги средней линии $r = r(z)$ (рисунок).

В рассматриваемом случае узкого зазора между идеально проводящими электродами $r_1(z)$ и $r_2(z)$ требование $\Phi = \Phi(\psi)$ не является ограничением, и уравнения (12) могут быть получены непосредственно из (1)–(4). Действительно, первое из уравнений (3), записанное в виде интеграла по контуру $MNN'M'$, дает $\oint \epsilon dI = 0$, откуда получаем $\epsilon_{\perp} f = \text{const}$, т.е. уравнение (12б). Уравнение непрерывности (2) в интегральной форме $\oint \rho v dS = 0$, где интеграл берется по поверхности тороидальной области, ограниченной контуром $MNN'M'$, приводит к уравнению (12а). Аналогично, уравнение (4) дает $q_{\parallel} r f = \text{const}$, поскольку поток энергии q через боковые стенки равен нулю, отсюда с учетом (12б) получим уравнение (12в).

Добавляя к системе (12) уравнение состояния $p = p(\rho, T)$, мы получим пять уравнений для семи неизвестных: ρ, p, T, v, r, f, I , следовательно, две из этих величин можно задать произвольно. Заменим уравнение (12г) уравнением импульса

$$\rho v dv + \frac{1}{2r^2} dI^2 + dp = 0 \quad (13)$$

и зададим функции ρ и r в виде $\rho = F'(v^2)$, $r^{-2} = R'(I^2)$, тогда из (13) получим $F/2 + R/2 + p = G = \text{const}$. Исключая из (12в) энтальпию $W = p/(\kappa\rho)$, с помощью последнего соотношения получим

$$\kappa F' \left(\frac{v^2}{2} + \beta I - U \right) - \left(\frac{F}{2} + \frac{R}{2} - G \right) = 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) определяет $I = I(v^2)$. Выражение для $v = v(s)$ находим интегрированием (12б): $s = 2v_m \int \frac{I'(v^2) dv}{I - \beta F' / R'}$.

Дифференцируя (12) и исключая dp и ds , получим уравнение типа Гюгонио

$$\left(v^2 - c_T^2 - \frac{\beta^* I}{1 - v_m I'' / (vI')} \right) \frac{dv}{v} = c_T^2 \frac{d(rf)}{rf} + \frac{\rho r^2 \beta \beta^*}{1 - v_m I'' / (vI')} \frac{d(f/r)}{f/r}, \quad (15)$$

где $c_T^2 = \rho(\partial W/\partial \rho)_s$ – квадрат скорости звука, $\beta^* = \beta + \gamma v_m I / (\rho r^2 u)$. Из (15) следует, что при ускорении холодной плазмы ($p \ll H^2/2$) определяющей является величина f/r , а при обратном знаке неравенства – величина rf .

Плоские течения в узком канале описываются системой уравнений

$$\rho v f = \alpha = \text{const}, \quad (16a)$$

$$\frac{H}{\rho} - \frac{v_m}{\rho v} \frac{dH}{ds} = \beta = \text{const}, \quad (16б)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \beta H = U = \text{const}, \quad (16в)$$

$$\rho v T \frac{dS}{ds} = v_m \left(\frac{dH}{ds} \right)^2. \quad (16г)$$

Эти уравнения аналогичны (12), но число неизвестных здесь на единицу меньше. Аналогично предыдущему зададим $\rho = F'(v^2)$, тогда уравнение импульсов $\rho v dv + d(p + H^2/2) = 0$ дает $F + 2p + H^2 = 2G$, и, исключая отсюда p , с помощью (16в) найдем H в функции от v^2 :

$$H = \kappa \beta F' \pm \sqrt{(\kappa \beta F')^2 - F + 2G + \kappa(v^2 - 2U)F'}. \quad (17)$$

Пусть средней плоскостью канала является $y = 0$, тогда v как функция x определяется интегралом $x = 2v_m \int \frac{H'(v^2)dv}{H - \beta F'(v^2)}$. Для одномерной задачи аналогичное решение приведено в работе [3].

В заключение приведем уравнение Гюгонио для плоского течения, которое получается из (16):

$$\left(v^2 - c_T^2 - \frac{\beta^* H}{1 - v_m H''/(vH')} \right) \frac{dv}{v} = \left(c_T^2 + \frac{\rho \beta \beta^*}{1 - v_m H''/(vH')} \right) \frac{df}{f}. \quad (18)$$

Здесь $\beta^* = \beta + \gamma v_m H''/(\rho v)$. Уравнения (18) и (15) показывают, что при конечной проводимости ($v_m \neq 0$) скорость, при которой происходит обращение воздействий, зависит от производных магнитного поля вдоль скорости H' и H'' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц И.Е. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 550.
3. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.

РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА С ВИНТОВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ*

При изучении равновесия [1] и устойчивости [2]¹ тороидальных плазменных конфигураций в качестве невозмущенного состояния обычно выбираются конфигурации с системой вложенных магнитных поверхностей. При этом линеаризованные уравнения для возмущений имеют особенности на магнитных поверхностях, содержащих замкнутые силовые линии, так что при частоте возмущения $\omega \rightarrow 0$ в окрестности этих поверхностей решение стремится к бесконечности. Мы покажем далее, что появление особенностей связано с качественной перестройкой структуры магнитных поверхностей и что наличие сколь угодно малых статических возмущений приводит к конечным изменениям плазменных конфигураций, существенным для их устойчивости.

1. Цилиндрические магнитные поверхности с винтовыми возмущениями. Рассмотрим сначала статические возмущения системы вложенных цилиндрических поверхностей ($r = \text{const}$) магнитного поля $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}(r)$ в общем случае, не предполагая выполнения условий равновесия. Если возмущения имеют винтовую симметрию, так что теперь поле $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}(r) + \tilde{\mathbf{B}}(r, \theta)$, то возмущенные магнитные поверхности также обладают винтовой симметрией и в цилиндрических координатах r, φ, z описываются уравнением $\psi(r, \theta) = A_z + \alpha r A_\varphi = \text{const}$. При этом $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\theta = \varphi - \alpha z$, $L = 2\pi/\alpha$ – шаг винта возмущения, а функция ψ равна [3]

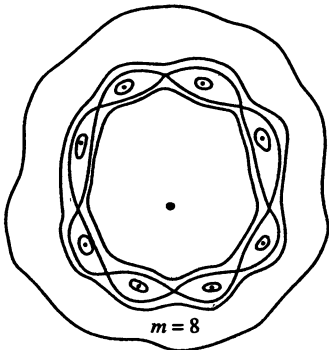
$$\psi = \int_0^r (\alpha r \bar{B}_z - \bar{B}_\varphi) dr + \tilde{\psi} = \int_0^r (\alpha - \bar{\mu}) \bar{B}_z r dr + f(r) \cos m\theta, \quad (1)$$

где $\bar{\mu} = \bar{B}_\varphi / r \bar{B}_z$ и в качестве возмущения $\tilde{\psi}(r, \theta)$ выбрана m -заходная гармоника винтового магнитного поля. Равенство $\bar{\mu} = \alpha$ означает, что шаг силовых линий невозмущенного поля $\bar{\mathbf{B}}$ совпадает с шагом винта возмущения и определяет радиусы \bar{r}_s цилиндров, которые в невозмущенном состоянии образованы "замкнутыми" (т.е. периодическими с периодом L) силовыми линиями. Легко видеть, что вблизи $r = \bar{r}_s$ при достаточно произвольной функции $f(r)$, вообще говоря, образуется волнистая структура магнитных поверхностей, показанная на рисунке. Действительно, приравнявая нулю производные ψ_r и ψ_θ , мы находим координаты особых точек: $m\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$,

$(2m - 1)\pi$ и $(\alpha - \bar{\mu}) \bar{B}_z r \pm f' = 0$. Тип особой точки определяется знаком инварианта $\sum \equiv \psi_{rr} \psi_{\theta\theta} - \psi_{r\theta}^2 \equiv$

$\equiv \pm m^2 r f \bar{B}_z \bar{\mu}'$. Эллиптические и гиперболические особые точки (при малых f) лежат на окружностях $r = \bar{r}_s \pm \pm f' / \bar{\mu}' \bar{B}_z \bar{r}_s$. Уравнение сепаратрисы волокон с точностью до членов $\sim f^{1/2}$ есть $r = \bar{r}_s \pm [2f \cos m\theta / (\bar{\mu}' \bar{B}_z \bar{r}_s)]^{1/2}$.

Появление волокон становится очевидным, если мы заметим, что функция $\tilde{\psi}(r)$ имеет максимум при $r = \bar{r}_s$, и, следовательно, профиль $\psi(r, \theta)$ при периодическом по θ возмущении будет, вообще говоря, иметь ряд чередующихся по θ максимумов и минимумов. Рассмотрим



* Совместно с А.И. Морозовым // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. С. 831–834:

¹ В [1, 2] можно найти ссылки на соответствующую литературу.

ренный пример наглядно показывает, что магнитные поверхности с замкнутыми силовыми линиями являются вырожденными [4, 5], и это вырождение может быть снято, в частности, в и н т о в ы м возмущением, так что результирующие магнитные поверхности с волокнами описываются точным интегралом уравнений силовых линий $\psi(r, \theta) = \text{const}$. Поскольку приведенные рассуждения не предполагали выполнения условий равновесия, они применимы, например, к вакуумному полю: $\bar{B}_z = \text{const}$, $\bar{B}_\phi = \text{const}/r$, $f(r) = brI'_m(\alpha nr)$.

2. Равновесные винтовые плазменные конфигурации. Рассмотрим теперь равновесную плазменную конфигурацию, представляющую собой круглый цилиндр с распределенными токами при малой винтовой деформации его поверхности. Из уравнения равновесия $4\pi\nabla p = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ ($\mathbf{j} \equiv \text{rot } \mathbf{B}$) при условии винтовой симметрии вытекают равенства

$$\frac{\partial(p, \psi)}{\partial(r, \theta)} = 0, \quad \frac{\partial(I, \psi)}{\partial(r, \theta)} = 0, \quad (2)$$

где $I \equiv B_z + \alpha r B_\phi$. Из (2) следует, что p и I являются функциями ψ , причем если $p = p(\psi)$ и $I = I(\psi)$, то уравнения (2) удовлетворяются везде, где существуют производные $dp/d\psi$ и $dI/d\psi$.

Используя функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$, мы можем представить уравнение равновесия в виде одного уравнения для функции ψ [6, 7]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2\alpha I}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta} \frac{dI^2}{d\psi} + 4\pi \frac{dp}{d\psi} = 0, \quad (3)$$

где $\beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2$. Пусть в невозмущенном состоянии существует магнитная поверхность $r = \bar{r}_s$, где $\partial\bar{\psi}/\partial r = 0$, т.е. $\alpha = \bar{\mu}$. Покажем, что условия равновесия для возмущенного состояния с необходимостью приводят либо к расщеплению магнитных поверхностей и образованию волокон, либо к тому, что на магнитной поверхности с $\partial\psi/\partial n = 0$ также $\partial p/\partial n = 0$ и $\partial I/\partial n = 0$ (\mathbf{n} — нормаль к сечению магнитной поверхности плоскостью $z = \text{const}$). Действительно, компонента тока, параллельная винтовой

линии, пропорциональна $j_z + \alpha r j_\phi = \frac{1}{2} \frac{dI^2}{d\psi} + 4\pi\beta \frac{dp}{d\psi}$. На магнитной поверхности с

$\partial\psi/\partial n = 0$, если $\partial p/\partial n$ и $\partial I/\partial n$ не равны нулю, оба члена в правой части бесконечны. В невозмущенном состоянии $\psi = \bar{\psi}(r)$ эти члены компенсируют друг друга. Однако в случае существенной зависимости $r = r(\theta)$ такая компенсация при конечных токах невозможна. Магнитная поверхность, на которой $\partial\psi/\partial n = 0$, не может также остаться круглой, так как граничные условия на ней $\psi = \text{const}$, $\partial\psi/\partial r = 0$ приводят к аксиально-симметричному решению уравнения (3), что противоречит предположению о винтовой деформации границы. Таким образом, если пространственные производные от p и I не обращаются в нуль, то обязательно появляются особые точки семейства $\psi(r, \theta) = \text{const}$.

Разложим $\psi(r, \theta)$ в окрестности особой точки $r = r_s$, $\theta = 0$ (где $\psi_r = \psi_\theta = 0$): $\psi = \psi_0 + \psi_{rr} \rho^2/2 + \psi_{\theta\theta} \theta^2/2 + \psi_{r\theta} \rho\theta + \dots$ Здесь $\rho = r - r_s$, а θ отсчитывается от особой точки. Если мы подставим разложение $p = p_0 + p_r \rho + p_\theta \theta + p_{rr} \rho^2/2 + p_{\theta\theta} \theta^2/2 + p_{r\theta} \rho\theta + \dots$ и $I = I_0 + I_r \rho + I_\theta \theta + I_{rr} \rho^2/2 + I_{\theta\theta} \theta^2/2 + I_{r\theta} \rho\theta + \dots$ в уравнения (2) и приравняем линейные члены, то найдем, что либо $\Sigma \equiv \psi_{rr} \psi_{\theta\theta} - \psi_{r\theta}^2 = 0$, либо $p_r = p_\theta = I_r = I_\theta = 0$. Равенство $\Sigma = 0$ означает, что особая точка вырожденная, и мы имеем семейство вложенных магнитных поверхностей. Выше было показано, что такая ситуация может реализоваться, только если на особой магнитной поверхности $p_r = I_r = 0$. Следовательно, во

всех случаях первые производные p и I равны нулю, а это означает, что при наличии сколь угодно малых возмущений поля на распределении давления $p(r)$ (а также $I(r)$) образуются "ступеньки", где $p'(r) = 0$ (и $I'(r) = 0$). Из приравнивания квадратичных членов в (2) вытекают равенства $p_{rr}/\psi_{rr} = p_{\theta\theta}/\psi_{\theta\theta} = p_{r\theta}/\psi_{r\theta} = v = \text{const}$, $I_{rr}/\psi_{rr} = I_{\theta\theta}/\psi_{\theta\theta} = I_{r\theta}/\psi_{r\theta} = \varepsilon = \text{const}$. Поэтому в окрестности особой точки $p = p_0 + v\psi + \dots$, $I = I_0 + \varepsilon\psi + \dots$, и, следовательно, существует регулярное решение уравнения (3), которое можно представить в виде $\psi = \bar{\psi}(r) + f_m(r) \cos m\theta$. При таком выборе возмущения с необходимостью появляются особые точки эллиптического и гиперболического типа семейства $\psi(r, \theta) = \text{const}$.

3. О локальном критерии устойчивости Сайдема. Линеаризованное по $\tilde{\psi} = f_m(r) \cos m\theta$ уравнение (3) имеет вид

$$\left(\frac{rf'_m}{\beta}\right)' - \left\{ \frac{m^2}{r} + \frac{1}{r^2 J} \left(\frac{r^3 J'}{\beta}\right)' + \frac{4\alpha^2 B_\varphi}{\beta^2 J} + \frac{8\pi\alpha^2 p'}{\beta J^2} \right\} f_m = 0, \quad (4)$$

где $J \equiv \alpha B_z - B_\varphi/r = (\alpha - \mu)B_z$. Это уравнение совпадает с уравнением, полученным Сайдемом [8] для радиального смещения $\xi_r \sim \tilde{\psi}/rJ$ при частоте $\omega = 0$. В соответствии со сказанным оно имеет особую точку при $J = 0$ ($\mu = \alpha$), в окрестности которой при $p'(r) \neq 0$ не существует ограниченного решения. В связи с последним отметим еще раз, что функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$, вообще говоря, изменяются при статической деформации равновесной конфигурации, и если рассматривать цилиндрический шнур как предел возмущенного шнура, то в точках, где $J = 0$, должно быть и $p' = 0$.

При исследовании устойчивости плазмы возникает вопрос о выборе равновесной конфигурации. Этот выбор достаточно произволен и определяется обычно простотой решения задачи. В частности, локальный критерий устойчивости Сайдема [8] $32\pi p' + rB_z^2(\mu/\mu)^2 > 0$ получен из анализа уравнения (4) в окрестности особой точки $J = 0$. При этом в качестве исходной равновесной конфигурации бралась конфигурация с цилиндрическими магнитными поверхностями и с $p'(r) < 0$. Однако, как мы видели выше, при наличии сколь угодно малых статических возмущений (которые можно разложить на винтовые гармоники) равновесная конфигурация претерпевает существенные изменения как раз в окрестности особой точки $J = 0$. Поэтому если мы в качестве исходной равновесной конфигурации выберем цилиндрический плазменный шнур, рассматриваемый как предел возмущенного шнура при возмущении, стремящемся к нулю, то, поскольку $p'(r_s) = 0$, локальный критерий устойчивости плазмы сводится просто к условию устойчивости магнитного поля $\mu' \neq 0$ в окрестности замкнутой силовой линии [3].

Отсюда видно, что вопрос о выборе начальной равновесной конфигурации не является тривиальным. В частности, процесс развития неустойчивости может свестись просто к образованию устойчивой волокнистой структуры плазмы [4].

4. Винтовые равновесные плазменные конфигурации при линейных функциях $p(\psi)$ и $I(\psi)$. Рассмотрим в качестве примера равновесные конфигурации при $p(\psi) = p_0 + v\psi$, $I(\psi) = I_0 + \varepsilon\psi$. В этом случае уравнение (4) является точным и может быть решено в бесселевых функциях. Решения невозмущенного уравнения (3) и уравнения для винтового возмущения $\tilde{\psi} = f_m(r) \cos m\theta$ при $\varepsilon \neq 0$ имеют соответственно вид

$$\bar{\psi} = A_0 \left[J_0(\varepsilon r) + \alpha r J_1(\varepsilon r) \right] - \frac{I_0}{\varepsilon} - \frac{v}{\varepsilon^2} \left(\beta + \frac{2\alpha}{\varepsilon} \right), \quad (5)$$

$$f_m = A_1 [\epsilon J_m(\kappa r) - \alpha r \kappa J'_m(\kappa r)], \quad \kappa^2 \equiv \epsilon^2 - \alpha^2 m^2. \quad (6)$$

Если же $\epsilon = 0$, то решениями будет $\bar{\psi} = I_0 \alpha r^2 / 2 - \nu \beta^2 / (8 \alpha^2)$, $f_m = b_m r I'_m(\alpha m r)$. При этом невозмущенное распределение давления имеет минимум при $r = 0$ и один максимум при $r = \bar{r}_s$. Если $\epsilon \neq 0$, невозмущенные поля равны $B_\varphi = b_{\varphi 0} r + B_{z1} J_1(\epsilon r)$ и $B_z = B_{z0} + B_{z1} J_0(\epsilon r)$, где $\epsilon = 2 \alpha \mu_0 / (\alpha - \mu_0)$, $\mu_0 = b_{\varphi 0} / B_{z0}$. Они представляют собой суперпозицию однородного продольного поля, азимутального поля однородного тока и полей бессиловой равновесной конфигурации. В этом случае уравнение $\partial \bar{\psi} / \partial r = 0$ имеет ряд решений $r = \bar{r}_{sn}$, в окрестности которых образуются волокна.

Заметим, кроме того, что при дискретных значениях $\alpha = \alpha_{mn}$, определяемых равенством $\kappa \alpha = x_{mn}$, где x_{mn} — корни $f_m(\kappa r)$, мы имеем винтовую структуру плазменного шнура с цилиндрической поверхностью $r = a$.

5. Устойчивость бессиловой плазменной конфигурации. Частными случаями (5) являются случай однородного тока в однородном продольном поле ($B_{z1} = 0$) и случай бессиловой равновесной конфигурации ($B_{z0} = b_{\varphi 0} = 0$).

В первом случае статические винтовые возмущения с периодом $L = 2\pi/\mu_0$ полностью разрушают равновесную конфигурацию [3], все магнитные поверхности которой состоят из замкнутых силовых линий.

Во втором случае бессиловой равновесной конфигурации наличие решения (6) позволяет получить условие устойчивости для плазмы, опирающейся на идеально проводящий кожух, расположенный при $r = a$. Действительно, следуя Б.Б. Кадомцеву [2], заключаем, что плазма устойчива, если $\kappa^2 a^2 < x_{11}^2$, где $x_{11} \neq 0$ — наименьший корень $f_m(\kappa r)$. В нашем случае $\epsilon = j/B$, $\alpha m = k = 2\pi/\lambda$ и величина $\kappa^2 = \epsilon^2 - k^2$. Для малых $k^2 a^2$ условием устойчивости будет $j/B < x_{11}/a$, где x_{11} близко к первому корню $J_1(x)$. Этот критерий можно применить к плазменному шнуру, замкнутому в тор радиуса R , если $a^2/R^2 \ll 1$. В тех же обозначениях критерий Шафранова–Крускала [2] имеет вид $j_z/B_z < 2/R$, откуда следует, что бессиловая конфигурация допускает примерно в R/a раз большие токи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 92.
2. Кадомцев Б.Б. // Там же. С. 132.
3. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Там же. С. 59.
4. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 45, № 10. С. 4.
5. Laval G., Pellat R., Rebut P.H. // Nucl. Fusion. 1963. Vol. 3. P. 99.
6. Джонсон Д., Оберман С., Кулсруд Р., Фримен Е. Некоторые устойчивые магнитогиродинамические равновесные конфигурации // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 193.
7. Кадомцев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 5.
8. Сайдем В. Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.

ТОКОВЫЕ ВИХРИ И И КРИТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ*

1. ЛИНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Если скорость жидкости имеет две компоненты v_r и v_z , а магнитное поле – только одну компоненту $H = H_\phi$, то при условии аксиальной симметрии задачи уравнения магнитной гидродинамики для изэнтропического ($S(\xi) = \text{const}$) течения сводятся к системе уравнений [1]

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho r^2}{2} \frac{dB^2}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi}, \quad (1.1)$$

$$W(\rho) + \frac{1}{2} v^2 + \rho r^2 B^2 = U(\xi). \quad (1.2)$$

Здесь ρ – плотность, W – энтальпия, $\xi = \xi(r, z)$ – функция потока, определяющая компоненты скорости

$$v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r}. \quad (1.3)$$

Произвольные функции $B(\xi)$ и $U(\xi)$ зависят только от ξ . Кроме интеграла Бернулли (1.2), имеем интеграл вмороженности силовых линий магнитного поля

$$I(\rho r^2) / = B(\xi) \quad (I \equiv r H_\phi / \sqrt{4\pi}). \quad (1.4)$$

Линии потока жидкости определяются уравнением $\xi(r, z) = \text{const}$, а линии электрического тока – уравнением $I(r, z) = \text{const}$.

Рассмотрим течение в пространстве между двумя электродами (рис. 1). Ускорение плазмы в такой системе происходит как за счет тепловой энергии, так и под действием электродинамических сил. В случае, когда магнитное давление мало по сравнению с газокинетическим, т.е.

$$\beta \equiv 8\pi \rho H^{-2} \gg 1, \quad (1.5)$$

ускорение происходит в основном за счет тепловой энергии. В этом случае электрический ток подстраивается под течение (которое в первом приближении определяется законами обычной газодинамики) и поэтому может менять свое направление, будучи в одной части течения ускоряющим, а в другой части – тормозящим. Следовательно, при выполнении условия (1.5) мож-

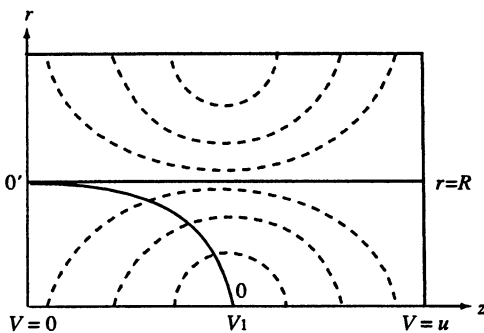


Рис. 1

но ожидать появления вихрей тока. К.В. Брушлинский, Н.И. Герлах и А.И. Морозов путем численного счета при помощи электронной вычислительной машины обнаружили появление приэлектродных вихрей тока: ток, выходящий из одного электрода, возвращался на тот же электрод и не доходил до второго электрода. Ниже это явление рассчитывается аналитически.

Отметим, что обращение в нуль компоненты плотности тока, перпендикулярной линии потока, может быть только в точке, в которой

$$r \frac{dv^2}{ds} - 4\rho W'(\rho) \frac{dr}{ds} = 0. \quad (1.6)$$

* Совместно с Л.М. Алексеевой // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. С. 987–995.

Это равенство получается из условия $j_{\perp} = r^{-1}dI/ds = 0$, если продифференцировать (1.2) и (1.4) вдоль линии потока $r = r(s)$. Согласно (1.6) при условии ускорения потока $dv^2/ds > 0$ ток может образовать петлю только при $dr/ds > 0$, т.е. на расширяющейся части электрода.

При расчете течения ограничимся случаем $U(\xi) = \text{const}$ и будем считать, что магнитное давление мало по сравнению с газовым ($\beta \gg 1$). Кроме того, будем рассматривать течения, медленно изменяющиеся вдоль оси z . Пренебрегая в (1.1) и (1.2) величинами порядка B^2 , $(\partial\xi/\partial z)^2$ и $\partial^2\xi/\partial z^2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad W(\rho) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 = U. \quad (1.7)$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\xi = \frac{\rho V}{2} (r^2 - R^2), \quad W(\rho) + \frac{1}{2} V^2 = U. \quad (1.8)$$

Здесь $V(z)$ и $R(z)$ – произвольные медленные функции переменной z , задавая которые можно определить соответствующие линии потока $\xi(r, z) = \text{const}$. Из второго уравнения (1.8) следует, что ρ также зависит только от z . Положим $R = \text{const}$, требуя тем самым, чтобы среди линий потока была прямая линия $r = R$. Картина линий потока изображена на рис. 1, где по оси z отложена скорость $V(z)$. Линии потока будут эквипотенциалами, и любая пара из них может быть принята за электроды. В окрестности плоскостей $z = z_0$ и $z = z_M$, где скорость V равна нулю и максимальному значению $\sqrt{2U} \equiv u$, течение не удовлетворяет критерию медленности, и, следовательно, получаемые таким образом результаты применимы лишь в средней части сопла, где линии потока еще достаточно плавные.

Для определения особой точки семейства линий тока $I(r, z) = \text{const}$ приравняем нулю производные $\partial I/\partial r$ и $\partial I/\partial z$ от $I = \rho r^2 B(\xi)$; получим

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \rho r [2B + \rho r^2 V B'] = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = r^2 \left[\frac{d\rho}{dz} B + \rho \frac{r^2 - R^2}{2} \frac{d(\rho V)}{dz} B' \right] = 0. \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что для существования особой точки необходимо $B'/B < 0$, и в изомагнитном случае ($B = \text{const}$) особых точек не существует. Исключая из равенств (1.9) величину $B'(\xi)$ и используя второе уравнение (1.8), продифференцированное по z , а также соотношение $\rho W'(\rho) = c_T^2$, где $c_T = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука, получим

$$r^2 = R^2 \left(1 - V^2 / c_T^2 \right). \quad (1.10)$$

Это уравнение определяет кривую OO' , изображенную на рис. 1. На ней обращается в нуль компонента плотности тока j_{\perp} , перпендикулярная к линии потока. Из (1.11) видно, что эта кривая соединяет точку ($r = 0, V = c_T$), лежащую в наиболее узком сечении сопла, и точку ($r = R, V = 0$). Особые точки семейства линий $I = \text{const}$ могут лежать только на кривой OO' и, следовательно, расположены ниже прямой $r = R$ на линиях потока с $dr/ds > 0$.

Для определения типа особой точки вычислим вторые производные от $I(r, z)$. Учитывая, что

$$W'' = \frac{\gamma - 2}{\rho} W' = \frac{\gamma - 2}{\rho^2} c_T^2, \quad (1.11)$$

где γ – показатель адиабаты, и используя уравнения (1.8) – (1.10), получим

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} = -8\rho B + \rho^3 r^4 V^2 B'', \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r \partial z} = -\frac{\rho r V' B}{V} \left(1 - \frac{2V^2}{c_T^2} \right) - \frac{\rho^3}{2} r^5 \frac{V^3}{c_T^2} V' B'', \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -\frac{\rho R^2 V'^2 B}{c_T^2} \left[1 + (\gamma + 2) \frac{V^2}{c_T^2} - \frac{2V^4}{c_T^4} \right] + \frac{\rho^3}{4} r^6 \frac{V^4}{c_T^4} V'^2 B''. \quad (1.14)$$

Знак инварианта $\Sigma = I_{rr} I_{zz} - I_{rz}^2$ определяет тип особой точки. Ограничиваясь далее случаем линейной зависимости $B(\xi)$, найдем, что знак Σ совпадает со знаком выражения

$$-1 + 7 \frac{V^2}{c_T^2} + 2(\gamma - 2) \frac{V^4}{c_T^4}. \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что если особая точка лежит на участке кривой OO' , расположенном ниже точки

$$r_c = 0,92R, \quad V_c = 0,22u, \quad (1.16)$$

то она эллиптического типа, если же она находится выше r_c , – то гиперболическая (см. рис. 1).

Отметим, что в рассматриваемом случае

$$B = b(\xi + c), \quad I = \rho r^2 b(\xi + c), \quad (1.17)$$

одна из линий потока $\xi = -c$ будет одновременно и линией тока. На этой линии обращается в нуль магнитное поле H_φ . Если подставить в (1.17) выражения для ρ и ξ , то получим уравнение линий электрического тока

$$V(u^2 - V^2)^{\frac{2}{\gamma-1}} r^2 (r^2 - R^2) + C(u^2 - V^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} r^2 = \text{const},$$

которое можно разрешить относительно r^2 .

При отрицательных значениях c (рис. 2) семейство линий тока имеет две особые точки – эллиптическую и гиперболическую. Когда $c = 0$, гиперболическая точка сдвигается ко входу в канал (рис. 3), где $V = 0$, а эллиптическая точка лежит при $r = R/\sqrt{2}$. При $c > 0$ остается только особая точка эллиптического типа.

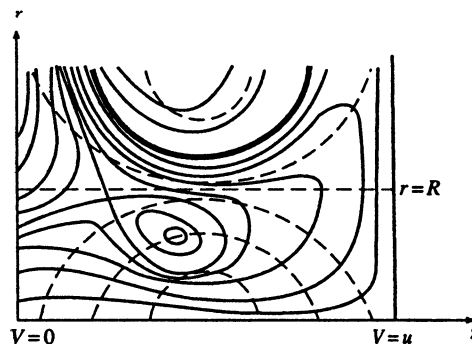


Рис. 2

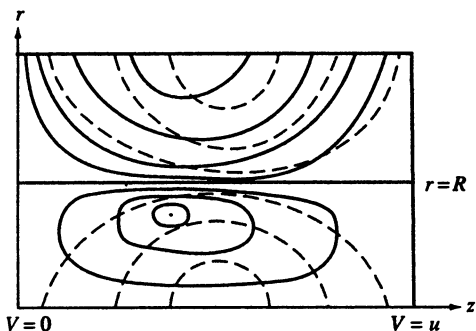


Рис. 3

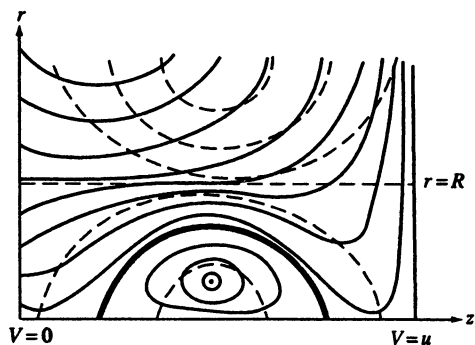


Рис. 4

На рис. 2–4 показаны линии электрического тока для линейной зависимости $B = b(\xi + c)$. Пунктиром показаны линии потока жидкости, каждая из которых может быть принята за электрод. Жирными линиями изображены линии потока $\xi = -c$, на которых магнитное поле H_ϕ меняет знак. Рис. 2 соответствует $c < 0$, здесь имеются как эллиптическая, так и гиперболическая особые точки. Рис. 3 и 4 соответствуют $c = 0$ и $c > 0$, когда имеются только эллиптические особые точки.

2. КРИТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Течения, медленно изменяющиеся вдоль координаты z , могут быть полностью рассчитаны в предельных случаях слабого и сильного магнитного поля ($\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$). Такой расчет при учете только первых производных по z был сделан в работах [2, 3], где показано, что в каналах соответствующего профиля плазма ускоряется, причем скорость, равная скорости распространения сигнала, достигается в наиболее узкой части канала. Поверхность перехода скорости через скорость сигнала оказалась наклоненной в сторону движения вещества (кривая OA на рис. 5).

Однако учет членов основных уравнений (1.1), (1.2), содержащих $d^2\xi/dz^2$ и $(d\xi/dz)^2$, приводит к отклонению "звуковой поверхности" в противоположную сторону.

Проведем здесь соответствующие вычисления для слабого и сильного магнитного поля, ограничиваясь случаем $U = \text{const}$ и учитывая в первом приближении непостоянство $B(\xi)$.

При $U(\xi) = \text{const}$ течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho^2 r^3}{2} \frac{dB^2}{d\xi} = 0, \quad W(\rho) + \frac{v^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U. \quad (2.1)$$

Здесь компоненты скорости и магнитное поле равны

$$v_z = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad H_\phi = \sqrt{4\pi} \rho r B. \quad (2.2)$$

Как видно из (2.1), при $B = \text{const}$ течения будут безвихревыми ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$). Ограничиваясь рассмотрением течений, медленно изменяющихся вдоль оси z , будем искать решение системы (2.1) в виде

$$\xi = \xi_0(\varepsilon z, r) + \xi_1(\varepsilon z, r) + \dots \quad (\xi_1 \sim \varepsilon^2 \ll 1). \quad (2.3)$$

Соответственно, $v_r \sim \varepsilon$, а $v_z = V + v_{1z}$, где $v_{1z} \sim \varepsilon^2$. Кроме того, будем считать, что $B = B_0 + B'\xi$, где $B'\xi \ll B_0$, и будем учитывать везде только величины первого поряд-

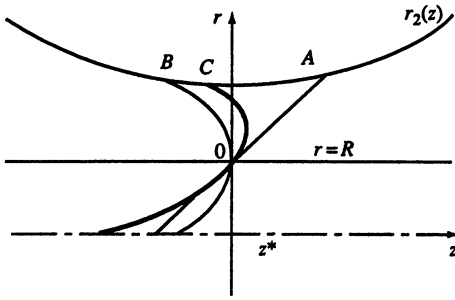


Рис. 5

ка по B' и отбрасывать члены, содержащие произведения B' на все другие малые параметры.

В первом приближении, пренебрегая членами $\sim \epsilon^2$ из уравнения (2.1), получим $V = V(z)$.

Будем считать далее $V(z)$ заданной скоростью на электроде $r = R = \text{const}$. Решая уравнения (2.1), можно найти с заданной точностью функцию $\xi(r, z)$ и из условия $\xi(r, z) = \text{const}$ определить систему электродов, соответствующую заданной скорости $V(z)$.

Ограничимся здесь лишь определением звуковых поверхностей. Для этого достаточно знать только скорость v , т.е. найти первый интеграл уравнений (2.1).

В первом приближении

$$\xi_0 = \int_R^r \rho V(z) r dr. \quad (2.4)$$

Подставляя это выражение в (2.1), найдем поправку к продольной скорости, пропорциональную ϵ^2 :

$$v_{1z} = - \int_R^r dr' \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho r'} \int_R^{r'} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) r dr \right]. \quad (2.5)$$

Квадрат радиальной скорости v_r с нужной точностью определяется дифференцированием (2.4). Чтобы продвинуться дальше, необходимо знать функцию $\rho(r, z)$, которая различна для случаев слабого ($\beta \gg 1$) и сильного ($\beta \ll 1$) магнитного поля. В нулевом приближении получим

$$W(\rho) + \frac{V^2}{2} = U, \quad \rho = \rho(z) \quad \text{при} \quad B^2 \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{V^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U, \quad \rho r^2 = \frac{U - \frac{1}{2} V^2}{B^2} \equiv f(z) \quad \text{при} \quad W \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Подставляя эти выражения в (2.4) и (2.5), найдем для рассматриваемых случаев

$$v_r = - \frac{(\rho V)' r^2 - B^2}{\rho}, \quad v_{1z} = - \frac{1}{4} \left(\frac{(\rho V)'}{\rho} \right)' \left(r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (2.8)$$

$$v_r = - \frac{(fV)'}{f} r \ln \frac{r}{R}, \quad v_{1z} = \frac{1}{4} \left(\frac{(fV)'}{f} \right)' \left(r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (2.9)$$

Поверхность перехода скорости через местную скорость распространения сигнала [4]

$$c_s = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}, \quad c_A^2 = H_\phi^2 / (4\pi\rho) \quad (2.10)$$

находится из уравнения $v^2 = c_s^2$. Согласно (2.2) имеем

$$c_s^2 = c_T^2 + \rho r^2 B^2 \equiv (\gamma - 1)W + \rho r^2 B^2. \quad (2.11)$$

Скорость в нужном приближении определяется выражением

$$v^2 = V^2 + 2Vv_{1z} + v_r^2. \quad (2.12)$$

Обозначая через u скорость на выходе, где $\rho \rightarrow 0$ ($u^2 = 2U$) и используя (2.1), представим уравнение звуковой поверхности для случаев слабого и сильного поля соответственно в виде

$$v^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u^2 + 2 \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \rho r^2 B^2, \quad v^2 = \frac{u^2}{3} - 2 \frac{2-\gamma}{3} W(\rho). \quad (2.13)$$

Здесь в обоих выражениях второй член является малым, и в него можно подставлять ρ из (2.6) или (2.8) соответственно.

В первом приближении по ϵ в предельных случаях $B^2 \rightarrow 0$ или $W \rightarrow 0$ звуковая поверхность является плоскостью и определяется уравнениями

$$V^2(z) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u^2, \quad V^2(z) = \frac{1}{3} u^2. \quad (2.14)$$

Члены порядка B^2 в первом равенстве (2.13) и порядка W во втором обуславливают наклон этой поверхности (при $r > R$) в сторону увеличения $V(z)$.

Для определения эффекта, связанного с учетом величин $\sim \epsilon^2$, необходимо в левые части равенств (2.13) подставить v^2 из второго равенства (2.1).

Заметим, что согласно соотношениям (2.6) и (2.7) для случаев $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$ можно записать

$$\frac{(\rho V)'}{\rho} = \left(1 - \frac{V^2}{c_T^2}\right) V', \quad \frac{(fV)'}{f} = \frac{u^2 - 3V^2}{u^2 - V^2} V'. \quad (2.15)$$

Эти величины, а следовательно, и радиальные компоненты скорости обращаются в нуль на звуковой поверхности нулевого приближения. Последнее очевидно из того факта, что звуковая поверхность нулевого приближения совпадает с плоскостью минимального сечения сопла.

Для получения полного выражения для скорости учтем также поправку к V , связанную с переменностью $B(\xi)$. Согласно (2.1) эта поправка

$$\delta V = -B_0 B' \int_R^r \rho^2 r^3 dr, \quad (2.16)$$

где вместо ρ в случаях $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$ можно соответственно подставить выражения из (2.6) и (2.7). Таким образом, уравнения звуковых поверхностей примут вид

$$V^2 + \frac{\gamma+1}{2} V'^2 \left(r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) = c_T^{*2} + 2 \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \rho r^2 B^2 - \frac{BB' \rho^2 V}{2} (r^4 - R^4), \quad (2.17)$$

$$V^2 - \frac{3}{2} V'^2 \left(r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) = c_A^{*2} - 2 \frac{2-\gamma}{3} W - \frac{B' c_A^3}{B^3} \ln \frac{r}{R}. \quad (2.18)$$

Если ограничиться разложением $V(z)$ с точностью до линейного члена, то, принимая звуковую поверхность нулевого приближения за плоскость $z = 0$, найдем

$$V'z = \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \frac{\rho B^2}{c_T^2} (r^2 - R^2) + \frac{\gamma+1}{4c_T} V'^2 \left(r^2 - R^2 - R^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) + BB' \rho^2 \frac{r^4 - R^4}{4}, \quad (2.19)$$

$$V'z = -\frac{2-\gamma}{3} \frac{W_R}{c_A} \left[\left(\frac{R^2}{r^2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] + \frac{3}{4c_A} V'^2 \left(r^2 - R^2 - r^2 \ln \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{B' c_A^2}{2B^3} \ln \frac{r}{R}. \quad (2.20)$$

Здесь члены $\sim V'^2$ как для (2.19), так и для (2.20) дают искривление звуковой

поверхности в сторону, противоположную движению вещества ($z < 0$). Действительно, разлагая функции от r по степеням $(r - R)$, получим

$$V'z = \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{2\rho B^2 R}{c_T} (r - R) - \frac{\gamma + 1}{2c_T} V'^2 (r - R)^2 + BB' \rho^2 R^3 (r - R), \quad (2.21)$$

$$V'z = \frac{2 - \gamma}{3} \frac{2(\gamma - 1)W_R}{c_A R} (r - R) - \frac{3}{2c_A} V'^2 (r - R)^2 + \frac{B'c_A^2}{2B^3 R} (r - R). \quad (2.22)$$

Как показывают уравнения (2.21) и (2.22), влияние членов $\sim V'^2$ возрастает при удалении от линии потока $r = R$. Члены $\sim B'$ частично компенсируют основные линейные по $(r - R)$ члены, если $BB' < 0$, и усиливают их в случае $BB' > 0$.

В обоих случаях как слабого, так и сильного магнитного поля звуковые поверхности имеют вид, схематически показанный на рис. 5, где линия OA соответствует пренебрежению членами $\sim V'^2$, а линия OB показывает форму звуковой поверхности для случаев предельно слабого или предельно сильного поля, когда в (2.21) или (2.22) можно пренебречь членами $\sim B^2$ или $\sim W$ (а также $\sim B'$). При $B = 0$ из (2.21) вытекает известное выражение для звуковой поверхности в обычной газодинамике [5].

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ

Ограничиваясь нулевым приближением по параметру медленности ϵ , рассмотрим задачу об устойчивости цилиндрической плазменной струи в магнитном поле, имеющем только азимутальную компоненту $H = H_\phi$. В системе координат, движущейся со скоростью жидкости V , жидкость покоится, и можно применить критерий отсутствия конвективной неустойчивости [6]

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta} \quad \left(\beta \equiv \frac{8\pi\rho}{H^2} \right). \quad (3.1)$$

С учетом условия равновесия вдоль радиуса

$$p' = -\frac{H}{4\pi r} (rH)', \quad (3.2)$$

которое выполняется в первом приближении по ϵ , критерий (3.1) можно представить в виде

$$\left(\frac{H^2}{r^2} \right)' + \frac{H^2}{\pi\rho r^3 c_s^2} < 0 \quad \left(c_s^2 \equiv c_T^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right). \quad (3.3)$$

Условие устойчивости (3.3) получено в работе [7] (см. также [1, с. 286]) на основе анализа баланса сил, действующих на кольцевую плазменную трубку. Оно будет локальным условием устойчивости для тонких плазменных колец, и при его нарушении кольца смещаются по радиусу. В нашем случае они одновременно сносятся вместе с потоком вдоль оси z .

Если выполнено условие (3.1), то для отсутствия винтовой неустойчивости требуется еще выполнение критерия [6]

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{1}{\beta} \quad \text{или} \quad (rH_\phi^2)' < 0. \quad (3.4)$$

При невыполнении неравенства (3.4) развиваются винтовые неустойчивости моды $m = 1$ с малым шагом винта. Из выражений (3.3) и (3.4) следует, что для устойчивости относительно аксиально-симметричных возмущений, по крайней мере, необходимо,

чтобы была отрицательной производная $(H^2/r^2)'$, а для устойчивости возмущений винтового типа требуется отрицательность производной $(rH^2)'$.

Оказывается, что в изэнтропическом случае $(S(\xi) = \text{const})$ критерий (3.3) выражается только через интеграл вмороженности $B(\xi) = H/(4\pi\rho r)$. Действительно, выражая H через B , можно (3.2) и (3.3) представить в виде

$$c_s^2 \rho' = -\rho^2 B(r^2 B)', \quad c_s^2 (\rho B^2)' + 4\rho^3 r B^4 < 0, \quad (3.5)$$

где штрихи обозначают производные по r . Исключая отсюда c_s , получим

$$dB^2/dr < 0. \quad (3.6)$$

Так как $dB^2/dr = \rho r V dB^2/d\xi$, а $V > 0$, то для устойчивости аксиально-симметричных возмущений необходимо $dB^2/d\xi < 0$. В разд. 1 были рассмотрены течения при линейной зависимости $B = b(\xi + c)$. В этом случае

$$H = \sqrt{4\pi} \rho r b \left[\frac{1}{2} \rho V (r^2 - R^2) + c \right], \quad (3.7)$$

причем при исследовании устойчивости входящие сюда медленные функции $\rho(z)$ и $V(z)$ можно считать постоянными. Из условия (3.6) следует, что устойчивой является область $\xi < -c$, расположенная на рис. 2–4 ниже кривой (изображенной жирной линией), на которой $\xi = -c$.

Для случая $c = 0$ (см. рис. 2) условие (3.6) приводит к требованию $r < R$. Критерий (3.4) сужает устойчивую область до интервала $\frac{3}{7} R^2 < r^2 < R^2$, так что особая точка линий электрического тока, лежащая при $r^2 = \frac{1}{2} R^2$, попадает в устойчивую область.

Аналогично и в случаях $c \geq 0$ условие (3.6) показывает, что устойчивой будет область $\xi < -c$ или при $b > 0$ область отрицательных H_Φ .

Координаты (r, V) особой точки семейства линий тока $I = \text{const}$ связаны соотношением

$$r_c^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{c}{\rho V}. \quad (3.8)$$

Это соотношение получается из требования $dI/dr = 0$ при условии, что $B(\xi) = b(\xi + c)$. Критерий (3.4) в этом случае дает

$$r^2 > \frac{6}{7} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{c}{\rho V} \right), \quad (3.9)$$

т.е. особая точка также попадает внутрь устойчивой области. Однако она лежит в непосредственной близости от внутреннего электрода.

Отметим, что в случае слабого магнитного поля $H \sim rB(\xi)$ и при $B = \text{const}$ не выполняются оба критерия устойчивости (3.6) и (3.4). Для сильного магнитного поля случай $B = \text{const}$ соответствует устойчивости относительно винтовых возмущений, так как $H \sim 1/r$. Однако условие (3.6), общее для слабого и сильного полей, при этом не выполнено.

В случае предельно сильного магнитного поля $\beta^2 \ll 1$ (при $B \neq \text{const}$) для медленно изменяющихся вдоль z течений существует интеграл [2]

$$\rho r^2 B(\xi) = F(z), \quad (3.10)$$

а линии потока определяются выражением

$$\int_0^\xi \frac{B(\xi) d\xi}{\sqrt{U - F(z)B}} = \sqrt{2} F(z) \ln \frac{r}{R}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что $H = rB = r^{-1}F(z)$, и критерий (3.4) выполняется везде. Исследование (3.11) при $B = b(\xi + c)$ показывает, что картина линий потока получается похожей на изображенную на рис. 2–4. Критерий (3.6) также приводит к требованию $\xi < -c$, так что устойчивые области лежат ниже соответствующих кривых, где H меняет знак.

Авторы приносят благодарность А.И. Морозову и К.В. Брушлинскому за дискуссию и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 3.
3. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1964. Т. 36. С. 429.
4. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
5. Кибель И.А., Кочин И.Е., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
6. Кадомцев Б.Б. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 143.
7. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Успехи физ. наук. 1961. Т. 73, № 4. С. 701.

СТАЦИОНАРНЫЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК АЗИМУТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В работе [1] получен ряд общих решений, описывающих стационарное ускорение идеально проводящей плазмы в аксиально-симметричных каналах. В настоящей работе дается анализ полученных решений применительно к случаю ускорения азимутальным магнитным полем.

В отсутствие диссипативных процессов уравнения, описывающие стационарное течение плазмы, содержат уравнение Эйлера, уравнение, выражающее постоянство энтропии вдоль линии тока жидкости, уравнение вмерзженности магнитного поля и уравнения непрерывности для потока жидкости и магнитного потока [2]:

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (1.1)$$

$$(\mathbf{v}\nabla)S = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{div } \rho\mathbf{v} = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, ρ – плотность, p – давление, S – энтропия, \mathbf{H} – магнитное поле.

Мы будем считать далее, что магнитное поле имеет лишь одну компоненту H_φ и все величины зависят только от r и z . Учитывая аксиальную симметрию задачи, мы можем ввести функцию тока ξ :

$$\rho v_z = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \rho v_r = -\frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (1.6)$$

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1964. Т. 36. С. 429–443.

удовлетворив тем самым уравнению (1.4). Вдоль линии тока $\xi = \text{const}$ выполняется условие вложенности магнитного поля

$$\frac{H_\Phi}{\rho r} = \sqrt{4\pi B(\xi)}, \quad (1.7)$$

сохраняется энтропия $S = S(\xi)$, а также обобщенный интеграл Бернулли [1]

$$W(S, \rho) + \frac{v^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U(\xi), \quad (1.8)$$

где W – энтальпия.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера (1.1) можно записать в виде

$$[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\rho \frac{r^2}{2} \nabla B^2 + \nabla U - T \nabla S. \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что если поток изэнтропичен и изомагнитен (т.е. $S = \text{const}$ и $B = \text{const}$)¹, то он будет потенциальным, если интеграл Бернулли U постоянен во всем потоке. Это является обобщением теоремы Крокко [3] для рассматриваемого течения. Ряд общих свойств изомагнитного изэнтропического течения рассмотрен в работе [4]. В дальнейшем поток всюду будет считаться изэнтропичным, и, следовательно, $W = W(\rho)$.

Функция ξ удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\rho r^2}{2} \frac{dB^2}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi} = 0. \quad (1.10)$$

Система уравнений (1.8) и (1.10) должна решаться совместно относительно ρ и ξ , причем должны быть заданы функции $U(\xi)$ и $B(\xi)$ и уравнения граничных поверхностей.

При известном поле H_Φ плотность тока \mathbf{j} выражается через H_Φ формулами

$$r j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\Phi), \quad r j_r = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} (r H_\Phi), \quad (1.11)$$

аналогичными (1.6).

Мы будем далее интересоваться течением плазмы в аксиально-симметричных ускоряющих устройствах, представляющих собой, вообще говоря, систему из двух коаксиальных электродов (рис. 1). Если при течении в такой системе величина r ограничена и плотность плазмы ρ на выходе стремится к нулю, то из уравнения Бернулли (1.8) вытекает, что максимальная скорость на выходе будет равна

$$v_M = \sqrt{2U(\xi)}. \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что если на входе $U = \text{const}$, то скорость плазмы на выходе (т.е. при $\rho \rightarrow 0$) будет одинаковой независимо от расстояния линии тока от оси. Наряду со скоростью истечения v_M представляют интерес такие параметры системы, как расход массы \dot{m} , тяга F , энергетическая мощность потока N , а также напряжение V и ток I , протекающий через систему. Все эти величины могут быть выражены через ξ и H_Φ .

¹ Нетрудно видеть, что при аксиально-симметричном изомагнитном течении отношение магнитного потока, проходящего через любую кольцевую силовую трубку, к массе этой трубки – величина, постоянная для всего течения.

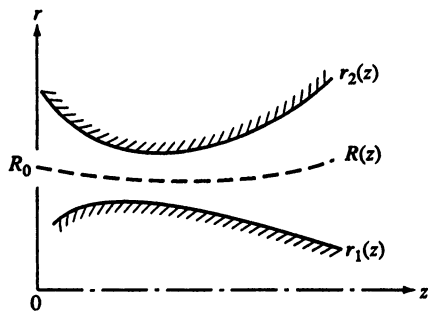


Рис. 1

Действительно, используя выписанные выше соотношения, мы получим

$$\dot{m} = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z 2\pi r dr = 2\pi(\xi_2 - \xi_1), \quad (1.13)$$

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{v^2}{2} v_z 2\pi r dr \Big|_{z=L} = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} U(\xi) d\xi \quad (1.14)$$

$$F = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z^2 2\pi r dr \Big|_{z=L} = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_z(\xi) d\xi. \quad (1.15)$$

Если расходимость потока на выходе мала, т.е. $v_z \approx v$, то, учитывая (1.8), можно написать

$$F = 2\pi \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{2U(\xi)} d\xi. \quad (1.16)$$

Далее, напряжение между электродами $\xi_1 = \text{const}$ и $\xi_2 = \text{const}$ равно

$$V = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} v_z H_\varphi dr = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) d\xi, \quad (1.17)$$

а общий ток, протекающий через систему, равен

$$I = \int_0^{r_2} j_z 2\pi r dr = \frac{c}{2} r_2 H_\varphi(r_2, 0), \quad (1.18)$$

где H_φ берется во входном сечении.

2. ТЕЧЕНИЯ В УЗКИХ КАНАЛАХ

Если расстояние между электродами f мало по сравнению с характерными размерами, то величины $U(\xi)$ и $B(\xi)$ можно считать в первом приближении постоянными и равными их значениям на средней поверхности, равноудаленной от обоих электродов. Добавляя к (1.7) и (1.8) уравнение непрерывности $\rho v f = \text{const}$, представляющее собой условие $\delta\xi = \xi(r_2, z) - \xi(r_1, z) = \text{const}$ при $r_2 - r_1 \rightarrow 0$, получим следующую алгебраическую систему уравнений, описывающих течения в узких аксиально-симметричных каналах:

$$\rho v f = \delta\xi = \frac{\dot{m}}{2\pi} = \text{const}, \quad (2.1)$$

$$W(\rho) + \frac{v^2}{2} + \rho r^2 B^2 = U = \text{const}, \quad (2.2)$$

$$\frac{H_\varphi}{\rho r} = \sqrt{4\pi} B = \text{const}. \quad (2.3)$$

Здесь f – расстояние между электродами и все величины берутся на средней поверхности $r = r(z)$.

Из уравнений (2.1) – (2.3) вытекает, что, задавая $r(z)$ и $f(z)$, мы определим $v(z)$, $\rho(z)$ и $H_\varphi(z)$. Поскольку каждая из этих величин зависит от двух произвольных функций $r(z)$ и $f(z)$, то и сами эти величины могут меняться весьма произвольно.

В предельных случаях $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$, где $\beta \equiv \frac{8\pi p}{H^2}$, возможный произвол в изменении ρ , ν и H_Φ сужается.

Если $\beta \gg 1$, то изменение ρ и ν , как это видно из (2.1), (2.2), в пренебрежении членом $\sim B^2$ подчиняется обычной гидродинамике и определяется только площадью канала, пропорциональной r^2 . При этом, если ν растет, то ρ обязательно убывает, в то время как H_Φ может изменяться произвольно в зависимости от изменения $r(z)$. Пусть, например, ν растет линейно с координатой z :

$$\nu = \frac{\nu_M}{L} z \quad (2.4)$$

и $W = W_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$, тогда плотность оказывается равной

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.5)$$

Выбрав профиль $r(z)$ в виде

$$r = r_0 \left(1 + \frac{z}{L_1} \right), \quad (2.6)$$

мы получим для $H_\Phi(z)$ зависимость

$$H_\Phi = H_{\Phi 0} \left(1 + \frac{z}{L_1} \right) \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.7)$$

схематически изображенную на рис. 2. Из (2.7) следует, что в рассматриваемом примере ток, протекающий между электродами, меняет знак. Последнее обусловлено тем, что при $\beta \gg 1$ разгон плазмы происходит в основном за счет тепловой энергии и магнитное поле на отдельных участках может выступать в качестве тормозящей силы². Следует отметить, что подобное явление невозможно в плоской задаче, где магнитное поле H пропорционально плотности ρ , которая уменьшается при увеличении скорости.

Рассмотрим теперь случай $\beta \ll 1$, когда газовым давлением (т.е. членом $W(\rho)$ в (2.2) можно пренебречь и процесс разгона плазмы определяется магнитным полем. В этом случае геометрическим параметром, определяющим течение, является отношение f/r . Действительно, согласно (2.1)–(2.3) имеем

$$\rho r^2 = \rho_0 r_0^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{2B^2 \rho_0 r_0^2} \right), \quad r H_\Phi = r_0 H_{\Phi 0} \left(1 - \frac{\nu^2}{2B^2 \rho_0 r_0^2} \right), \quad (2.8)$$

где ν есть неявная функция от $\frac{f}{r}$:

$$\frac{f}{r} = \frac{f_0 \nu_0}{r_0 \left(1 - \frac{\nu^2}{2B^2 \rho_0 r_0^2} \right) \nu}. \quad (2.9)$$

² На этот эффект впервые обратили внимание К. Брушлинский, Н. Герлах и А. Морозов.

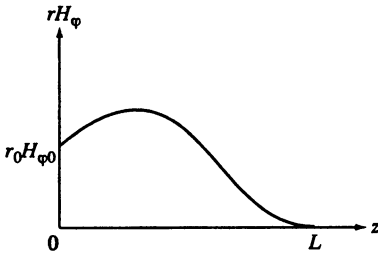


Рис. 2

Таким образом, если при $\beta \gg 1$ процесс ускорения плазмы определялся величиной rf и, выбирая произвольно $r(z)$, можно было варьировать $H_\phi(z)$, то при $\beta \ll 1$ процесс ускорения определяется величиной f/r и, варьируя $r(z)$ при выбранном f/r , мы можем варьировать изменение плотности и поля. При $\beta \ll 1$, как показывает (2.8), rH_ϕ убывает, если v растет, и, следовательно, ток не меняет своего направления, оставаясь везде ускоряющим.

Отметим, что из сказанного выше, в частности, следует возможность ускорения плазмы в канале с постоянным зазором f как при $\beta \ll 1$, так и при $\beta \gg 1$, если только $r(z)$ меняется нужным образом.

Рассмотрим случай линейного нарастания скорости (2.4) при $\beta \gg 1$. В этом случае имеем

$$\rho r^2 = \rho_0 r_0^2 \left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right), \quad rH_\phi = r_0 H_{\phi 0} \left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right). \quad (2.10)$$

Пусть для примера

$$r = r_0 \left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right)^\alpha, \quad \alpha = \text{const}, \quad (2.11)$$

тогда при $\alpha = 0$ плотность ρ пропорциональна H_ϕ и убывает. При $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ как ρ , так и H_ϕ убывают. При $\alpha = \frac{1}{2}$ $\rho = \text{const}$, а H_ϕ убывает, а при $\alpha > \frac{1}{2}$ и ρ , и H_ϕ возрастают.

Эти эффекты, обнаруженные К. Брушлинским, Н. Герлах и А. Морозовым, являясь на первый взгляд парадоксальными, объясняются тем, что поле совершает работу не только при своем расширении, что описывается членом $\frac{\nabla H^2}{8\pi}$ в уравнении Эйлера, но и при сокращении длины силовых линий, которое описывается членом $\frac{(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}}{4\pi}$. Иными словами, энергия магнитного поля, находящаяся в кольцевой магнитной трубке, выделяется не только при увеличении его сечения, но и при уменьшении среднего радиуса кольца.

Остановимся теперь на уравнении Гюгонио для течения в узком аксиально-симметричном канале. Дифференцируя (2.1)–(2.3) и обозначая через c_T и c_A скорость звука и альфвеновскую скорость:

$$c_T^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s, \quad c_A^2 = \frac{H_\phi^2}{4\pi\rho}, \quad (2.12)$$

после простых преобразований получим

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dv}{v} = c_T^2 \frac{d(fr)}{fr} + c_A^2 \frac{d(f/r)}{f/r}. \quad (2.13)$$

Здесь c_s – скорость магнитозвуковых волн, равная $c_s = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}$. Из уравнения (2.13) следует, что при $c_A \rightarrow 0$ переход через скорость сигнала c_s происходит в минимуме сечения канала, тогда как при $c_T \rightarrow 0$ этот переход осуществляется в минимуме $\frac{f}{r}$.

В заключение приведем выражения \dot{m} , v_M , F , N , V и I для рассматриваемого случая течения в узком канале, причем рассмотрим отдельно случаи $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$.

Используя уравнение $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$, обозначая через s площадь сечения канала $s = 2\pi r f$

и отмечая звездочкой величины в критическом сечении, где $v = c_s$, а индексом "0" величины в начальном сечении $z = 0$, после несложных преобразований получим:

1) при $\beta \gg 1$

$$v_M = c_{T0} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad \dot{m} = \rho_0 s^* c_{T0} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (2.14)$$

$$F = \dot{m} v_M, \quad N = \frac{\dot{m} v_M^2}{2}, \quad (2.15)$$

$$I = \frac{c}{2} r_0 H_{\varphi 0}, \quad V = \frac{\dot{m}}{2\pi c} \frac{H_{\varphi 0}}{\rho_0 r_0}; \quad (2.16)$$

2) при $\beta \ll 1$

$$v_M = \sqrt{2} c_{A0}, \quad \dot{m} = 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_0 r_0^2 c_{A0} \frac{f^*}{r^*}, \quad (2.17)$$

$$F = \frac{2}{3\sqrt{3}} r_0^2 H_{\varphi 0}^2 \frac{f^*}{r^*}, \quad V = \frac{2}{3\sqrt{3}c} v_M H_{\varphi 0} r_0 \frac{f^*}{r^*}. \quad (2.18)$$

Величины же N и I определяются теми же формулами (2.15), (2.16), что и в случае $\beta \gg 1$.

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ ТЕЧЕНИЙ, МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ОСИ

В предыдущем разделе мы рассматривали течения в узких каналах, описываемых первыми членами разложений по степеням поперечной координаты. Далее мы рассмотрим другой класс решений системы (1.8), (1.9), когда имеет место слабая зависимость от координаты z , т.е. $\xi = \xi(r, \varepsilon z)$, $\rho = \rho(r, \varepsilon z)$, где ε – малый параметр. Пренебрегая в (1.8), (1.9) членами, квадратичными по ε , получаем

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \rho \frac{r^2}{2} \frac{dB^2}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi} = 0, \quad (3.1)$$

$$W(\rho) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + \rho r^2 B^2 = U. \quad (3.2)$$

Здесь, как отмечалось выше, величины B и U – произвольные функции, зависящие только от ξ . Особенностью системы (3.1), (3.2) является то, что в ней содержатся частные производные только по r . Решение такой системы в общем случае зависит от двух произвольных функций $c_1(z)$ и $c_2(z)$, т.е. $\xi = \xi(r, c_1, c_2)$, $\rho = \rho(r, c_1, c_2)$. Для уравнений (3.1), (3.2) могут быть поставлены различные задачи. Если задать геометрию электродов $r = r_1(z)$ и $r = r_2(z)$, то, поскольку на электродах $\xi = \xi_1 = \text{const}$ и $\xi = \xi_2 = \text{const}$, мы приходим к задаче, являющейся нелинейным аналогом задачи типа Штурма–Лиувилля. Если же мы зададим один из электродов $\xi = \xi_1 = \text{const}$ при

$r = r_1(z)$ и поток вблизи него $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ при $r = r_1(z)$, то получим аналог задачи Коши. При этом положение второго электрода определяется значением $\xi = \xi_2$ на втором электроде.

Практически величины $B(\xi)$ и $U(\xi)$ не должны задаваться априорно, а определяются из условий на входе и выходе ускорителя.

Если на входе заданы $\rho(r)$, $v(r)$ и $H_\phi(r)$, то мы легко можем найти ξ (см. (1.6)):

$$\xi = \int_{r_1}^r \rho v r dr \Big|_{z=0} = \xi(r, 0),$$

а тем самым $B = B(\xi)$ и $U = U(\xi)$. Однако, задав на входе все указанные выше величины, мы при заданной геометрии электродов, вообще говоря, не получим решения. Поэтому в дальнейшем мы в конкретных примерах будем ставить задачу Коши, т.е. будем задавать один из электродов, $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ на нем, а также задавать v , ρ , p , H_ϕ на входе в ускоритель и затем искать ξ и геометрию второго электрода в виде $\xi(r, z) = \xi_2 = \text{const}$.

Умножая (3.1) на $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ и вычитая из него уравнение (3.2), проинтегрированное по r , получим

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 B)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{H_\phi^2}{8\pi} \right) + \frac{H_\phi^2}{4\pi r} = 0$, а также в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]_r. \quad (3.4)$$

Таким образом, в рассматриваемом "адиабатическом" приближении выполняется условие равновесия вдоль радиусов.

Уравнение (3.3) просто интегрируется в двух случаях: $W = 0$ и $B = \text{const}$. В первом случае, когда плазма холодная и газовым давлением можно пренебречь, интеграл (3.3) имеет вид

$$\rho r^2 B(\xi) = C_1(z). \quad (3.5)$$

Выражая отсюда ρ и подставляя его в (3.2), получим

$$\int_0^\xi \frac{B(\xi) d\xi}{\sqrt{U(\xi) - C_1(z)B(\xi)}} = \sqrt{2} C_1(z) \ln \frac{r}{C_2(z)}, \quad (3.6)$$

где $C_2(z)$ – вторая произвольная функция z ; $C_1(z)$ и $C_2(z)$ должны быть достаточно медленными функциями z .

Во втором случае, когда течение изомагнитно, интегралом (3.3) является соотношение

$$W(\rho) + \rho r^2 B^2 = C_3(z), \quad (3.7)$$

которое определяет ρ как функцию от r и $C_3(z)$. Подставив $\rho(r, C_3)$ в (3.2), мы придем к квадратуре

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi) - C_3(z)}} = \sqrt{2} \int_{C_4(z)}^r \rho r dr. \quad (3.8)$$

Заметим, что если $U(\xi)$ пропорциональна $B(\xi)$, то случай $W = 0$ может быть проинтегрирован до конца в общем виде. Полагая $U = C_{10}B$ и вводя новую функцию $D(\xi)$, определенную соотношением $D'^2 = B$, получим согласно (3.6)

$$D(\xi) = \sqrt{2} \sqrt{C_{10} - C_1(z)} C_1(z) \ln \frac{r}{C_2(z)}. \quad (3.9)$$

Как видно из (1.16), тяга F определяется разностью значений $D(\xi)$ на электродах ξ_2 и ξ_1 :

$$F = \frac{\sqrt{2C_{10}}}{2\pi} [D(\xi_2) - D(\xi_1)]. \quad (3.10)$$

4. ТЕЧЕНИЯ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим более подробно класс течений холодной плазмы $W = 0$, описываемый интегралами (3.5), (3.6). Отметим, прежде всего, что в таких течениях, как это следует из (3.4), при $p = 0$ ток между электродами течет строго по радиусам.

Различным функциям $B(\xi)$ и $U(\xi)$ соответствуют различные течения. Вид этих функций можно определить, если задать распределение $\rho(r)$ и $v(r)$ на входе $z = 0$ или в каком-либо другом сечении $z = \text{const}$. Проще всего задать начальные величины $\rho(r)$ и $v(r)$ в виде степенных функций

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^\nu, \quad v = v_0 \left(\frac{r}{R_0} \right)^\mu. \quad (4.1)$$

Здесь ρ_0 и v_0 – плотность и скорость в точке $r = R_0$, $z = 0$, лежащей на некоторой средней линии тока $\xi = 0$, уравнение которой $r = R(z)$ мы будем считать заданным (см. рис. 1). Согласно соотношению $\frac{\partial \xi}{\partial r} = \rho r v$ и формулам (4.1) получаем при $z = 0$

$$\xi = \xi_0 \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\mu+\nu+2} - 1 \right], \quad \xi_0 \equiv \frac{\rho_0 v_0 R_0^2}{\mu + \nu + 2}. \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) в (3.5) и (3.2), придем к следующим выражениям для искомых функций $B(\xi)$ и $U(\xi)$ при $W = 0$:

$$B = \frac{C_1(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}, \quad (4.3)$$

$$U = \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+\nu+2}} + \frac{C_1^2(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{\nu+2}{\mu+\nu+2}}. \quad (4.4)$$

Общей для течений холодной плазмы является зависимость $H_\phi(r, z)$:

$$H_\phi = \sqrt{4\pi} \frac{C_1(z)}{r}, \quad (4.5)$$

которая вытекает из определения $B(\xi)$ и формулы (3.5) и показывает, что продольный ток течет только по электродам. Величины же ρ и v в потоке зависят от выбора функций $U(\xi)$ и $B(\xi)$.

Обозначим через v_M максимальную скорость на выходе при $\rho \rightarrow 0$, $r = R(z)$. Согласно (3.2) имеем

$$v_M^2 = 2U_R = v_0^2 + \frac{H_{\Phi a}^2}{2\pi\rho_0}. \quad (4.6)$$

Интеграл (3.2) позволяет также определить критическую скорость $v_R^* = \frac{H_{\Phi R}^*}{4\pi\rho}$ на линии тока $r = R(z)$:

$$v_R^* = \frac{1}{\sqrt{3}} v_M. \quad (4.7)$$

Скорость $v_R(z)$ при $r = R(z)$ мы будем считать заданной. Учитывая, что при $r = R(z)$ величины $B(\xi)$ и $U(\xi)$ постоянны, определим из (3.2) и (3.5) введенную выше функцию $C_1(z)$:

$$\frac{C_1(z)}{C_1(0)} = \frac{v_M^2 - v_R^2(z)}{v_M^2 - v_0^2}, \quad C_1^2(0) = \frac{\rho_0 R_0^2}{2} (v_M^2 - v_0^2). \quad (4.8)$$

Используя полученные соотношения, мы можем написать следующие формулы для ρ и v^2 :

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \frac{v_M^2 - v_R^2(z)}{v_M^2 - v_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\mu + \nu + 2}, \quad (4.9)$$

$$v^2 = v_0^2 \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{\frac{2\mu}{\mu + \nu + 2}} + [v_R^2(z) - v_0^2] \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-\frac{\nu + 2}{\mu + \nu + 2}}. \quad (4.10)$$

1. Рассмотрим сначала случай изомагнитного и изобернуллиевого течения $B = \text{const}$ и $U = \text{const}$. Этот случай является вырожденным по отношению к (4.2) и приводит не к степенной, а к логарифмической зависимости ξ от r . Согласно (3.6) получаем $\xi(r, z)$ в виде

$$\xi = \rho_0 R_0^2 v_R(z) \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2} \ln \frac{r}{R(z)}. \quad (4.11)$$

Приравнивая ξ к постоянной, найдем форму электродов. При $v_0 \rightarrow 0$, из (4.11) следует

$$\frac{r_{1,2}(z)}{R} = \left(\frac{r_{1,2}^*}{R} \right)^{\frac{2}{3\sqrt{3}x(1-x^2)}}, \quad x \equiv \frac{v_R(z)}{v_M}. \quad (4.12)$$

Если принять $r = R = \text{const}$ за один из электродов, то в зависимости от того $r_2^* > R$ или $r_1^* < R$ форма канала будет иметь вид, изображенный на рис. 3 или 4. Критическое сечение, которое совпадает в данном случае с минимумом расстояния между электродами, определяется равенством $v_R^2(z^*) = v_M^2/3$. Плотность ρ пропорциональна r^{-2} и равна

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \frac{v_M^2 - v_R^2(z)}{v_M^2 - v_0^2}, \quad (4.13)$$

а скорость зависит только от z и равна $v_R(z)$.

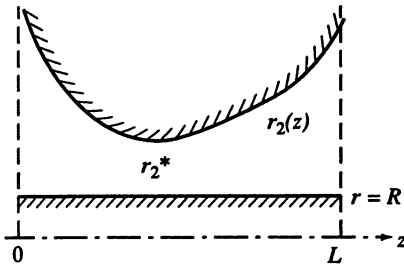


Рис. 3

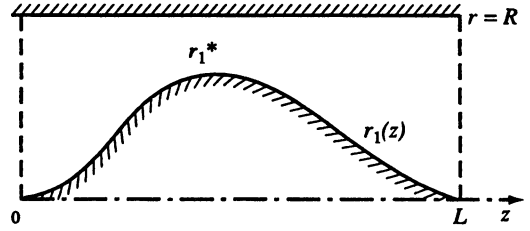


Рис. 4

Заметим, что если бы вместо задания $v_R(z)$ мы задали профили обоих электродов, то нам пришлось бы решать относительно v_R кубическое уравнение (4.12), корни которого могли бы оказаться комплексными. Это поясняет сказанное выше в разд. 3 о несуществовании в общем случае решения задачи типа Штурма–Лиувилля для нелинейных уравнений.

Приведем теперь основные характеристики рассматриваемого течения, которые легко могут быть вычислены из соотношений (1.13) – (1.18), для функции ξ , определяемой формулой (4.11):

$$\dot{m} = 2\pi\xi \Big|_{r_{1,2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \rho_0 R^2 v_M \left| \ln \frac{r_{1,2}^*}{R} \right|, \quad (4.14)$$

$$F = \dot{m} v_M = \frac{8I^2}{3\sqrt{3}c^2} \left| \ln \frac{r_{1,2}^*}{R} \right|, \quad (4.15)$$

$$V = \frac{2}{3\sqrt{3}c} \frac{v_M R}{cR} \frac{2I}{cR} \left| \ln \frac{r_{1,2}^*}{R} \right|. \quad (4.16)$$

Здесь $I = \frac{c}{2} R H_\phi(R, 0)$ – ток, протекающий через систему; $r_{1,2}^*$ – расстояние от оси минимума профиля $r_2(z)$ либо максимума профиля $r_1(z)$ в зависимости от того, какой из электродов – $R = \text{const}$ или $r_{1,2}(z)$ – является внутренним (см. рис. 3, 4).

2. Аналогичными свойствами обладают изомагнитные течения $B = \text{const}$ ($\nu = -2$). При этом U и V равны

$$U = \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^2 + \frac{C_1^2(0)}{\rho_0 R_0^2}, \quad (4.17)$$

$$B = \frac{C_1(0)}{\rho_0 R_0^2}, \quad \xi_0 = \frac{\rho_0 v_0 R_0^2}{\mu}, \quad (4.18)$$

и решение может быть получено при произвольном μ , т.е. при произвольной зависимости начальной скорости от r . Интегрирование (3.6) дает

$$\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} = \frac{1}{2v_0} \left\{ (v_R + v_0) \left(\frac{r}{R} \right)^{\mu \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} - (v_R - v_0) \left(\frac{r}{R} \right)^{-\mu \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} \right\}. \quad (4.19)$$

Распределение плотности и скорости в потоке имеет вид

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}, \quad (4.20)$$

$$v^2 = v_R^2 - v_0^2 + v_0^2 \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^2, \quad (4.21)$$

причем форма электродов определяется уравнением

$$\left(\frac{r}{R} \right)^{\mu \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} = \frac{v_0 \eta + \sqrt{v_0^2 \eta^2 + v_R^2 - v_0^2}}{v_0 + v_R}, \quad (4.22)$$

если приравнять в нем постоянной величину $\eta \equiv \frac{\xi + \xi_0}{\xi_0}$. Эти течения допускают предельный переход $v_0 \rightarrow 0$.

3. В случае неизомагнитных течений ($v \neq -2$) имеет место сильная зависимость характеристик течения от величины начальной скорости v_0 . Мы рассмотрим случай, когда начальная скорость не зависит от радиуса ($\mu = 0$). В этом случае (3.6) также может быть проинтегрировано в общем виде при произвольном v , так как:

$$U = \frac{v_0^2}{2} + \frac{C_1^2(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-1}, \quad (4.23)$$

$$B = \frac{C_1(0)}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} \right)^{-1}, \quad \xi_0 = \frac{\rho_0 v_0 R_0^2}{v + 2}.$$

Согласно (3.6) при этом имеем

$$\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} = \frac{1}{4v_0^2} \left\{ (v_R + v_0) \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{v+2}{2} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} - (v_R - v_0) \left(\frac{r}{R} \right)^{-\frac{v+2}{2} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} \right\}^2. \quad (4.24)$$

Плотность и скорость выражаются через $\eta = \frac{\xi + \xi_0}{\xi_0}$ формулами

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2} \eta, \quad v^2 = v_0^2 + (v_R^2 - v_0^2) \eta^{-1}, \quad (4.25)$$

а форма электродов может быть получена из равенства

$$\left(\frac{r}{R} \right)^{(v+2) \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}} = \frac{2v_0^2 \eta + v_R^2 - v_0^2 + 2v_0 \sqrt{v_0^2 \eta^2 + (v_R^2 - v_0^2) \eta}}{(v_0 + v_R)^2}, \quad (4.26)$$

где $\eta = \text{const}$.

Нетрудно убедиться, что при $\mu \rightarrow 0$ и $v \rightarrow -2$ уравнения (4.19) и (4.24) переходят в (4.11).

В рассматриваемых течениях плотность в центральной части сопла стремится к бесконечности при $v_0 \rightarrow 0$. Это является проявлением эффекта сжатия, о котором говорилось выше. Соответственно при уменьшении v_0 возрастает поток, проходящий через сопло заданного сечения. Следует иметь в виду, что при большой плотности

газовое давление может стать сравнимым с магнитным давлением, и мы выйдем из области применимости рассматриваемого приближения $\beta \ll 1$. Кроме того, представляется вероятной неустойчивость такого течения вследствие резкой зависимости его параметров от радиуса r при малых v_0 .

4. Аналогичные результаты мы получим и при $\mu \neq 0$. Рассмотрим в качестве примера случай $\mu = -1$, $\nu = 0$, когда во входном сечении $z = 0$ плотность постоянна, а скорость пропорциональна r^{-1} . При этом $U \sim B$,

$$\frac{\xi + \xi_0}{\xi_0} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{v_R}{v_0} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}}, \quad \xi_0 = \rho_0 v_0 R^2 \quad (4.27)$$

и форма электродов такая же, как в случае, рассмотренном в п. 1 ($B = \text{const}$, $U = \text{const}$). Зависимость ρ и v от координат получается в виде

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{r^2} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{v_R}{v_0} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}, \quad (4.28)$$

$$v = v_R \left(\frac{r}{R}\right)^{-\frac{v_R}{v_0} \frac{v_M^2 - v_R^2}{v_M^2 - v_0^2}}. \quad (4.29)$$

Здесь также имеет место резкая зависимость ρ и v от r , если v_0 достаточно мало и r заметно отличается от R . Это указывает на сильное влияние начального распределения плотности на характеристики течения в каналах большого сечения.

Полученные результаты говорят о том, что только изомагнитные течения слабо зависят от величины начальной скорости v_0 при $v_0 \ll v_M$. Остальные случаи соответствуют плавной зависимости ρ и v от обеих координат r и z только при достаточно больших начальных скоростях.

В заключение отметим, что в рассматриваемых неизомагнитных течениях такие характеристики, как ток I и тяга F , не имеют аномалий при $v_0 \rightarrow 0$, в то время как расход массы $\dot{m} \rightarrow \infty$, а напряжение $V \rightarrow 0$. Например, в случае (4.28) эти характеристики соответственно равны

$$I = \frac{c}{2} \sqrt{2\pi\rho_0} R v_M, \quad F = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \rho_0 R^2 v_M^2 \ln \frac{r_2^*}{R}, \quad (4.30)$$

$$\dot{m} = 2\pi\rho_0 R^2 v_0 \left(\frac{r_2^*}{R}\right)^{\frac{2v_M}{3\sqrt{3}v_0}}, \quad V = \frac{\sqrt{2\pi\rho_0}}{c} R v_M v_0. \quad (4.31)$$

Здесь $r = R = \text{const}$ – радиус центрального электрода и принято, что $v_0 \ll v_M$. Выражения для I и F совпадают с соответствующими выражениями для случая $B = \text{const}$, $U = \text{const}$ (см. п. 1).

5. ИЗОМАГНИТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ ОСИ Z

1. Рассмотрим случай, когда $B = \text{const}$, но плазма не является холодной, т.е. $W \neq 0$. Из уравнений (3.2) и (3.7) следует

$$\frac{v^2}{2} = U(\xi) - C_3(z). \quad (5.1)$$

Отсюда видно, что если во входном сечении скорость $v \rightarrow 0$, то $U = \text{const}$. Таким образом, при $v_0 \rightarrow 0$ изомагнитные течения, медленно меняющиеся вдоль z , являются одновременно и изобернуллиевыми. Зависимость U от ξ определяется здесь только распределением по радиусу начальных скоростей.

Мы ограничимся далее рассмотрением течений при $U = \text{const}$. При этом в предельном случае холодной плазмы $W \rightarrow 0$ мы получим течение, рассмотренное в п. 1 разд. 4, где было показано, что $\rho \sim r^{-2}$, а $rH_\varphi = \text{const}$, т.е. весь ток входит через центральный электрод. Если же плазма горячая ($W \gg B^2 r^2 \rho$), то согласно (3.7) и (1.7) имеем $\rho|_{z=0} = \text{const}$, $H_\varphi|_{z=0} \sim r$, и, следовательно, j_z – компонента плотности тока постоянна во всем входном сечении, и этот случай может быть реализован вообще без центрального электрода. Запишем (3.7) в виде

$$w\rho^{\gamma-1} + \rho r^2 B^2 = C_3(z), \quad w = \text{const}. \quad (5.2)$$

Для явного вычисления ξ с помощью (3.8) необходимо разрешить (5.2) относительно ρ . Поскольку для реальных γ этого сделать в простой форме нельзя, мы рассмотрим порознь два случая: $\beta = \frac{8\pi\rho}{H^2} \gg 1$ и $\beta \ll 1$, применяя разложения по малым параметрам β^{-1} и β . Функцию тока ξ мы будем определять непосредственно из уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \rho r v(z), \quad (5.3)$$

где скорость v согласно (5.1) при $U = \text{const}$ зависит только от z и может считаться заданной величиной.

А. В случае $\beta \gg 1$ методом последовательных приближений из уравнения (3.7) получаем

$$\rho = \rho_0(z) - \frac{\rho_0(z) r^2 B^2}{W'(\rho_0)} + \dots \quad (5.4)$$

Здесь $\rho_0 = \rho_0(z)$ – плотность в нулевом приближении, определяющаяся равенством $W(\rho_0) = U - \frac{v^2(z)}{2}$. Соответственно (5.3) дает

$$\xi = \rho_0(z) v(z) \frac{r^2 - r_1^2(z)}{2} - \frac{\rho_0(z) v(z) B^2}{W'(\rho_0)} \frac{r^4 - r_1^4(z)}{4} + \dots, \quad (5.5)$$

где ξ нормирована так, что она обращается в нуль на внутреннем электроде $r = r_1(z)$. Для $W \sim \rho^{\gamma-1}$ формула (5.5) переписывается в виде

$$\xi = \rho_0 v \frac{r^2 - r_1^2}{2} - \frac{\rho_0 v B^2}{(\gamma-1)W(\rho_0)} \frac{r^4 - r_1^4}{4} + \dots \quad (5.5)$$

Б. В случае $\beta \ll 1$, обозначая $U - \frac{v^2}{2} = f(z)$, аналогично находим (см. (3.7))

$$\rho = \frac{f(z)}{r^2 B^2} - \frac{1}{r^2 B^2} W\left(\frac{f(z)}{r^2 B^2}\right) + \dots \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что ξ равно

$$\xi = \frac{\nu(z)f(z)}{B^2} \ln \frac{r}{r_1(z)} + \frac{\nu(z)}{2B^2} \int_{x_1}^x \frac{W(\rho)d\rho}{\rho} + \dots, \quad (5.7)$$

где $x = \frac{f(z)}{r^2 B^2}$, $x_1 = \frac{f(z)}{r_1^2 B^2}$. Подставляя $W \sim \rho^{\gamma-1}$, мы получим

$$\xi = \frac{\nu f}{B^2} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\nu}{2(\gamma-1)B^2} \left\{ W\left(\frac{f}{r^2 B^2}\right) - W\left(\frac{f}{r_1^2 B^2}\right) \right\} + \dots \quad (5.7')$$

2. Рассмотрим теперь вопрос о переходе скорости течения ν через критическую скорость. Если существует такое сечение канала $z = z^* = \text{const}$, где скорость имеет только продольную составляющую, то критическая скорость, равная скорости распространения сигнала, достигается в этом сечении. Действительно, дифференцируя частным образом по z первое уравнение (1.6) и уравнение (1.8) и полагая $\nu = \nu_z$, $\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$, мы получим

$$\nu \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0, \quad (c_T^2 + c_A^2) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0, \quad (5.8)$$

где c_T – скорость звука, а c_A – альфвеновская скорость. Если скорость при $z = z^*$ продолжает нарастать, т.е. в рассматриваемом сечении $\frac{\partial \nu}{\partial z} \neq 0$, то согласно (5.8) получаем для ν^* выражение

$$\nu^* = \sqrt{c_T^2 + c_A^2}, \quad (5.9)$$

совпадающее со скоростью распространения сигнала c_s .

Нетрудно убедиться, что в предельных случаях $\beta \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow 0$ переход через местную скорость звука и через альфвеновскую скорость (если $\nu|_{z=0} \rightarrow 0$) происходит в плоскости $z = \text{const}$. Однако в промежуточном случае конечного β такой плоскости, вообще говоря, не существует и переход через критическую скорость происходит не в плоскости, а на некоторой поверхности. Этот результат может быть получен и в рамках рассматриваемого здесь "адиабатического" приближения.

А. Действительно, пусть $U = \text{const}$, $B = \text{const}$, тогда, как указывалось выше, $\nu = \nu(z)$. Используя известную формулу $c_T^2 = (\gamma-1)W$ и уравнение Бернулли (1.8), запишем величину $c_s^2 = c_T^2 + c_A^2$ в виде

$$c_s^2 = (\gamma-1) \left(U - \frac{\nu^2(z)}{2} \right) - (\gamma-2)r^2 B^2 \rho. \quad (5.10)$$

Для горячей плазмы, при $\beta \gg 1$, в нулевом приближении по параметру β^{-1} плотность $\rho = \rho_0(z)$ определяется равенством $W(\rho_0) = U - \nu^2/2$, и в первом приближении мы можем подставить в (5.10) вместо ρ величину $\rho_0(z)$. Приравняв величину c_s скорости потока $\nu(z)$, получаем из (5.10) уравнение поверхности перехода через критическую скорость:

$$(1+\gamma) \frac{\nu^2(z)}{2} - (2-\gamma)B^2 r^2 \rho_0(z) = (\gamma-1)U. \quad (5.11)$$

Поскольку $\nu(z)$ – возрастающая функция, а $\rho_0(z)$ – убывающая функция, то

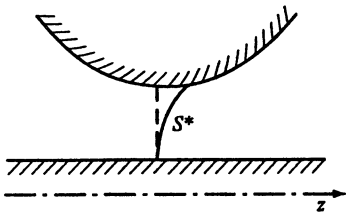


Рис. 5

поверхность перехода с возрастанием радиуса r проходит через большие значения z (рис. 5)³.

Б. Рассмотрим другой случай, когда плазма холодная ($\beta \ll 1$). В этом случае в нулевом приближении по параметру β плотность равна $\rho_0(r, z) = \frac{(U - v^2/2)}{r^2 B^2}$.

Величину c_s^2 запишем теперь в виде

$$c_s^2 = U - \frac{v^2}{2} + (\gamma - 2)W(\rho). \quad (5.12)$$

Здесь мал последний член, и мы можем в первом приближении по β положить в нем $\rho = \rho_0(r, z)$. Приравнявая $c_s^2 = v^2$, имеем

$$\frac{3}{2}v^2(z) + (2 - \gamma)W(\rho_0) = U. \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что и в этом случае критическая поверхность наклонена в область больших z (см. рис. 5).

В рассмотренных случаях малых и больших β критическая поверхность имеет малые углы с плоскостью $z = \text{const}$. Очевидно, максимальный наклон критической поверхности будет при $\beta \sim 1$.

3. Выше, в разд. 2, рассматривая течения в узких каналах при $\beta \gg 1$, мы отмечали, что возможен эффект переворачивания направления тока. Покажем, что в изомагнитных ($B = \text{const}$) медленно изменяющихся течениях такой эффект невозможен. Действительно, обозначая $rH_\phi = \sqrt{4\pi}I$, запишем уравнение (5.2) в виде

$$\frac{I}{B} + w \frac{I^{\gamma-1}}{(r^2 B)^{\gamma-1}} = C_3(z). \quad (5.14)$$

При наличии эффекта переворачивания тока должна существовать точка, в которой $j_r = j_z = 0$. Однако, вычисляя производные $\frac{\partial I}{\partial z}$ и $\frac{\partial I}{\partial r}$ (см. (1.10)) и учитывая, что $C_3(z)$ на основании (5.1) является убывающей функцией z , можно убедиться, что эти производные не могут одновременно обратиться в нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 3.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1967.
3. Crocco L. // Aerotecnica. 1937. Vol. 17. P. 519.
4. Шубин А.П. // Журн. техн. физики. 1962. Т. 32. С. 3.
5. Кибель И.А., Кочин Н.Е., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.

³ Известный в обычной гидродинамике [5] эффект наклона критической поверхности S^* в противоположную сторону имеет порядок ϵ^2/β по отношению к описанному здесь.

ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА*

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] рассмотрены аксиально-симметричные течения идеально проводящей плазмы без учета эффекта Холла. Однако если плазма достаточно редкая, то учет эффекта Холла принципиально необходим.

В данной работе мы выясним специфику проявления Холл-эффекта в простейшем случае стационарных плоских течений, когда электронным давлением можно пренебречь и можно считать плазму идеально проводящей. При этих допущениях закон Ома можно записать в виде

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] = 0. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{v}_e – скорость электронов, связанная со скоростью среды \mathbf{v} (т.е. скоростью ионов) и плотностью тока \mathbf{j} соотношением

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{en}. \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) использованы стандартные обозначения: e – элементарный заряд ($e > 0$), n – концентрация частиц одного знака (плазма предполагается для простоты полностью ионизованной), \mathbf{E} – напряженность электрического поля, \mathbf{H} – напряженность магнитного поля. Формально учет эффекта Холла сводится к написанию в уравнении (1.1) скорости \mathbf{v}_e вместо \mathbf{v} .

Остальные уравнения магнитной гидродинамики возьмем в стандартной форме

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.3a)$$

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (1.3v)$$

$$\rho \rho^{-\gamma} = \text{const}. \quad (1.3r)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), мы получим

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \frac{1}{enc} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1.4)$$

причем при стационарном процессе

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (1.5)$$

Если холловское поле

$$\bar{\mathcal{E}} = -\frac{1}{enc} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \quad (1.6)$$

является потенциальным вектором, то, взяв rot (1.4), мы приходим к обычному уравнению магнитной гидродинамики

$$\operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1.7)$$

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1964. Т. 34. С. 1141–1153.

и, следовательно, картина течения при учете эффекта Холла будет такой же, как и в его отсутствие, за исключением того, что появится некоторое добавочное потенциальное поляризационное поле

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi_1. \quad (1.8)$$

Преобразуя правую часть (1.3б), мы можем написать

$$\nabla \frac{v^2}{2} - [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] = -\nabla W + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \quad (1.9)$$

$$W = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \rho = Mn.$$

Здесь W – энтальпия, а M – масса иона.

Из (1.9) видно, что холловское поле будет потенциальным вектором, если течение безвихревое. Мы увидим ниже, что в плоском случае это условие не только достаточное, но и необходимое.

Сравнивая (1.6), (1.8) и (1.9), мы приходим к выводу, что поляризационный потенциал ϕ_1 равен

$$\phi_1 = \frac{M}{e} \left(\frac{v^2}{2} + W \right). \quad (1.10)$$

Однако для того чтобы подобное поляризационное поле могло существовать, необходимо, вообще говоря, принять специальные меры. Так, например, если мы разгоняем плазму в канале, то уравнивающее холловскую ЭДС электрическое поле будет касательно к электродам, и поэтому такое поле будет разрушаться вблизи электродов, если они хорошо проводящие, приводя к образованию специфического холловского пограничного слоя. Для того чтобы этого избежать, необходимо использовать рассеченные электроды.

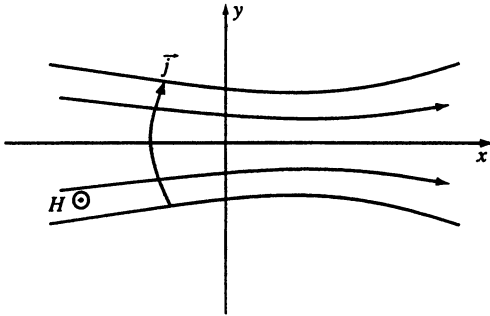


Рис. 1

уделено вихревым течениям, которые не могут быть сведены к течениям обычной магнитной гидродинамики (рис. 1).

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Выведем законы сохранения для системы уравнений (1.1), (1.3). Для этого отметим, что, комбинируя (1.1) и (1.9), мы можем написать

$$\nabla \frac{v^2}{2} - [\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}] = -\nabla W + \frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (2.1б)$$

Отсюда

$$[\mathbf{v}_e, \mathbf{H}] = c \nabla \phi, \quad (2.2a)$$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{H}^*] = c \nabla \Phi, \quad (2.2b)$$

где

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2.3a)$$

$$\Phi = \phi + \frac{M}{e} \left(W + \frac{v^2}{2} \right). \quad (2.3b)$$

Будем считать, что течение плоское:

$$v_z = 0, \quad H_x = H_y = 0. \quad (2.4)$$

Для того чтобы удовлетворить двум уравнениям непрерывности

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \rho \mathbf{v}_e = 0, \quad (2.5)$$

введем две функции ψ и χ :

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \rho v_{ex} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \rho v_{ey} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (2.6)$$

или

$$\rho \mathbf{v} = \text{rot } \psi \mathbf{e}_z, \quad \rho \mathbf{v}_e = \text{rot } \chi \mathbf{e}_z.$$

Первая из этих функций является функцией потока ионов (среды), а вторая (с точностью до множителя m/M) – электронов.

Подставляя (2.6) в (1.3в), мы без ограничения общности получим связь ψ , χ и H в виде

$$\chi = \psi - \frac{Mc}{4\pi e} H, \quad H \equiv H_z. \quad (2.7)$$

Умножая уравнения (2.2) соответственно на \mathbf{v}_e и \mathbf{v} , получим два аналога уравнения Бернулли:

$$\phi = \phi(\chi), \quad \Phi = \Phi(\psi). \quad (2.8)$$

Далее, если вместо \mathbf{v} и \mathbf{v}_e подставить в (2.2) их выражения (2.6), то после очевидных преобразований находим

$$-\frac{H^*}{\rho} \nabla \psi = c \nabla \Phi, \quad -\frac{H}{\rho} \nabla \chi = c \nabla \phi. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8), отсюда получаем два уравнения замороженности:

$$\frac{H^*}{\rho} = \frac{H + \frac{Mc}{e} \text{rot}_z \mathbf{v}}{\rho} = -c \Phi'(\psi), \quad (2.10a)$$

$$\frac{H}{\rho} = -c \phi'(\chi). \quad (2.10b)$$

Уравнения (2.6)–(2.8) и (2.10) и заменяют первоначальную систему уравнений.

Входящие в (2.8) и (2.10) функции $\Phi(\psi)$ и $\phi(\chi)$ – в принципе произвольные функции своих аргументов. Эти зависимости должны определяться из граничных условий и геометрии канала [2].

Если в (2.10а) вместо v подставить его значение (2.6), то получим уравнение для ψ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \rho \frac{e}{M} (\Phi' - \phi'), \quad (2.11)$$

которое должно решаться совместно с уравнением вмороженности (2.10б) и уравнением Бернулли (2.3б), (2.8). Отметим некоторые особенности полученных уравнений.

Прежде всего обращает на себя внимание то обстоятельство, что мы имеем два различных семейства линий тока: линии тока жидкости $\psi = \text{const}$, вдоль которых сохраняются интеграл Бернулли и обобщенное условие вмороженности (2.8), (2.10а), и линии тока электронов $\chi = \text{const}$, вдоль которых сохраняются потенциал электрического поля ϕ и обычное условие вмороженности (2.10б).

В дальнейшем нас будет интересовать исключительно течение в каналах. Для того чтобы отчетливее представить себе характер процессов в рассматриваемой модели, построим канал в координатах ψ , H и изобразим распределение потенциала вдоль границ канала $\psi = 0$, $\psi = \psi_1$ в виде некоторой эпюры так, как это сделано на рис. 2, а. Здесь же мы изобразим линии $\chi = \text{const}$, вдоль которых сохраняются ϕ и H/ρ . На линии $H = H_0$ мы также отложим $\Phi(\psi)$.

Удобство введенной диаграммы в том, что она, во-первых, позволяет наглядно изобразить взаимосвязь отдельных частей канала, а во-вторых, мы можем в любой точке диаграммы (ψ , H) с помощью (2.10б) найти ρ , с помощью (2.3б), (2.8) найти v и с помощью (2.10а) найти $\text{rot}_z v$, т.е. найти все характеристики процесса. Решение же уравнения (2.11) только дает привязку к реальной геометрии канала. Заметим, что (2.11) является уравнением второго порядка и поэтому зависит от двух функций, каковыми могут быть уравнения стенок канала.

Несколько слов о безвихревом течении. Зная $\Phi(\psi)$ и $\phi(\chi)$, мы определяем $\text{rot}_z v$

$$\frac{Mc}{e\rho} \text{rot}_z v = -c(\Phi'(\psi) - \phi'(\chi)). \quad (2.12)$$

Поскольку справа стоит разность двух функций, зависящих от разных аргументов, то течение может быть безвихревым только тогда, когда $\phi' = \Phi' = \text{const}$, т.е. течение изобернуллиево и изомагнитно. Таким образом, для этого необходимо и достаточно, чтобы ϕ и Φ были линейными функциями соответственно χ и ψ .

Из (2.10) вытекает еще одно важное следствие. А именно, если потенциал $\phi(\chi)$ является немонотонной функцией, то он имеет максимум или минимум, а в этом случае производная ϕ' обращается в нуль и, следовательно, плотность ρ должна обращаться в бесконечность на всей линии $\chi = \text{const}$. Следовательно, непрерывное течение жидкости с немонотонным изменением потенциала в рассматриваемой нами модели невозможно.

Если немонотонным является изменение $\Phi(\psi)$, то в этом случае при некотором значении ψ

$$H + \frac{Mc}{e} \text{rot}_z v = 0.$$

Используя диаграмму рис. 2, мы можем наглядно изобразить отличие течений, описываемых магнитной гидродинамической теорией, от течений с сильно выраженным Холл-эффектом.

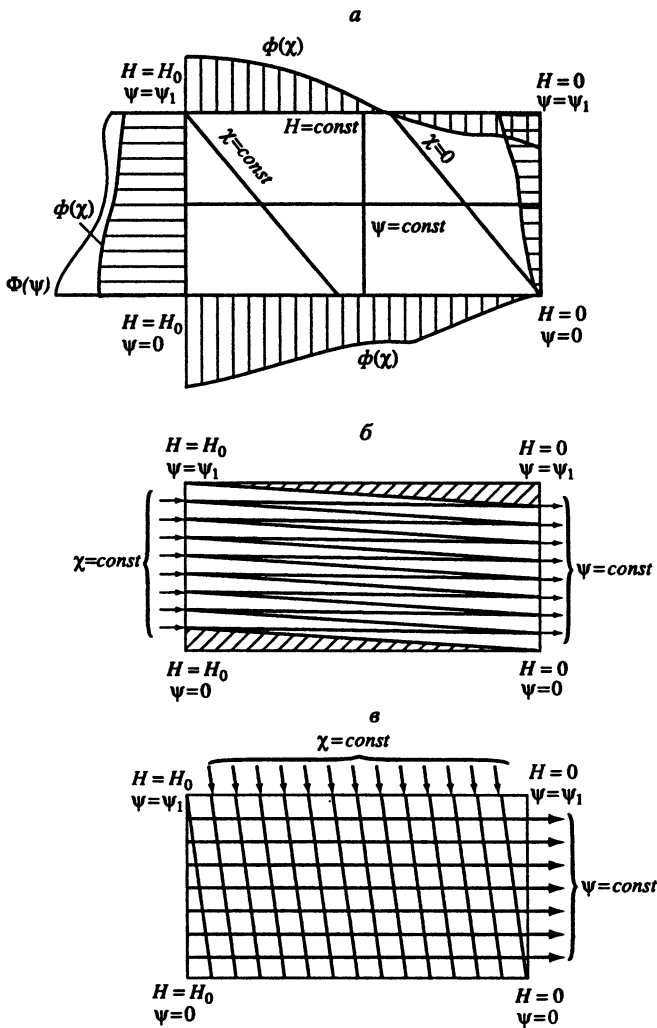


Рис. 2

В случае гидродинамических течений линии $\psi = \text{const}$ и $\chi = \text{const}$ совпадают или, точнее говоря, почти совпадают. Следовательно, как интеграл Бернулли, так и распределение потенциала и постоянная вмерзженности $k(\psi) = H/\rho$ определяются условиями на входе в канал (рис. 2, б). Наоборот, в условиях сильно выраженного Холл-эффекта (холловские течения) распределение потенциала и постоянная вмерзженности определяются значением ϕ на электродах и изменяются при течении в канале (рис. 2, в). Нужно, однако, подчеркнуть, что течение с одними и теми же параметрами может быть, вообще говоря, и гидродинамическим, и холловским. Действительно, если в гидродинамическом течении взять очень узким канал, т.е. $\psi_1 \rightarrow 0$, то мы придем к холловскому течению, и наоборот, устремляя в холловском течении $\psi_1 \rightarrow \infty$, мы получим гидродинамическое течение в основной части потока.

Очевидно, критерием характера течения может служить величина

$$\xi = \frac{\kappa H}{\psi}, \quad \kappa \equiv \frac{Mc}{4\pi e}. \quad (2.13)$$

Если W невелико, то

$$v \sim \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (2.14)$$

Далее,

$$\psi \sim \rho v f, \quad (2.15)$$

где f – расстояние между электродами. Подставляя эти оценки в (2.13), получим

$$\xi \sim \frac{R_{i\lambda}}{f} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\Pi_i}}. \quad (2.16)$$

Здесь Π_i – так называемый "погонный ион":

$$\Pi_i = n f^2 r_{0i}, \quad r_{0i} = \frac{e^2}{Mc^2}, \quad (2.17)$$

а $R_{i\lambda} = \frac{Mc v}{eH}$ – ионный ларморовский радиус, рассчитанный по характерной скорости плазмы.

Итак, если поперечные размеры системы много больше ионного ларморовского радиуса, рассчитанного по характерной скорости течения, то течение является гидродинамическим. В противном случае – холловским.

Выпишем теперь полную систему уравнений для плоских течений с учетом эффекта Холла, введя параметр $\kappa = \frac{Mc}{4\pi e}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\rho c}{4\pi\kappa} [\phi'(\psi - \kappa H) - \Phi'(\psi)] = 0, \quad (2.18a)$$

$$\frac{H}{\rho} = -c\phi'(\psi - \kappa H), \quad (2.18б)$$

$$W(\rho) + \frac{v^2}{2} = -\frac{c}{4\pi\kappa} [\phi(\psi - \kappa H) - \Phi(\psi)]. \quad (2.18в)$$

Из формулы (2.18б) следует, что плотность ρ будет уменьшаться вдоль электрода $\psi = 0$ вместе с H , если ϕ изменяется медленнее, чем H^2 , и будет увеличиваться, если ϕ изменяется быстрее, чем H^2 .

Из (2.18) легко получить систему уравнений обычной магнитной гидродинамики, если положить $\Phi(\psi) \equiv \phi(\psi) + \kappa U(\psi)$ и устремить κ к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\rho c}{4\pi} [H\phi''(\psi) + (U'(\psi))] = 0, \quad (2.19a)$$

$$\frac{H}{\rho} = -c\phi'(\psi), \quad (2.19б)$$

$$W + \frac{v^2}{2} = \frac{c}{4\pi} [H\phi'(\psi) + U(\psi)]. \quad (2.19в)$$

Представляет также интерес и обратный предельный случай "ультрахолловских течений", когда $\kappa \rightarrow \infty$. Если вместо ϕ и Φ ввести две новые функции $\Phi\left(H - \frac{\psi}{\kappa}\right) =$

$= \frac{1}{\kappa} \phi(\psi - \kappa H)$ и $\Phi_1(\psi) = \frac{1}{\kappa} \Phi(\psi)$ и затем устремить к нулю $\frac{1}{\kappa}$, то из (2.18) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\rho c}{4\pi} \Phi_1'(\psi) = 0, \quad (2.20a)$$

$$\frac{H}{\rho} = c\phi'(H), \quad (2.20б)$$

$$W + \frac{v^2}{2} = \frac{c}{4\pi} [\Phi_1(\psi) - \phi(H)]. \quad (2.20в)$$

В отличие от магнитогидродинамических уравнений (2.19), ультрахолловские уравнения (2.20) имеют решение, описывающее ускорение плазмы между плоскими электродами. Действительно, рассматривая холодную плазму ($W = 0$) и полагая $\Phi_1 = \text{const}$, получим $\psi \sim y$, а распределение скорости $v(x)$, потенциала $\phi(x)$ и плотности $\rho(x)$ в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{1}{8\pi\rho_0\nu_0} (H_0^2 - H^2), \\ \phi &= \phi_0 - \frac{M}{2e} (v^2 - v_0^2), \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{8\pi\rho_0^2\nu_0^2} (H_0^2 - H^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

При уменьшении магнитного поля $H(x)$ от H_0 до нуля плазма ускоряется на величину

$$\frac{H_0^2}{8\pi\rho_0\nu_0} = \frac{c_{A0}^2}{2\nu_0}.$$

Отметим, что в рассмотренном нулевом приближении по $\frac{1}{\kappa}$ нет поперечной составляющей электрического поля E_y , которое компенсирует действующую на ионы силу Лоренца $\frac{e}{c} v H$. Это поле появляется, если учесть члены $\sim \frac{1}{\kappa}$.

3. ТЕЧЕНИЕ В УЗКОМ КАНАЛЕ

Канал мы будем называть узким, если изменением скорости и плотности в поперечном направлении можно пренебречь. Удобство этого понятия в том, что уравнение непрерывности можно записать в виде

$$\rho v f = \psi_1 = \text{const}, \quad (3.1)$$

где f – расстояние между электродами. Использование (3.1) позволяет избежать интегрирования уравнения (2.11).

Если в обычной гидродинамике понятие узкого канала не вызывает затруднений, то при учете эффекта Холла мы сталкиваемся с иной ситуацией. Действительно, при $f \rightarrow 0$ стремится к нулю $\xi^{-1} = \frac{\psi_1}{\kappa H_0}$ и, следовательно, течение в узком, точнее, бесконечно узком канале становится обязательно негидродинамическим. Для того чтобы

получить гидродинамическое течение в узком канале, мы должны зафиксировать достаточно малое Ψ_1 (или f) и устремить к нулю $\kappa = \frac{Mc}{4\pi e}$.

Нетрудно убедиться аналитически в том, достаточно очевидном с точки зрения диаграммы рис. 2 факте, что понятие узкого канала в нашем случае корректно лишь при $\xi \ll 1$ или $\xi \gg 1$. Если же $\xi \sim 1$, т.е. $f \sim R_{in}$, то перепад скоростей на толщине канала будет порядка самой скорости течения (разумеется, если течение существенно неизомогнитно). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаями $\xi \leq 1$ и $\xi \geq 1$.

1. Если $\xi \ll 1$, то мы имеем чисто гидродинамическую картину течения. Ее можно описать уравнениями

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{H^2}{4\pi\rho} = v = \text{const}, \quad (3.2a)$$

$$\frac{H}{\rho} = k = \text{const}, \quad (3.2б)$$

$$\rho v f = \Psi_1 = \text{const}. \quad (3.2в)$$

Если учесть, что на выходе из системы $H = 0$, а следовательно, и $\rho = 0$, то скорость на выходе определяется выражением

$$v_{\max} = \sqrt{2U} = \sqrt{2W_0 + \frac{H_0^2}{2\pi\rho_0}}. \quad (3.3)$$

Поскольку на входе $\rho = \rho_0$ конечно и $v \rightarrow 0$, а на выходе, наоборот, $\rho \rightarrow 0$, а v конечно, то сечение ускорителя

$$f = \frac{\Psi_1}{\rho v} \quad (3.4)$$

должно иметь вид сопла.

Наконец, умножив (3.2б) на (3.2в), мы получаем

$$vHf = \text{const}, \quad (3.5)$$

т.е. напряжение между электродами остается постоянным. В системе (3.2) нет явной зависимости параметров от x . Для того чтобы такую определить, мы должны задать одну из величин как явную функцию x .

2. При $\xi \gg 1$ система уравнений записывается в виде

$$\rho v f = \Psi_1 = \text{const}, \quad (3.6a)$$

$$\frac{H}{\rho} = \frac{4\pi e}{M} \frac{d\phi(H)}{dH}, \quad (3.6б)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{e}{M} \phi(H) = U = \text{const}. \quad (3.6в)$$

Здесь $\phi(H)$ – разность потенциалов, введенная выше как функция x . Отсюда видно, что, задав $\phi(H)$ и любую величину в функции от x , мы получим все величины как функции x .

Практически могут оказаться интересными и другие формы задания величин. В частности, можно задать $f(x)$ и $\phi(H)$. В этом случае система (3.6) также имеет однозначное решение. Действительно, из (3.6) находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4\pi e}{M} \frac{d\phi}{HdH}, \quad (3.7a)$$

$$v = \sqrt{2U - 2W(\rho) - \frac{2e}{M}\phi}, \quad (3.7\text{б})$$

$$f = \psi_1 \frac{4\pi e}{M} \frac{d\phi}{H dH \sqrt{2U - 2W(\rho) - \frac{2e}{M}\phi}}. \quad (3.7\text{в})$$

Решая уравнение (3.7в), мы можем найти $\phi(H)$, а тем самым ρ и v .

Наконец, мы можем найти изменения вихря в потоке, используя (2.12)

$$\frac{Mc}{e\rho} \text{rot}_z \mathbf{v} = -c \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\phi}{dH} + \Phi' \right), \quad (3.8)$$

здесь Φ' – некоторая константа, определяемая начальными условиями. Подставляя сюда выражение для ρ , получим

$$\frac{Mc}{e} \text{rot}_z \mathbf{v} = -c \frac{MH dH}{4\pi e d\phi} \left(\frac{4\pi e}{Mc} \frac{d\phi}{dH} + \Phi' \right).$$

В частности, если на входе $\Phi' = 0$, то

$$\text{rot}_z \mathbf{v} = -\frac{eH}{Mc}. \quad (3.9)$$

Проиллюстрируем особенности течений, описываемых системой (3.6), на примере течения холодной плазмы ($W = 0$) при

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^n \quad (3.10)$$

и начальной скорости, равной нулю.

В этом случае, как показывает (3.7б), скорость на выходе, т.е. при $H = 0$, равна ($n > 0$)

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2e\phi_0}{M}}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.10) в (3.7а) и обозначая плотность плазмы на входе при $H = H_0$ через ρ_0 , получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4\pi e}{M} \phi_0 \frac{n}{H_0^2} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{n-2} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{H}{H_0} \right)^{n-2}, \quad (3.12)$$

и, следовательно, учитывая (3.11),

$$v_{\max} = \frac{H_0}{\sqrt{2\pi n \rho_0}}. \quad (3.13)$$

Из формулы (3.12) следует, что при $n > 2$ на выходе $\rho \rightarrow \infty$, а при $n = 2$ стремится к конечной величине. Полученные результаты показывают, что здесь требуется более аккуратное рассмотрение и, в частности, необходим учет конечности энтальпии. Однако соответствующая тенденция представляет интерес. Любопытной является и формула (3.13), из которой вытекает, что при всех разумных n скорость истечения остается порядка альфвеновской скорости на входе.

Нетрудно получить формулу для секундного расхода массы, т.е. величину ψ_1 , выраженную через ρ_0 , v_{\max} и критическое сечение f^* . Разумеется, эта формула будет

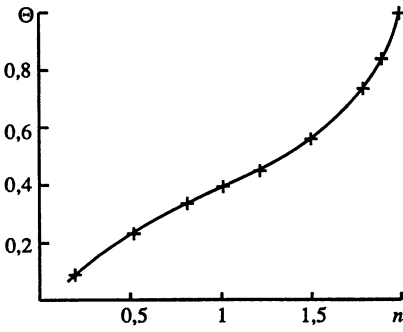


Рис. 3

справедлива лишь при $n \leq 2$. Для определения f^* нужно найти минимум $f(H)$. Простые вычисления показывают, что минимум достигается при условии $(H^*/H_0)^n = (4 - 2n)/(4 - n)$. Тогда

$$\dot{m} = \rho_0 v_M f^* \Theta(n), \quad (3.15a)$$

где

$$\Theta(n) = \left(\frac{4 - 2n}{4 - n} \right)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{n}{4 - n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15b)$$

Зависимость $\Theta(n)$ изображена на рис. 3. Тяга, развиваемая ускорителем, оказывается равной

$$F = \dot{m} v_{\max} = \frac{H_0^2}{2\pi l} f^* \Theta(n). \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь вопрос о критической скорости. Для этого исследуем условия обращения воздействия на примере холодной плазмы. Из уравнения Бернулли при любом ξ следует, что проекции dv и dH на линию течения связаны соотношением

$$v dv + \frac{e}{M} \phi'(\psi - \kappa H)(-\kappa dH) = 0. \quad (3.17)$$

Далее, из уравнения вмороженности

$$dH = -c r \phi''(-\kappa dH) - c \phi' dr, \quad (3.18)$$

а из уравнения непрерывности

$$\frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} + \frac{df}{f} = 0. \quad (3.19)$$

Здесь все дифференциалы взяты вдоль линии тока. Если исключить dr и dH , то мы получим

$$v dv \left(1 - \frac{c_A^2}{v^2 (1 - \kappa c r \phi'')} \right) = \frac{c_A^2}{1 - \kappa c r \phi''} \frac{df}{f}, \quad (3.20)$$

$$c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Замечательной особенностью этого выражения является зависимость критической скорости

$$v^* = \frac{c_A}{\sqrt{1 - \kappa c r \phi''}} \quad (3.21)$$

от второй производной ϕ . Последнее связано с тем, что при учете эффекта Холла уравнение $\text{rot}[\mathbf{v}_e, \mathbf{H}] = 0$ содержит (после подстановки (1.21)) вторую производную от H .

Если учесть тепловую энергию плазмы, то вместо (3.20) мы получим

$$v dv \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) = c_s^2 \frac{df}{f}, \quad (3.22)$$

где

$$c_s^2 = c_T^2 + \frac{c_A^2}{1 - \kappa c r \phi''}, \quad (3.23)$$

причем критическая скорость, очевидно, будет определяться из условия $v^* = c_s$.

В частном случае, когда $\xi \gg 1$ и $\phi = \phi_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^n$, величина $\kappa c r \phi''$ равна $n - 1$ и, следовательно,

$$c_s^2 = c_T^2 + \frac{c_A^2}{1 - n}. \quad (3.24)$$

Отсюда видно, что при $n \geq 2$ критической скорости в рамках сделанных предположений не существует. Это находится в согласии с результатами, полученными выше, при рассмотрении характера течения для разных n .

4. ТЕЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим теперь течение в канале конечной ширины, медленно меняющейся вдоль оси x (рис. 4). Иными словами, мы будем считать все величины ρ , ψ , H зависящими от ϵx , причем членами $\sim \epsilon^2$ будем пренебрегать. В этом случае система уравнений (2.3), (2.6)–(2.11) может быть записана в виде

$$W + \frac{v_x^2}{2} + \frac{e}{M} \phi(\chi) = \frac{e}{M} \Phi(\psi), \quad (4.1a)$$

$$\frac{H}{\rho} = -c \phi'(\chi), \quad (4.1б)$$

$$\rho + \frac{H^2}{8\pi} = P(x), \quad (4.1в)$$

$$\chi = \psi - \frac{Mc}{4\pi e} H; \quad v_x = \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{dy}. \quad (4.1г)$$

Здесь $P(x)$ – некоторая произвольная функция ϵx . Уравнения (4.1б) и (4.1в) являются алгебраическими относительно H и ρ и в принципе могут быть разрешены:

$$H = H(\psi, x), \quad \rho = \rho(\psi, x). \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) и (4.1а), мы сводим определение ψ к квадратуре

$$y = \int \frac{d\psi}{\sqrt{2} \rho(\psi, x) \sqrt{\frac{e}{M} \Phi(\psi) - \frac{e}{M} \phi(\psi - \kappa H) - W(\psi, x)}} + C(x). \quad (4.3)$$

Здесь $C(x)$ – произвольная медленно меняющаяся функция x . Совокупность функций $P(x)$ и $C(x)$ составляет полный набор произвольных функций уравнения (2.11).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если $c \phi'(\chi) = c \Phi'(\psi) = k$, где k – константа, то мы получаем обычное магнито-гидродинамическое решение. Из (4.1б) и (4.1в) в этом случае следует, что $\rho = \rho(x)$

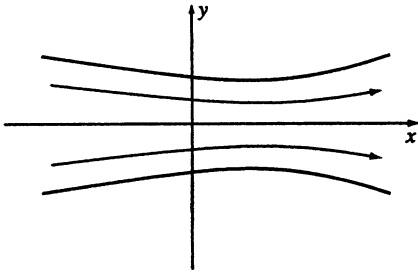


Рис. 4

и $H = H(x)$. Отмечая индексами нуль величины на входе, согласно (4.3) и (4.1а) находим

$$\psi = \sqrt{2\rho(x)} \sqrt{W_0 - W(x) + k(H_0 - H(x))} y, \quad (4.4)$$

$$v = \sqrt{2} \sqrt{W_0 - W(x) + k(H_0 - H(x))},$$

где

$$k = H/\rho = H_0/\rho_0.$$

Это решение описывает течение в обычном сопле, причем $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.

2. Рассмотрим теперь, к чему приводит нелинейное изменение $\phi(\chi)$. Выберем ϕ и Φ в виде

$$\phi = -\frac{k}{c}(\psi - \kappa H) + \mu(\psi - \kappa H)^2, \quad (4.5)$$

$$\Phi = -\frac{k}{c}(\psi - \kappa H_0) + \mu(\psi - \kappa H_0)^2.$$

В случае холодной плазмы такой выбор функций дает скорость на входе, равную нулю. Согласно (4.1а), (4.1б) получаем

$$v_x^2 = \frac{2e\chi}{\mu} (H_0 - H) \left[\frac{k}{c} + \mu\kappa(H_0 - H) - 2\mu\psi \right], \quad (4.6)$$

$$\frac{H}{\rho} = k - 2\mu c(\psi - \kappa H).$$

В случае малой нелинейности мы можем вместо ψ подставить сюда выражение (4.4). Из (4.6) следует, что нелинейность приводит к перераспределению скорости и плотности по сечению сопла. При $\mu > 0$ скорость падает по y от нижнего электрода $\psi = 0$ к верхнему, а плотность растет. При $\mu < 0$ мы имеем обратную картину.

Подставляя (4.5) и (4.3) и разлагая по малому параметру μ , найдем выражение для $\psi(x, y)$:

$$y = \sqrt{\frac{2\pi k}{H_0 - H}} \frac{\psi}{H} \left\{ 1 - \frac{\mu c}{2k} [\psi - \kappa(3H - H_0)] \right\}. \quad (4.7)$$

При $\psi = \text{const}$ уравнение (4.7) определяет профиль сопла. Отсюда следует, что при $\mu > 0$ влияние нелинейности сводится к сужению начальной части сопла (при $H(x) > H_0/3$) и расширению конечной ($H(x) < H_0/3$). Если же $\mu < 0$, то начальная часть сопла расширяется, а конечная сужается.

Рассмотренный пример является частным случаем течения с нелинейной зависимостью $\phi(\chi)$ вида

$$\phi(\chi) = A(e^{-\alpha\chi} - 1). \quad (4.8)$$

При такой зависимости $\phi(\chi)$ все характеристики течения выражаются простыми формулами.

Отношение H/ρ равно

$$H/\rho = c\alpha A e^{-\alpha\chi}. \quad (4.9)$$

Если $A, \alpha > 0$, то отношение H/ρ уменьшается вниз по потоку (т.е. при $H \rightarrow 0$), тогда как при $A, \alpha < 0$ это отношение возрастает с уменьшением H .

В простейшем случае, когда скорость на входе $v \rightarrow 0$ и энтальпией W можно пренебречь, интеграл Бернулли равен

$$\Phi(\psi) = \phi(\psi - \kappa H_0) = A(e^{\alpha(\kappa H_0 - \psi)} - 1), \quad (4.10)$$

и вихрь потока изменяется по закону

$$\frac{Mc \operatorname{rot}_z \mathbf{v}}{e \rho} = -c(\Phi' - \phi') = c \alpha A e^{-\alpha \psi} (e^{\alpha \kappa H_0} - e^{\alpha \kappa H}). \quad (4.11)$$

Зависимость скорости от ψ и H определяется уравнением Бернулли

$$v^2 = \frac{2e}{M}(\Phi - \phi) = \frac{2e}{M} A e^{-\alpha \psi} (e^{\alpha \kappa H_0} - e^{\alpha \kappa H}). \quad (4.12)$$

Отсюда видно, что если $A, \alpha > 0$, то скорость убывает по направлению к катоду (большие ψ), а при $A, \alpha < 0$ она убывает по направлению к аноду.

Выражение для ψ , удовлетворяющее граничному условию $\psi|_{y=0} = 0$, имеет вид

$$e^{-\frac{\alpha}{2}\psi} = 1 - B(H)y, \quad (4.13)$$

где

$$B(H) = \frac{1}{2cA} \sqrt{\frac{2eA}{M} (e^{\alpha \kappa H_0} - e^{\alpha \kappa H}) H e^{-\alpha \kappa H}}.$$

Отсюда видно, что линия $\psi = \text{const}$ определяется уравнением

$$y = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{2}\psi}}{B(H)} \quad (4.14)$$

и уходит в бесконечность при $H \rightarrow 0$ и $H \rightarrow H_0$.

Кажется парадоксальным, на первый взгляд, что при $\psi \rightarrow \infty$ и $\alpha > 0$, как следует из (4.14), y стремится к конечной величине $1/B$. На самом деле это связано с тем, что $H/\rho \rightarrow 0$, и, следовательно, плотность вещества неограниченно возрастает при $y \rightarrow 1/B$.

Если же $A, \alpha < 0$, то с ростом ψ величина y растет экспоненциально, что связано с неограниченным разрежением плазмы ($H/\rho \rightarrow 0$ при $\psi \rightarrow +\infty$).

3. В случае холодной плазмы ($W = 0$) уравнения (4.1) могут быть проинтегрированы до конца при произвольной функции $\phi(\chi)$, если мы положим $\Phi(\psi) = \text{const}$, т.е. будем рассматривать моноэнергетический поток, в котором $Mv^2/2 + e\phi = \text{const}$. Выбирая $y = 0$ в качестве одного из электродов $\psi = 0$, получим

$$v_x = \frac{eH}{Mc} y + \sqrt{\frac{2e}{M} [\Phi - \phi(-\kappa H)]},$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{c}{H} \phi'(\psi - \kappa H), \quad (4.15)$$

$$-\phi(\psi - \kappa H) - \phi(-\kappa H) = \frac{Hy}{2c} \left\{ \frac{eH}{Mc} y + 2 \sqrt{\frac{2e}{M} [\Phi - \phi(-\kappa H)]} \right\}.$$

Здесь $H = H(x)$ и $\phi = \phi(\psi)$ – произвольные функции. При заданных зависимостях $H(x)$ и $\phi(H)$ уравнения (4.7) определяют величины $v(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $\rho(x, y)$. Соответ-

ственно сказанному выше при спадающем $H(x)$ плотность ρ уменьшается вдоль оси x , если ϕ изменяется медленнее, чем H^2 , и увеличивается, если ϕ изменяется быстрее, чем H^2 . В отличие от предыдущего пункта, здесь скорость на входе существенно зависит от u .

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 3.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 41. С. 5.
3. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1964. Т. 34. С. 429.

ОБ УСКОРЕНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ*

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В настоящей работе мы рассмотрим течения плазмы в аксиально-симметричных системах при наличии продольного магнитного поля. В предположении об идеальной проводимости плазмы и отсутствии диссипативных процессов уравнения магнитной гидродинамики для аксиально-симметричных стационарных течений могут быть преобразованы к следующей системе уравнений [1]:

$$\frac{s}{\rho} \Delta^* \xi + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 - \frac{\psi_0'^2}{r^2 \rho^3} (\nabla \rho \nabla \xi) + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{A^2}{s} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{B^2}{s} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{AB\psi_0'}{\rho s \psi'} + TS' - U' = 0, \quad (1.1)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{r^2 B^2}{s} + \frac{AB\psi_0'}{\rho s \psi'} = U, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} \rho v_r \\ H_r \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z}, & r \begin{pmatrix} \rho v_z \\ H_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \\ r \begin{pmatrix} \rho v_\varphi \\ H_\varphi \end{pmatrix} &= \frac{A}{s} \begin{pmatrix} \psi_0' \\ \psi' \end{pmatrix} + \frac{r^2 B}{s} \begin{pmatrix} \rho \psi' \\ \psi_0' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь неизвестными являются функции тока ξ и плотность ρ . Уравнения (1.1) и (1.2) должны решаться совместно, при учете уравнения состояния, а уравнения (1.3) служат для определения скорости v и магнитного поля $\mathbf{B} = \sqrt{4\pi} \mathbf{H}$ через ξ и ρ . T – температура, $S = S(\xi)$ – энтропия, $W = W(\rho, S)$ – энтальпия, а ψ_0, ψ, A, B и U – произвольные функции, зависящие только от ξ . Штрих означает полную производную по ξ , а частная производная по ξ берется при фиксированном ρ . Через s и Δ^* обозначены:

$$s = \frac{1}{\rho} \psi_0'^2 - \psi'^2, \quad \Delta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В [1] показано, что система (1.1), (1.2) может быть в ряде случаев проинтегрирована в приближении медленности изменения параметров вдоль оси z . В работе

* Совместно с А.И. Морозовым // Журн. техн. физики. 1964. Т. 34. С. 1154–1169.

[2] рассмотрен случай ускорения азимутальным полем невращающейся плазмы ($\psi' = 0$, $A = 0$). Очевидно, в присутствии продольного поля плазма, вообще говоря, будет вращаться, поэтому здесь рассматривается общая задача о течении вращающейся жидкости в магнитном поле, имеющем как азимутальную B_ϕ , так и продольные B_r и B_z компоненты.

Сделаем несколько замечаний, касающихся интегралов ψ_0 , ψ , A , B и U .

1. Величины ψ_0 и ψ пропорциональны потокам жидкости и магнитного поля между поверхностями $\xi = \text{const}$.

2. Величина $\frac{AB\psi'_0}{\rho s\psi'}$ в уравнениях (1.1) и (1.2) может быть заменена на величину

$\frac{AB\psi'}{\rho s\psi'_0}$, так как разница между ними $\frac{AB}{\psi'_0\psi'}$ является функцией ξ и может быть вклю-

чена в величину U , которая заменяется при этом на $U_1 = U - \frac{AB}{\psi'_0\psi'}$.

3. Используя (1.3) и, в частности, соотношения

$$\frac{d\psi_0}{d\psi} = \rho \frac{v_z}{H_z} = \rho \frac{v_r}{H_r}, \quad (1.4)$$

которые вытекают из (1.3), мы можем записать интеграл Бернулли (1.2) соответственно п. 2 в следующих двух формах ($q = r, z$):

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{[\mathbf{v}[\mathbf{vH}]]_q}{H_q} = U(\xi), \quad (1.5)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{[\mathbf{H}[\mathbf{vH}]]_q}{\rho v_q} = U_1(\xi). \quad (1.6)$$

Так как $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$, то второе из этих выражений для случая, когда $[\mathbf{EB}] \parallel \mathbf{v}$, переходит в известный [3–5] интеграл $W + \frac{v^2}{2} + \frac{c}{4\pi\rho} \frac{[\mathbf{EB}]\mathbf{v}}{v^2} = \text{const}$, где const зависит от линии тока.

Из первого выражения (1.5) можно найти максимальную скорость v_M при $\rho \rightarrow 0$:

$$-\frac{v_M^2}{2} + \frac{v_{zM}}{H_z}(\mathbf{v}_M\mathbf{H}) = U. \quad (1.7)$$

Если в сечении, где $v = v_M$, $H = H_z$ и $v = v_z$, то $v_M^2 = 2U$.

4. Выбирая $\xi = \psi_0$, получим следующие выражения для интегралов A и B :

$$A = r \left(v_\phi - \frac{H_\phi H_q}{\rho v_q} \right), \quad B = \frac{1}{\rho r} \left(H_\phi - \frac{v_\phi H_q}{v_q} \right) \quad (q = r, z). \quad (1.8)$$

Эти выражения также могут быть записаны в других эквивалентных формах, если использовать соотношения (1.4).

Выходные параметры ускорителя, так же как и в случае ускорения азимутальным магнитным полем [2], просто выражаются через интегралы ψ_0 , U , B . Расход массы \dot{m} равен

$$\dot{m} = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z 2\pi r dr = 2\pi [\psi_0(\xi_2) - \psi_0(\xi_1)]. \quad (1.9)$$

Для вычисления энергетического потока N и тяги F заметим, что на выходе, где $\rho \rightarrow 0$, из уравнения Бернулли (1.2) следует

$$\frac{v^2}{2} \rightarrow U - \frac{AB}{\Psi'_0 \Psi'} \equiv U_1(\xi).$$

Отсюда, интегрируя по выходному сечению, получаем

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{v^2}{2} v_z 2\pi r dr = 2\pi \int_{\Psi_0(\xi_1)}^{\Psi_0(\xi_2)} U_1 d\Psi_0, \quad (1.10)$$

$$F = \int_{r_1}^{r_2} \rho v_z^2 2\pi r dr = 2\pi \int_{\Psi_0(\xi_1)}^{\Psi_0(\xi_2)} v_z d\Psi_0. \quad (1.11)$$

При $v_z = v$ последнее равенство переписывается в виде

$$F = 2\pi \int_{\Psi_0(\xi_1)}^{\Psi_0(\xi_2)} \sqrt{2U_1} d\Psi_0. \quad (1.12)$$

Напряжение между электродами равно

$$V = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \int_{r_1}^{r_2} (v_z H_\varphi - v_\varphi H_z) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{c} \int_{\xi_1}^{\xi_2} B(\xi) d\xi. \quad (1.13)$$

Далее, поскольку для аксиально-симметричного магнитного поля

$$r j_z = \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi, \quad r j_r = -\frac{c}{\sqrt{4\pi}} \frac{\partial}{\partial z} r H_\varphi, \quad (1.14)$$

то ток, протекающий через систему, выражается интегралом от j_z по входному сечению $z = 0$ и равен

$$I = \int_0^{r_2} j_z 2\pi r dr = \frac{\sqrt{4\pi} c}{2} r_2 H_\varphi(r_2, 0). \quad (1.15)$$

В заключение рассмотрим вопрос о скорости в сечении, где $v = v_z$. Беря частную производную по z от (1.2) и от $r v_\varphi$ в (1.3) и исключая v_φ , с учетом соотношений $\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$,

$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{c_T^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$ (c_T – скорость звука) и уравнений (1.3) найдем

$$\left[c \frac{2}{T} + \frac{H_\varphi^2}{\rho \left(1 - \frac{H_z^2}{\rho v_z^2} \right)} \right] \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) справедливо на произвольной поверхности вращения, где $v_r = 0$. Если же эта поверхность является плоскостью $z = \text{const}$, то на ней согласно (1.3) выполняется еще равенство

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (1.17)$$

При отличных от нуля производных $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ из (1.16) и (1.17) следует, что v_z в этой

плоскости определяется уравнением

$$v_z^4 - \left(c_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right) v_z^2 + c_T^2 \frac{H_z^2}{\rho} = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, если существует нормальное к оси z сечение, где $v = v_z$, то критическая скорость $v_z = c_s$, являющаяся решением (1.18),

$$c_s^2 = \frac{1}{2} \left(c_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(c_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right)^2 - \frac{c_T^2 H_z^2}{\rho}} \quad (1.19)$$

достигается в этом сечении. Величины c_s^+ и c_s^- являются скоростями распространения "быстрой" и "медленной" магнитозвуковых волн вдоль оси z в однородном магнитном поле [4].

2. ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ В УЗКИХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ

Если расстояние f между электродами мало по сравнению с характерными размерами, то ускорение в такой системе может быть описано системой алгебраических уравнений. Обозначая через $v_{||}$ и $H_{||}$ составляющие скорости магнитного поля в меридиональном сечении, а через

$$c_{||} = \frac{H_{||}}{\sqrt{\rho}}, \quad c_{\varphi} = \frac{H_{\varphi}}{\sqrt{\rho}}, \quad (c_A^2 = c_{||}^2 + c_{\varphi}^2)$$

альфвеновские скорости, соответствующие полям $H_{||}$ и H_{φ} , мы получим из (1.2) и (1.3)

$$\rho r v_{||} f = \alpha = \text{const}, \quad (2.1a)$$

$$\sqrt{\rho} r c_{||} f = \beta = \text{const}, \quad (2.1b)$$

$$r(\alpha v_{\varphi} - \beta \sqrt{\rho} c_{\varphi}) = a = \text{const}, \quad (2.1v)$$

$$\frac{1}{r} \left(\alpha \frac{c_{\varphi}}{\sqrt{\rho}} - \beta v_{\varphi} \right) = b = \text{const}, \quad (2.1r)$$

$$W + \frac{v^2}{2} + \frac{b}{a} \sqrt{\rho} r c_{\varphi} = U_1 = \text{const}. \quad (2.1d)$$

Здесь $v^2 = v_{||}^2 + v_{\varphi}^2$; первые два уравнения выражают сохранение продольных потоков плазмы и магнитного поля, а остальные уравнения вытекают из сохранения момента вращательности магнитного поля и сохранения энергии.

При выводе (2.1) функции $A(\xi)$, $B(\xi)$ и $U(\xi)$ считаются в первом приближении по f постоянными и равными их значениям на некоторой средней поверхности вращения $r = r(z)$ (рис. 1). Все величины, входящие в (2.2)–(2.6), берутся при $r = r(z)$ и являются функциями только от z . Поскольку система (2.1) содержит пять уравнений с семью неизвестными: f , r , ρ , $v_{||}$, v_{φ} , $c_{||}$, c_{φ} , — то два из них (например, r и f) могут быть заданы произвольно.

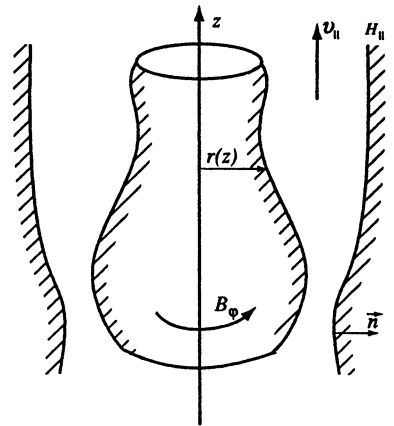


Рис. 1

Дифференцируя (2.1) и исключая dr , мы получим уравнение типа Гюгонио:

$$\left(v_{\parallel}^2 - c_T^2 - \frac{c_{\Phi}^2}{1 - c_{\parallel}^2/v_{\parallel}^2} \right) \frac{dv_{\parallel}}{v_{\parallel}} = \left(c_T^2 + \frac{c_{\Phi}^2}{1 - c_{\parallel}^2/v_{\parallel}^2} \right) \frac{d(rf)}{rf} + \left(v_{\Phi}^2 - \frac{2c_{\Phi}}{v_{\parallel}} \frac{[c_A v]_n}{1 - c_{\parallel}^2/v_{\parallel}^2} \right) \frac{dr}{r}. \quad (2.2)$$

Здесь левая часть равенства обращается в нуль при $v_{\parallel} = c_{st}$. Следовательно, в канале постоянного среднего радиуса $r = \text{const}$ критическая скорость достигается в минимуме площади сечения $2\pi r f$, а в канале постоянного сечения в минимуме $r(z)$. Если же r и f постоянны, то $dv_{\parallel} = 0$ и плазма не ускоряется.

Если потребовать, чтобы плазма не вращалась, то при $\beta \neq 0$ система (2.1) дает $\rho \sim r^{-2}$, $c_{\Phi} = \text{const}$, $v_{\parallel} \sim \frac{r}{f}$, $H_{\parallel} \sim \frac{1}{rf}$, $W + \frac{v_{\parallel}^2}{2} = \text{const}$. Из последнего уравнения следует, что в рассматриваемом случае ускорение может происходить только за счет тепловой энергии.

В случае, когда нет продольного поля ($\beta = 0$), азимутальная скорость $v_{\Phi} \sim r^{-1}$, и при возрастании радиуса зазора r энергия вращательного движения переходит в продольную энергию. Для того чтобы изложение было более прозрачным, мы рассмотрим сначала один частный случай.

2.1. Течения с бесконечно малой начальной скоростью при $r = \text{const}$

Если на входе $v_{\Phi} = 0$, $v_{\parallel} \rightarrow 0$ и во всем канале $r = \text{const}$ и $S = \text{const}$, то система (2.1) может быть написана в виде

$$\rho v_{\parallel} f = \alpha_1, \quad \sqrt{\rho} c_{\parallel} f = \beta_1, \quad (2.3a)$$

$$\alpha_1 v_{\Phi} - \beta_1 \sqrt{\rho} c_{\Phi} = -\beta_1 \sqrt{\rho_0} c_{\Phi 0}, \quad \alpha_1 \frac{c_{\Phi}}{\sqrt{\rho}} - \beta_1 v_{\Phi} = \alpha_1 \frac{c_{\Phi 0}}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (2.36)$$

$$W(\rho) + \frac{v_{\Phi}^2 + v_{\parallel}^2}{2} + c_{\Phi 0} c_{\Phi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = U_1. \quad (2.3b)$$

Здесь через ρ_0 и $c_{\Phi 0}$ обозначены значения соответствующих величин на входе в систему.

В дальнейшем мы будем считать, что $\beta_1 > 0$, т.е. $H_{\parallel} > 0$. В противном случае изменится только направление v_{Φ} , а все остальные рассуждения останутся в силе. При сделанном предположении

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \sqrt{\rho} \frac{v_{\parallel}}{c_{\parallel}} > 0. \quad (2.4)$$

По своей размерности α_1^2 / β_1^2 – плотность, которую в дальнейшем мы будем называть критической ρ_k . Как видно из (2.4), плотность плазмы равна ρ_k в том случае, когда местная продольная скорость плазмы равна местной альфвеновской скорости, соответствующей полю H_{\parallel} .

Решая систему (2.3б) относительно c_φ и u_φ , получим

$$c_\varphi = c_{\varphi 0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{1 - \rho_0 / \rho_k}{1 - \rho / \rho_k}}, \quad (2.5)$$

$$u_\varphi = -c_{\varphi 0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_k} \frac{1 - \rho / \rho_0}{1 - \rho / \rho_k}}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.5) вытекает зависимость φ -й компоненты поля от ρ :

$$B_\varphi = B_{\varphi 0} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1 - \rho_0 / \rho_k}{1 - \rho / \rho_k}. \quad (2.5a)$$

Подставляя выражения (2.5), (2.6) в интеграл Бернулли (2.3в), получим зависимость $u_{||}$ от ρ :

$$u_{||}^2 = 2\{W(\rho_0) - W(\rho)\} + c_{\varphi 0}^2 R, \quad (2.7)$$

где

$$R = \frac{1}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \zeta} \right)^2 \right], \quad \kappa \equiv \frac{\rho_0}{\rho_k}, \quad \zeta \equiv \frac{\rho}{\rho_k}. \quad (2.8)$$

Полученная система уравнений (2.5)–(2.7) показывает прежде всего, что по крайней мере непрерывное течение может существовать лишь при условии, что ρ не переходит через ρ_k , или, иными словами, $u_{||}$ остается все время либо больше $c_{||}$, либо меньше $c_{||}$, либо все время $u_{||}$ равно $c_{||}$.

В первом случае ($u_{||} > c_{||}$) мы будем называть течение докритическим, во втором ($u_{||} < c_{||}$) – закритическим, а в третьем – критическим.

А. Рассмотрим сначала самый простой случай критического течения. В этом случае $u_{||} = c_{||}$ и, следовательно, как показывает (2.4), $\rho = \text{const}$. Поскольку в силу (2.4) $\alpha_1 = \sqrt{\rho} \beta_1$, то система (2.3б) сводится к одному уравнению

$$u_\varphi - c_\varphi = -c_{\varphi 0}. \quad (2.9)$$

Уравнение Бернулли для данного случая имеет вид

$$u_{||}^2 + u_\varphi^2 + 2c_{\varphi 0}c_\varphi = 2c_{\varphi 0}^2, \quad (2.10)$$

и, следовательно,

$$u_{||}^2 = 2c_{\varphi 0}^2 - 2c_{\varphi 0}c_\varphi - (c_{\varphi 0} - c_\varphi)^2 = c_{\varphi 0}^2 - c_\varphi^2. \quad (2.11)$$

Используя первое из уравнений (2.3а), получим профиль канала

$$f = f_1 \frac{c_{\varphi 0}}{\sqrt{c_{\varphi 0}^2 - c_\varphi^2}}. \quad (2.12)$$

Здесь через f_1 обозначено сечение канала на выходе системы, где $c_\varphi = 0$.

Б. Перейдем теперь к рассмотрению докритического течения. Прежде всего мы видим, что при $r = \text{const}$ уравнение Гюгонно (2.2) может быть записано в виде

$$\left(u_{||}^2 - c_T^2 - \frac{c_\varphi^2}{1 - c_{||}^2 / u_{||}^2} \right) \frac{du_{||}}{u_{||}} = \left(c_T^2 + \frac{c_\varphi^2}{1 - c_{||}^2 / u_{||}^2} \right) \frac{df}{f}. \quad (2.13)$$

Если течение докритическое, т.е. $u_{||}^2 > c_{||}^2$, то коэффициент при df не обращается в

нуль, а коэффициент при dv_{\parallel} равен нулю только в точке, где $u = c_s^+$. Действительно,

$$v_{\parallel}^2 - c_T^2 - \frac{c_{\Phi}^2}{1 - c_{\parallel}^2 / v_{\parallel}^2} = \frac{v_{\parallel}^4 - v_{\parallel}^2(c_T^2 + c_A^2) + c_T^2 c_{\parallel}^2}{v_{\parallel}^2 - c_{\parallel}^2} = \frac{(v_{\parallel}^2 - c_{s+}^2)(v_{\parallel}^2 - c_{s-}^2)}{v_{\parallel}^2 - c_{\parallel}^2} < 0,$$

легко убедиться, что всегда $c_{s-}^2 < c_{\parallel}^2$, и при $df < 0$

$$c_{s-}^2 < v_{\parallel}^2 < c_{s+}^2. \quad (2.13a)$$

Следовательно, канал при докритическом течении имеет только одну перетяжку, т.е. является обычным соплом.

Выражение (2.5a) показывает, что при $\rho_k \rightarrow \infty$, т.е. $H_{\parallel} \rightarrow 0$, мы получаем обычное условие вмороженности

$$\frac{B_{\Phi}}{\rho} = \frac{B_{\Phi 0}}{\rho_0}. \quad (2.14)$$

На рис. 2 изображена зависимость (2.5a) для разных ρ_k (кривая 1 – $\kappa = 0$; 2 – $\kappa = 0,3$; 3 – $\kappa = 0,6$; 4 – $\kappa = 0,9$). Из этого рисунка видно, что при уменьшении ρ_k усиливается падение B_{Φ} при $\rho \rightarrow \rho_0$ и ослабляется при $\rho \rightarrow 0$. При $\rho_0 = \rho_k \rightarrow 0$ все изменение происходит при постоянной плотности.

Рассмотрим теперь изменение продольной скорости ускоряемой плазмы, т.е. уравнение (2.7). Поскольку, как мы убедились выше, при докритическом течении существует только один переход через скорость сигнала c_{s+} , мы не потеряем качественных особенностей течения, если будем для простоты считать плазму холодной. В этом случае (см. (2.7))

$$v_{\parallel}^2 = c_{\Phi 0}^2 R = c_{\Phi 0}^2 \frac{1}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \zeta} \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

Функция R является монотонно возрастающей функцией $\zeta = \frac{\rho}{\rho_k}$. Ее частные значения равны ($0 \leq \zeta < \kappa$)

$$R = \begin{cases} 0, & \zeta = \kappa, \\ 2 - \kappa, & \zeta = 0, \\ 1, \kappa = 1, & \zeta \neq 1, \\ 2(1 - \rho / \rho_0), & \kappa \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Отсюда видно, что максимальная скорость достигается при $\rho = 0$ и равна

$$(v_{\parallel})_{\max} = c_{\Phi 0} \sqrt{2 - \kappa}. \quad (2.17)$$

Уменьшение скорости на выходе при $\kappa \rightarrow 1$ связано с тем, что часть подводимой к каналу энергии идет на сообщение потоку азимутального вращения (2.6). Азимутальная скорость монотонно возрастает вдоль канала, и на выходе при $\rho = 0$ она равна

$$(v_{\Phi})_{\max} = -c_{\Phi 0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_k}} = -c_{\Phi 0} \sqrt{\kappa}. \quad (2.18)$$

График зависимости $v_{\Phi} / (v_{\Phi})_{\max}$ от ρ / ρ_0 в докритическом режиме приведен на рис. 3 (кривые 1–4 соответствуют кривым 1–4 на рис. 2).

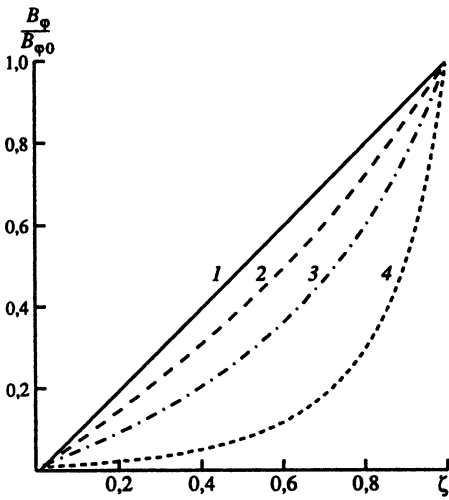


Рис. 2

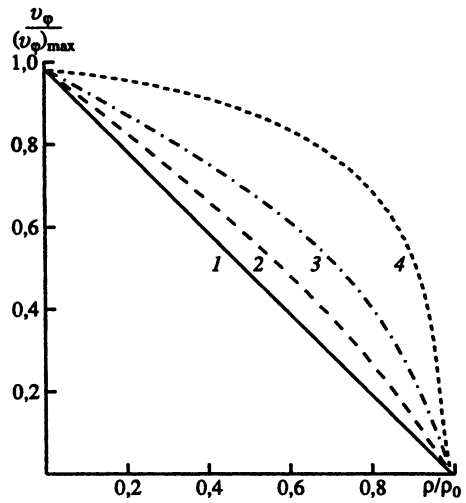


Рис. 3

Зная $u_{\parallel} = u_{\parallel}(\rho)$, можно построить зависимость $f(\rho)$. Очевидно (см. (2.3a)),

$$f = \frac{\alpha_{\parallel}}{\rho v_{\parallel}} = \frac{\alpha_{\parallel}}{\rho c_{\phi 0} \sqrt{R}}. \quad (2.19)$$

Минимум f имеет место при

$$\zeta = \zeta^* = 1 - (1 - \kappa)^{2/3}. \quad (2.20)$$

Скорость v_{\parallel}^* в этом критическом сечении равна

$$v_{\parallel}^2 = c_{\phi 0}^2 R^* = c_{\phi 0}^2 \frac{1}{\kappa} \left[1 - (1 - \kappa)^{2/3} \right]. \quad (2.21)$$

Используя (2.20), (2.21) и (2.19), мы можем получить удобную формулу для секундного расхода массы

$$\dot{m} = 2\pi r f \alpha_{\parallel} \quad (2.22)$$

в виде

$$\dot{m} = 2\pi r f^* \rho_0 c_{\phi 0} \left[\frac{1 - (1 - \kappa)^{2/3}}{\kappa} \right]^{3/2}. \quad (2.23)$$

Если $\kappa \rightarrow 0$, то формулы (2.20), (2.21) и (2.23) переходят в обычные выражения [2].

В заключение отметим формулу для тангенса угла θ между скоростью и осью системы:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{\phi}}{v_{\parallel}} = -\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\kappa}}} \frac{1 - \zeta / \kappa}{(1 - \zeta) \sqrt{R}}. \quad (2.24)$$

На выходе этот тангенс равен

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = -\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\kappa}}} \frac{1}{\sqrt{2 - \kappa}} = -\sqrt{\frac{\kappa}{2 - \kappa}}. \quad (2.25)$$

В. Рассмотрим теперь закритический режим, когда $u_{\parallel} < c_{\parallel}$ и, следовательно, $\kappa > 1$.

Рассмотрим сначала течение холодной плазмы. Тогда (см. (2.15))

$$v_{\parallel}^2 = c_{\varphi 0}^2 R = c_{\varphi 0}^2 \frac{1}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \zeta} \right)^2 \right].$$

Как видно из этой формулы, для разгона необходимо $\zeta \rightarrow \infty$. Тогда скорость v_{\parallel} монотонно возрастает и стремится к пределу

$$(v_{\parallel})_{\max} = \frac{c_{\varphi 0}}{\sqrt{\kappa}}. \quad (2.26)$$

Это означает, что чем меньше κ , тем большую скорость v_{\parallel} при данном $c_{\varphi 0}$ мы получим на выходе.

Из уравнений (2.5) и (2.6) можно найти B_{φ} и v_{φ} при $\rho \rightarrow \infty$:

$$B_{\varphi} \rightarrow B_{\varphi 0} \frac{\kappa - 1}{\kappa}, \quad (2.27)$$

$$v_{\varphi} \rightarrow -c_{\varphi 0} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}.$$

В рассматриваемом течении B_{φ} на выходе не стремится к нулю, и поэтому скорости оказываются сравнительно небольшими. В то же время сечение канала f , очевидно, монотонно стремится к нулю из-за возрастания плотности и скорости.

Картина оказывается более сложной, если учесть температуру плазмы. Этот учет в закритическом режиме принципиально необходим, поскольку при разгоне плотность плазмы неограниченно возрастает и роль энтальпии становится существенной. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

В правой части (2.7) мы имеем два члена: $W_0 - W$ и $c_{\varphi 0}^2 R$. При возрастании ρ первый член убывает, а второй возрастает, а при уменьшении ρ – наоборот. Производная от скорости по плотности равна (см. (2.7))

$$\frac{1}{2} \frac{dv_{\parallel}^2}{d\rho} = -\frac{c_T^2}{\rho} - \frac{c_{\varphi}^2}{\rho_0} \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 - \rho/\rho_{\kappa})^3}. \quad (2.28)$$

Отсюда видно, что в закритическом режиме плазма будет ускоряться за счет тепловой или магнитной энергии в зависимости от того, какой из членов в правой части уравнения (2.28) больше. Если

$$c_T^2 > \frac{c_{\varphi}^2}{\kappa - 1}, \quad (2.29a)$$

то ускорение будет происходить за счет тепловой энергии с уменьшением ρ , а если

$$c_T^2 < \frac{c_{\varphi}^2}{\kappa - 1}, \quad (2.29b)$$

то ускорение будет происходить с увеличением ρ , т.е. за счет магнитной энергии. Очевидно, плотность не может ни перейти ρ_{κ} , ни уйти в бесконечность. В обоих этих случаях в некоторый момент происходит прекращение изменения скорости (рис. 4). Это происходит тогда, когда правая часть уравнения (2.28) или уравнение (2.13) обращается в нуль.

При закритическом течении ($v_{\parallel}^2 < c_{\parallel}^2$) в силу условия (2.13a) канал может иметь только одну перетяжку, соответствующую замедленной звуковой волне.

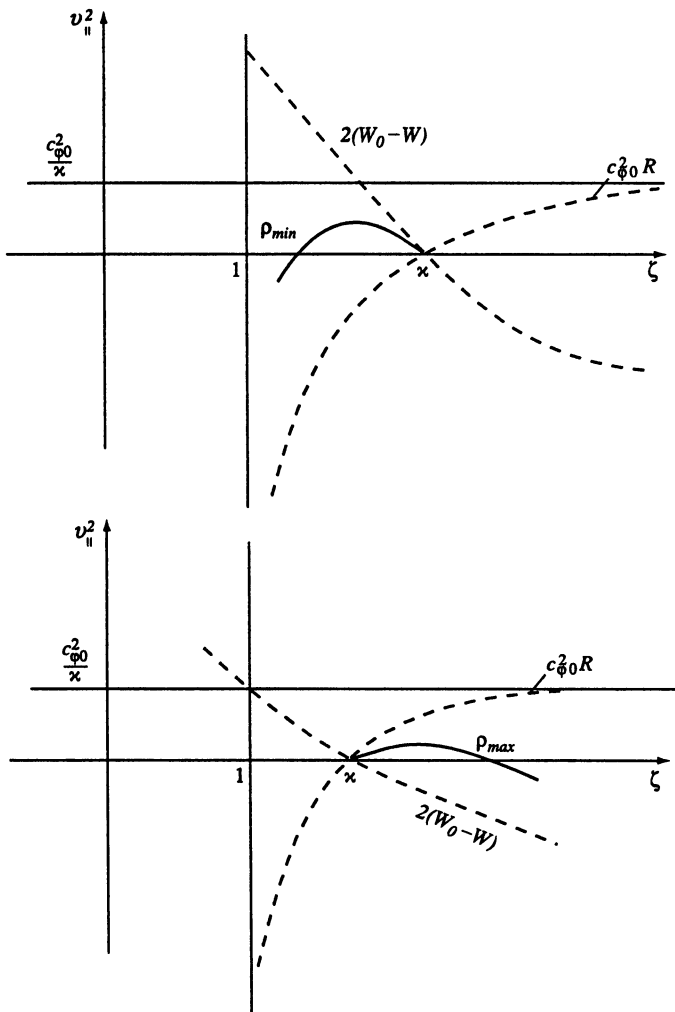


Рис. 4

Переход через скорость сигнала происходит при плотности ρ^* , удовлетворяющей условию $v_{||}^2 = c_{s-}^2$, или

$$W_0 - W + c_{\phi 0}^2 R = \frac{c_T^2 + c_A^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_T^2 + c_A^2}{2}\right)^2 - c_{||}^2 c_T^2}. \quad (2.30a)$$

Если $c_{T0}^2 \rightarrow 0$, то написанное уравнение принимает вид

$$c_{\phi 0}^2 R = \left(\frac{c_{||}^2 c_T^2}{c_{||}^2 + c_{\phi}^2} \right)_0,$$

откуда

$$\rho^* = \rho_0 \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left[\frac{c_{||}^2 c_T^2}{c_{\phi}^2 (c_{||}^2 + c_{\phi}^2)} \right]_0 \right\}. \quad (2.30б)$$

2.2. Течение с бесконечно малой начальной скоростью при $r \neq \text{const}$

Если на входе $u_\varphi = 0$, $u_{||} \rightarrow 0$, но $r \neq \text{const}$, то вместо уравнений (2.3а), (2.5)–(2.7) мы с помощью (2.1) получим

$$\rho u_{||} r f = \alpha, \quad \sqrt{\rho} c_{||} r f = \beta, \quad (2.31a)$$

$$c_\varphi = c_{\varphi 0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_\vartheta} \frac{1 - \rho_\vartheta / \rho_\kappa}{1 - \rho / \rho_\kappa}} = c_{\varphi 0} \sqrt{\frac{\zeta}{\kappa} \frac{1 - \kappa}{1 - \zeta}}, \quad (2.31б)$$

$$u_\varphi = -c_{\varphi 0} \sqrt{\frac{\rho_\vartheta}{\rho_\kappa} \frac{1 - \rho / \rho_\vartheta}{1 - \rho / \rho_\kappa}} = -c_{\varphi 0} \sqrt{\kappa} \frac{1 - \zeta / \kappa}{1 - \zeta}, \quad (2.31в)$$

$$u_{||}^2 = 2[W(\rho_0) - W(\rho)] + c_{\varphi 0}^2 R(\zeta, \kappa). \quad (2.31г)$$

Здесь

$$R = \frac{1}{\kappa} \left[1 - \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \zeta} \right)^2 \right], \quad \rho_\kappa = \rho \frac{u_{||}^2}{c_{||}^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad (2.31д)$$

$$\rho_\vartheta = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad \kappa = \frac{\rho_\vartheta}{\rho_\kappa}.$$

Таким образом, отличие формул для c_φ , u_φ и $u_{||}$ от соответствующих формул предыдущего случая состоит в том, что вместо начальной плотности ρ_0 в них входит эффективная начальная плотность ρ_ϑ .

Благодаря этому остается в силе деление течений на докритические, критические и закритические, а также остается в силе вывод о существовании только одного перехода через скорость сигнала в докритическом и закритическом режимах. Однако теперь переменным параметром является не только ζ , но и κ , что позволяет получить течения с новыми свойствами.

На рис. 5 показаны области положительных и отрицательных значений $R(\zeta, \kappa)$, а также некоторые линии уровня $R = \text{const}$.

А. Если течение докритическое, то изображающая точка течения, выходя из биссектрисы $\kappa - \zeta = 0$, может произвольно двигаться в области I. При движении этой точки к оси ординат скорость течения возрастает, и наибольшую скорость, равную

$$(u_{||}^2)_{\text{max}} = 2W_0 + 2c_{\varphi 0}^2,$$

течение приобретает в том случае, когда изображающая точка приходит в начало координат, прижимаясь к оси κ .

Б. Если течение критическое, то при переменном r плотность ρ_κ должна быть постоянна. Однако система уравнений (2.1в) и (2.1г) теперь оказывается совместной лишь при $r = r_0 = \text{const}$, а это соответствует рассмотренному ранее течению.

В. Рассмотрим в заключение особенности закритического течения при переменном r , предполагая, что роль тепловых процессов относительно невелика. В этом случае допустимой областью положений изображающей точки является область II на рис. 5.

Выходя из точек биссектрисы $\kappa - \zeta = 0$, при $\kappa > 1$ изображающая точка должна двигаться по направлению к оси ζ , если мы хотим, чтобы при этом возрастала скорость, а плотность существенно не изменялась. При переходе через линию $\kappa = 1$

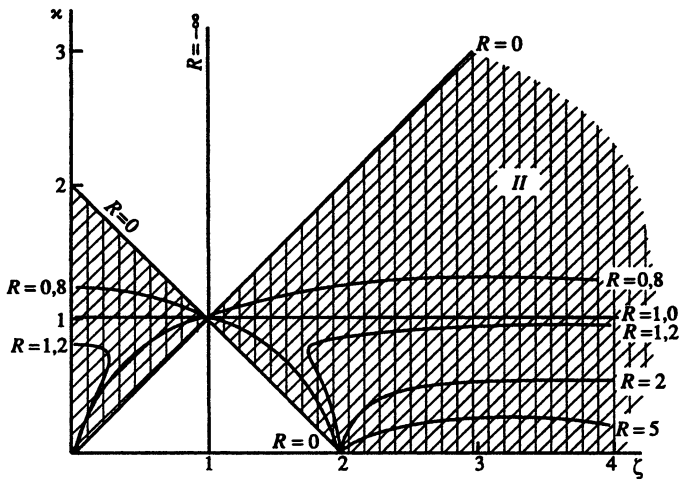


Рис. 5

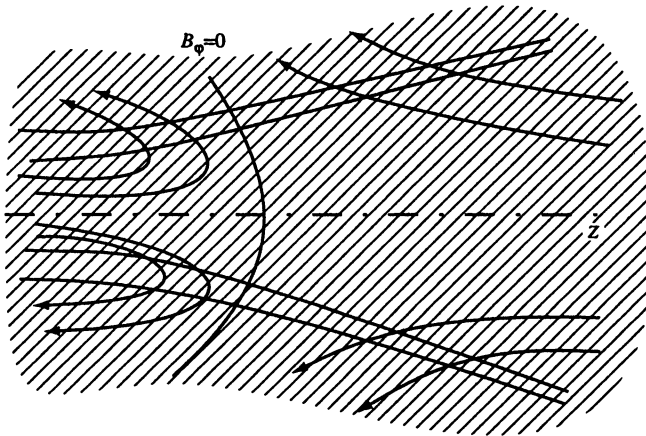


Рис. 6

компонента поля B_φ обращается в нуль, а компоненты скорости равны друг другу: $u_{||} = v_\varphi = c_{\varphi 0}$.

Если мы будем двигаться в сторону еще меньших значений x , то при этом $B_\varphi \rightarrow -\infty$, а компоненты скорости v_φ и $c_{||}$ неограниченно возрастают. Это противоположно тому, что мы имели в докритическом случае.

Физически возрастание $u_{||}$ при отрицательном значении B_φ связано с тем, что уменьшение x происходит в результате увеличения r , и продольное ускорение плазмы за счет центробежной силы оказывается больше, чем торможение за счет компоненты B_φ . Схематически характер токов в рассматриваемом случае показан на рис. 6.

2.3. Общий случай

В общем случае, считая заданными r и f_1 , можно выразить все величины через ρ :

$$c_\varphi = \frac{\sqrt{\rho}}{r} \frac{\beta a + \alpha b r^2}{\alpha^2 - \beta^2 \rho}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\alpha a + \beta b r^2 \rho}{\alpha^2 - \beta^2 \rho}, \quad (2.32)$$

$$c_{\parallel} = \frac{\beta}{\sqrt{\rho} f}, \quad v_{\parallel} = \frac{\alpha}{\rho f}. \quad (2.33)$$

Плотность ρ определяется при этом из уравнения

$$W(\rho) + \frac{\alpha^2}{2\rho^2 f^2 r^2} + \frac{\frac{\alpha^2 a^2}{r^2} + \frac{\rho b}{\alpha} (2\alpha^2 - \beta^2 \rho)(2\beta a + \alpha b r^2)}{2(\alpha^2 - \beta^2 \rho)^2} = U_1. \quad (2.34)$$

Для течений холодной плазмы ($W = 0$) уравнение (2.34) является уравнением четвертой степени относительно ρ . Если задать скорость $v_{\parallel}(z)$ и радиус $r(z)$, то для $y \equiv r f$ получим (при $W = 0$) квадратное уравнение

$$\left[\alpha^2 (v_{\parallel}^2 - 2U_1) + \frac{a^2}{r^2} \right] y^2 + \left[\frac{b}{v_{\parallel}} \left(\frac{2\beta a}{\alpha} + b r^2 \right) - \frac{\beta^2}{v_{\parallel}} (v_{\parallel}^2 - 2U_1) \right] \left(2\alpha y - \frac{\beta^2}{v_{\parallel}} \right) = 0. \quad (2.35)$$

В случае $a = 0$, например, решение (2.35) имеет вид

$$y_{\pm} = \frac{1}{\alpha v_{\parallel}} \left[\beta^2 + \frac{b^2 r^2}{2U_1 - v_{\parallel}^2} \pm \sqrt{2U_1 - v_{\parallel}^2} \left(\beta^2 + \frac{b^2 r^2}{2U_1 - v_{\parallel}^2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

При малых β^2 величины y_+ и y_- соответственно равны

$$y_+ \approx \frac{2b^2 r^2}{\alpha v_{\parallel} (2U_1 - v_{\parallel}^2)}, \quad y_- \approx \frac{\beta^2}{2\alpha v_{\parallel}}. \quad (2.37)$$

Далее, ограничиваясь случаем холодной плазмы ($W = 0$) и полагая $a = 0$, рассчитаем основные характеристики ускоряющей системы. Случай $a = 0$ соответствует равенству нулю v_{ϕ} на выходе, где $\rho \rightarrow 0$. При $W = 0$ скорость в критическом сечении $v_{\parallel}^{*2} = c_{\phi}^{*2} + c_{\parallel}^{*2}$. Предположим для простоты, что отношение продольного магнитного

потока к потоку жидкости $\mu \equiv \frac{\beta \sqrt{\rho}}{\alpha}$ мало, и будем пренебрегать величинами более высокого порядка малости, чем μ^2 . Тогда из системы (2.1) соответственно получим

$$v_M = \sqrt{2} c_{\phi 0} \left(1 - \frac{\beta^2 \rho_0}{4\alpha^2} \right),$$

$$\dot{m} = 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \rho_0 r_0^2 c_{\phi 0} \frac{f^*}{r^*} \left[1 + \frac{\beta^2 \rho_0}{\alpha^2} \left(\frac{5}{4} - \frac{r_0^2}{r^{*2}} \right) \right], \quad (2.38)$$

$$F = \dot{m} v_M, \quad N = \dot{m} v_M^2 / 2, \quad (2.39)$$

$$V = \frac{2\dot{m} c_{\phi 0}}{\sqrt{4\pi c r_0 \sqrt{\rho_0}}} \left(1 - \frac{\beta^2 \rho_0}{\alpha^2} \right), \quad J = \frac{c}{2} r_0 c_{\phi 0} \sqrt{4\pi \rho_0}. \quad (2.40)$$

Здесь индексом 0 обозначены величины в начальном сечении системы, а индексом * – в критическом сечении. Величина $\beta^2 \rho_0 / \alpha^2$ может быть представлена в рассмат-

риваемом случае $a = 0$ в следующих формах:

$$\frac{\beta^2 \rho_0}{\alpha^2} = \frac{v_{\varphi 0}^2}{c_{\varphi 0}^2} = \left(\frac{c_{\parallel}^2}{v_{\parallel}^2} \right)_0.$$

При $\beta \rightarrow 0$ мы приходим к случаю ускорения азимутальным полем, рассмотренному в [2]. Таким образом, добавление продольного магнитного поля в данном случае приводит к вращению плазмы внутри системы, однако скорость этого вращения стремится к нулю на выходе.

3. ТЕЧЕНИЯ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В КАНАЛАХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ СЕЧЕНИЯ

Здесь мы вкратце остановимся на втором типе решений системы (1.1), (1.2), а именно на решениях, обязанных медленности изменения параметров вдоль оси системы. Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial s}{\partial \xi} (\nabla \xi)^2 + \frac{1}{2\rho r^2} \frac{\partial A^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} + \\ + \frac{r^2}{2} \frac{\partial B^2}{\partial \xi} \frac{1}{s} + \frac{\partial AB\psi'_0}{\partial \xi} \frac{1}{\rho s \psi'} + TS' - U' = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае, когда все интегралы ψ'_0 , ψ' , A , B , S и U постоянны, это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что в адиабатическом приближении, отбрасывая члены $\sim \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$ и

$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2$, мы имеем интеграл

$$\frac{s}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = f(z), \quad (3.3)$$

где $f(z)$ – произвольная медленная функция z .

Из уравнения Бернулли (1.2) при $W = 0$ следует, что

$$(\rho s)^2 = \psi_0'^2 \frac{f^2 \psi'^2 + (rB\psi'_0 + A\psi'/r)^2}{2U\psi'^2 + r^2 B^2}. \quad (3.4)$$

Подставляя это в (3.3), найдем ξ :

$$\xi = \frac{f}{\psi'^2} \left[\psi_0' \int_R^r r^2 dr \sqrt{\frac{2U\psi'^2 + r^2 B^2}{f^2 \psi'^2 r^2 + (B\psi_0' r^2 + A\psi')^2}} - \frac{r^2 - R^2}{2} \right]. \quad (3.5)$$

Здесь $r = R(z)$ – линия тока $\xi = 0$. Полученный интеграл выражается через эллиптические функции. Представляет интерес, однако, случай $A = 0$, когда ξ выражается в элементарных функциях. При этом, полагая $\xi = \psi_0$, получаем

$$\xi = \frac{f}{2\Psi'^2} \left[\sqrt{(r^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2} - \sqrt{(R^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2} - r^2 + R^2 + \right. \\ \left. + \gamma_- \ln \frac{r^2 + \gamma_+ + \sqrt{(r^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2}}{R^2 + \gamma_+ + \sqrt{(R^2 + \gamma_+)^2 - \gamma_-^2}} \right], \quad \gamma_{\pm} \equiv \frac{\Psi'^2}{B^2} \left(U \pm \frac{f^2}{2} \right). \quad (3.6)$$

Продольная скорость v_z определяется формулой

$$v_z = f \sqrt{\frac{r^2 B^2 + 2V\Psi'^2}{r^2 B^2 + f^2 \Psi'^2}}. \quad (3.7)$$

Если считать заданной скорость $v_z(z)$ при $r = r(z)$, то функция $f(z)$ определится отсюда в виде

$$f^2 = \frac{v_z^2}{1 + (2U - v_z^2) \frac{\Psi'^2}{r^2 B^2}}. \quad (3.8)$$

Через f и v_z можно выразить все остальные характеристики течения. Они оказываются равными

$$\rho = \frac{1}{\Psi'^2} \left(1 - \frac{f}{v_z} \right), \quad H_z = \frac{f}{\Psi'} \left(\frac{v_z}{f} - 1 \right), \quad (3.9)$$

$$v_{\varphi} = \frac{rB}{\Psi'} \left(\frac{v_z}{f} - 1 \right), \quad H_{\varphi} = \frac{rB}{\Psi'^2} \left(\frac{v_z}{f} - 1 \right). \quad (3.10)$$

Здесь Ψ' по своему смыслу означает отношение продольных потоков магнитного поля и жидкости. При $\Psi' \ll 1$, отбрасывая квадраты этой величины, мы получаем

$$f \approx v_z, \quad \xi \approx \frac{f}{B^2} \left(U - \frac{f^2}{2} \right) \ln \frac{r}{R}, \quad (3.11)$$

$$\rho \approx \frac{U - f^2/2}{r^2 B^2}, \quad H_{\varphi} \approx \frac{U - f^2/2}{rB}, \quad (3.12)$$

$$v_{\varphi} \approx \frac{U - f^2/2}{rB} \Psi', \quad H_z \approx \frac{U - f^2/2}{r^2 B^2} f \Psi'. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что в первом порядке по Ψ' геометрия электродов остается той же самой, как и при $\Psi' = 0$. Величины ρ и H_{φ} также не меняются, а v_{φ} и H_z пропорциональны Ψ и для рассматриваемого течения исчезают при $v \rightarrow v_{\max} \approx \sqrt{2U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 3.
2. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Журн. техн. физики. 1963. Т. 34. С. 429.
3. Ладыженский М.Д. // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. С. 6.
4. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
5. Коган В.И. // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. С. 1.

ПРОБОЧНАЯ МАГНИТНАЯ ЛОВУШКА С ПОЛЕМ, ВОЗРАСТАЮЩИМ ВО ВСЕ СТОРОНЫ*

ТОПОГРАФИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК КВАДРАТА ПОЛЯ

Для устойчивости ограниченной плазмы благоприятна такая конфигурация магнитного поля \mathbf{B} , при которой модуль B нарастает во все стороны от центра ловушки. Центром ловушки будем считать точку минимума B^2 , а точки, в которых $\nabla B^2 = 0$, назовем стационарными. Вычислив лапласиан B^2 с учетом равенства нулю лапласианов декартовых компонент \mathbf{B} , получим

$$\Delta B^2 = 2 \sum_{i=1}^3 (\nabla B_i)^2, \quad i = x, y, z. \quad (1)$$

Поскольку сумма вторых производных неотрицательна, стационарные точки модуля поля могут быть либо точками минимума B^2 , либо седловыми и не могут быть точками максимума. Условия стационарности B^2 имеют вид

$$\frac{\partial B^2}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^3 B_i \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = 0. \quad (2)$$

Если напряженность поля в особой точке B^2 обращается в нуль, то условия (2) не дают никаких новых ограничений на производные компонент \mathbf{B} . Если же $B_i \neq 0$, то из условий (2) следуют добавочные соотношения между первыми производными \mathbf{B} .

Для плазменных ловушек представляют интерес области минимального поля с отличной от нуля напряженностью. Рассмотрим окрестность стационарной точки B^2 , направив ось z вдоль поля в данной точке. Тогда равенство (1) с учетом уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

и уравнений (2) примет вид

$$\Delta B^2 = 4 \left[\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Разложение скалярного потенциала Φ вакуумного поля вблизи оси z имеет вид

$$\Phi = \int_0^z B_z(z) dz - \frac{B'_z(z)}{4} (x^2 + y^2) + \frac{k_1(z)}{2} (x^2 - y^2) + k_2(z)xy + \dots, \quad (5)$$

где B_z , k_1 , k_2 — произвольные функции z . В стационарной точке B^2 производная $B_z(z)$ равна нулю, и поэтому равенство (4) дает

$$\Delta B^2 = 4(k_1^2 + k_2^2). \quad (6)$$

Из последнего уравнения следует:

* Совместно с А.И. Морозовым // Атом. энергия. 1965. Т. 19. С. 420–423.

1) на оси аксиально-симметричного поля ($k_1 = k_2 = 0$) могут быть только седловые точки B^2 ;

2) в плоском поле $\Phi = \Phi(x, z)$, поскольку $k_2 = 0$, $k_1 = \frac{B'_z}{2}$, также не существует минимумов B^2 , так как $B'_z = 0$;

3) аналогично в аксиально-симметричном поле не может существовать минимума B^2 в точке, не лежащей на оси, если направление поля в этой точке совпадает с осью симметрии z .

Можно показать, что винтовое поле ($B_z = \text{const}$; $k_1 = b_1 \cos 2\alpha z$; $k_2 = b_2 \sin 2\alpha z$) имеет минимум на оси z только в том случае, когда сепаратриса поля сжимается в точку, т.е. силовые линии уходят от оси z .

Для плазменных ловушек используется два вида конфигураций магнитного поля: тороидальные, в которых силовые линии не уходят из области ловушки, и торцевые с уходящими силовыми линиями; выход заряженных частиц из торцевых ловушек ограничен адиабатическим инвариантом ν_{\perp}^2/B .

В работе [1] дан пример конфигурации несимметричного поля первого типа, обладающего свойством минимальности B^2 в усредненном смысле: $\int \frac{dl}{B} = \text{max}$, достаточным для того, чтобы не было конвективной неустойчивости плазмы низкого давления.

Если ограничиться полями второго типа, то приведенные выше соотношения оставляют возможность осуществления ловушек с областью минимального B^2 даже для полей, обладающих пространственной симметрией. Примером соответствующего плоского поля (с отличной от нуля продольной составляющей B_z) является поле, описываемое скалярным потенциалом

$$\Phi = B_0 z + b_1(x^2 - y^2). \quad (7)$$

Здесь основным является продольное поле B_z (см. (5)). Если сделать его возрастающим к торцам (при этом поле перестанет быть плоским), то получим простейшую модель пробочной ловушки с токовыми стержнями [2].

Аксиально-симметричные ловушки с областью минимального поля согласно отмеченному выше можно создать, приняв за основное либо азимутальное, либо радиальное поле. Примером первого случая может быть ловушка, образованная азимутальным полем $B_\phi = B_0 R/r$, на которое наложено квадрупольное поле, описываемое скалярным потенциалом

$$\Phi_1 = b_1 \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \ln \frac{r}{R} - z^2 \right) \approx b_1 [(r - R)^2 - z^2]. \quad (8)$$

Свойства полей такой конфигурации аналогичны свойствам поля антипробочного типа с центральным токовым стержнем [3]. Второй случай, когда основным является радиальное поле, был предложен Андреолетти [4, 5]. Соответствующее поле имеет весьма простую конфигурацию силовых линий, и мы остановимся на нем более подробно.

СИСТЕМА АНДРЕОЛЕТТИ

Возможность построения радиальной пробочной ловушки, очевидно, связана со сгущением силовых линий радиального поля при приближении к оси z . Рассмотрим конфигурацию магнитного поля, в средней плоскости ($z = 0$) которого имеется лишь радиальное поле B_r .

Поле вблизи средней плоскости можно описать скалярным потенциалом, разложение которого по степеням z имеет вид

$$\Phi = \int_0^r b(r) dr - \frac{1}{r} \left[(rb)' \frac{z^2}{2} + \dots \right]. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{V} = \nabla\Phi$, а $b(r)$ – заданное поле при $z = 0$. Соответствующая функция потока $\psi = rA_\varphi$ равна

$$\psi = -b(r)rz + r \left[\frac{(rb)'}{r} \right]' \frac{z^3}{6} - \dots \quad (10)$$

Поэтому уравнение силовых линий $\psi(r, z) = \text{const}$ вблизи плоскости $z = 0$ приближенно записывается в виде

$$z = \frac{\text{const}}{rb(r)}. \quad (11)$$

Квадрат напряженности поля выражается формулой

$$B^2 = b^2 + \left\{ \frac{(rb)'^2}{r^2} - b \left[\frac{(rb)'}{r} \right]' \right\} z^2 + \dots \quad (12)$$

Пусть модуль поля имеет минимум в точке $r = r_0$, $z = 0$, тогда $b'(r_0) = 0$, $b''(r_0) > 0$; обозначив $b(r_0)$ через b_0 , для $B^2(r_0, z)$ получим выражение

$$B^2 = b_0^2 + b_0 \left(\frac{2b_0}{r_0^2} - b_0'' \right) z^2 + \dots \quad (13)$$

Отсюда видно, что для положительности $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ необходимо, чтобы кривизна $b = b(r)$ в минимуме была достаточно малой (рис. 1). В лучшем случае ($b_0'' = 0$) найдем

$$B^2 = b_0^2 \left(1 + 2 \frac{z^2}{r_0^2} \right). \quad (14)$$

Таким образом, поле по z возрастает тем быстрее, чем ближе к оси находится минимум поля. Однако для создания достаточно большого внутреннего радиального пробочного отношения $b(r_1)/b(r_0)$ при малой кривизне кривой $b = b(r)$ требуются достаточно большие расстояния ($r_0 - r_1$). Поэтому у ловушек с большим радиальным пробочным отношением будут большие радиальные размеры и более слабое нарастание поля по z . Для создания возможно более сильного нарастания поля по z следует задать быстро спадающую по оси функцию $b(r)$, однако такую, чтобы $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ было везде положительным.

Для иллюстрации имеющихся возможностей рассмотрим поле, заданное при $z = 0$ выражением

$$b(r) = c_1 r^{-m} + c_2 r^n \quad (m, n > 0). \quad (15)$$

Наличие минимума поля при $r = r_0$ дает связь c_1 и c_2 :

$$c_2 = \frac{m}{n} c_1 r_0^{-m-n}. \quad (16)$$

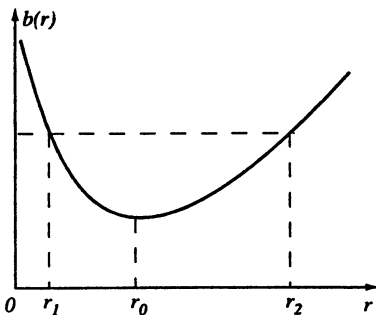


Рис. 1. График поля в средней плоскости ($z = 0$)

При $r = r_0$ величина

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} = 2c_1^2 r_0^{-2m-2} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 (2 - mn). \quad (17)$$

Отсюда следует условие существования минимума поля по z :

$$mn < 2. \quad (18)$$

Вычисление $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ в произвольной точке r дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} &= 2c_1^2 r_0^{-2m-2} (1 - m) + 2c_2^2 r^{2n-2} (1 + n) + c_1 c_2 r^{n-m-2} [4 - 2(m - n) - (m + n)^2] = \\ &= c_1^2 r^{-2m-2} \left\{ 2(1 - m) + \frac{m}{n} [4 - 2(m - n) - (m + n)^2] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m+n} + \frac{2m^2}{n^2} (1 + n) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(m+n)} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последнее выражение, квадратичное по $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m+n}$, показывает, что $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ обращается в нуль в точках r_s , определяющихся выражением

$$\left(\frac{r_s}{r_0}\right)^{m+n} = \frac{n}{m} \left\{ -\frac{4 - 2(m - n) - (m + n)^2}{4(1 + n)} \pm \sqrt{\left[\frac{4 - 2(m - n) - (m + n)^2}{4(1 + n)}\right]^2 - \frac{1 - m}{1 + n}} \right\}. \quad (20)$$

Здесь подкоренное выражение будет отрицательным, если положительна величина

$$D \equiv 4 - 4(m - n) - (m + n)^2 > 0. \quad (21)$$

Таким образом, требование положительной определенности квадратичной формы (19) приводит к условию

$$m < 2\sqrt{2(1 + n)} - (2 + n), \quad (22)$$

откуда следует, что максимальное m возможно при $n = 1$, когда условие (22) дает $m < 1$.

В случае, когда $m = n$, неравенство (21) также сводится к требованию $m < 1$. При этом радиусы r_1 и r_2 (см. рис. 1) просто выражаются через соответствующее "пробоч-

ное" отношение полей $\Pi = \frac{b(r_1)}{b(r_0)} = \frac{b(r_2)}{b(r_0)}$:

$$\frac{r_2}{r_0} = \left(\Pi + \sqrt{\Pi^2 - 1} \right)^{1/m},$$

$$\frac{r_1}{r_0} = \left(\Pi - \sqrt{\Pi^2 - 1} \right)^{1/m}.$$
(23)

Если $m = 1$, требование положительной определенности (21) квадратичной формы (19) слишком жестко и его можно ослабить, приняв $m = 1$ и $n = 1$. Легко видеть, что при этом $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ также нигде не обращается в нуль. В случае $m = n = 1$ рассматриваемое поле точно удовлетворяет соотношениям (3) и описывается скалярным потенциалом Φ и функцией потока ψ , соответственно равными

$$\Phi = c_1 \ln \frac{r}{r_0} + c_2 \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right),$$

$$\psi = -c_1 z - c_2 r^2 z.$$
(24)

Это поле представляет собой суперпозицию чисто радиального и квадрупольного полей. Квадрат модуля суммарного поля

$$B^2 = \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r \right)^2 + 4c_2^2 z^2$$
(25)

имеет постоянную производную $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$, причем в минимуме поля производные $\frac{\partial^2 B^2}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2}$ совпадают. Расположение точек r_1, r_0, r_2 определяется через Π по формуле (23) при $m = 1$.

Заданное поле, удовлетворяющее уравнениям (3), может быть в принципе создано двумя способами. Во-первых, можно расположить железные полюса магнитов по эквипотенциалам $\Phi = \text{const}$. Соответствующее расположение для поля (24) показано на рис. 2. Во-вторых, можно расположить по магнитным поверхностям $\psi = \text{const}$

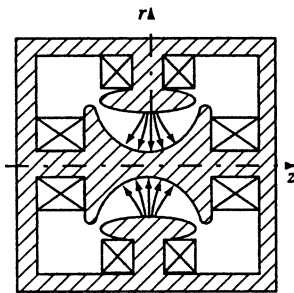


Рис. 2. Вариант радиальной пробочной ловушки с полюсными наконечниками

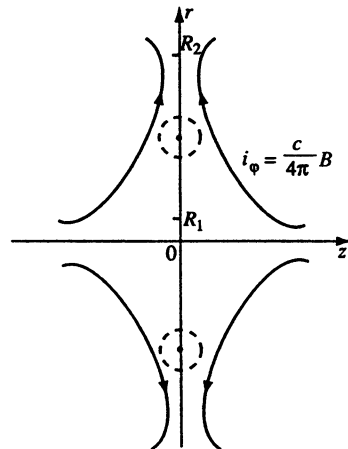


Рис. 3. Радиальная пробочная ловушка, создаваемая с помощью поверхностных токов

поверхностные токи $i_\varphi = \frac{c}{4\pi} B$. Этот способ эквивалентен использованию идеально проводящих поверхностей. Физически невозможно создать бесконечно большое поле на оси z . Однако в случае поля (24) можно, например, вместо исходного выражения

$b(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r$ задать поле при $z = 0$ в виде

$$b(r) = \frac{c_1 r}{R_1^2 + r^2} + \frac{c_2 r}{1 + r^2/R_2^2}, \quad (26)$$

где $R_1 < r_0 < R_2$, причем видоизменение второго слагаемого не является принципиальным и сделано для уменьшения необходимых токов на больших радиусах. Нетрудно видеть, что при выполнении условий $R_1^2 \ll r_0^2 \ll R_2^2$ максимумы поля в средней плоскости $z = 0$ достигаются при $r_1 \approx R_1$ и $r_2 \approx R_2$, а в области $R_1 < r < R_2$ соответствующее поле имеет приблизительно те же свойства, что и поле (24). Расположение поверхностных токов, необходимых для создания такого поля, схематически показано на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Furth H., Rosenbluth M. // Phys. Fluids. 1964. Vol. 7, N 5. P. 764.
2. Байбородов Ю.Т. // Атом. энергия. 1963. Т. 14. С. 443.
3. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
4. Andreoletti J. // C. r. Acad. sci. 1963. Vol. 256. P. 1969.
5. Furth H. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 11. P. 308.

УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

В настоящей работе получен приближенный интеграл уравнений силовых линий магнитного поля, имеющего большую продольную компоненту, в произвольной геометрии. С помощью этого интеграла рассматривается задача об устойчивости конфигурации тороидальных магнитных поверхностей относительно малых возмущений магнитного поля.

1. ИНТЕГРАЛ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Уравнения силовых линий магнитного поля \mathbf{B} в произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 с метрикой $dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ имеют вид

$$dx^1 / dx^3 = B^1 / B^3, \quad dx^2 / dx^3 = B^2 / B^3, \quad (1)$$

где B^i – контрвариантные компоненты вектора \mathbf{B} . Если магнитное поле имеет большую продольную составляющую вдоль некоторого направления x^3 и малые по сравнению с ней поперечные компоненты, то при условии периодичности поля по x^3 существуют приближенные (усредненные по x^3) магнитные поверхности такого поля, зависящие от x^1 и x^2 .

Будем считать, что g_{ik} являются периодическими функциями x^3 с тем же периодом, что и \mathbf{B} . Умножим числители и знаменатели правых частей уравнений (1) на \sqrt{g} , где $g = \text{Det } g_{ik}$, и представим $\sqrt{g} B^3$ в виде суммы постоянной и переменной (по x^3) частей $\sqrt{g} B^3 = \overline{\sqrt{g} B^3} + \widetilde{\sqrt{g} B^3}$. Прямая черта сверху означает усреднение по периоду изменения x^3 при фиксированных x^1 и x^2 , а волнистой линией обозначается переменная часть, определяющаяся как разность между самой величиной и ее средним значением. В предположении, что $\widetilde{\sqrt{g} B^3} \ll \overline{\sqrt{g} B^3}$, уравнения (1) с точностью до квадратичных членов запишутся в виде

$$\frac{dx^k}{dx^3} = \frac{\sqrt{g} B^k}{\overline{\sqrt{g} B^3}} \left(1 - \frac{\widetilde{\sqrt{g} B^3}}{\overline{\sqrt{g} B^3}} \right) \equiv f^k(x^1, x^2, x^3).$$

Согласно сделанным предположениям, правые части f^k являются малыми и периодическими по x^3 . Приближенное решение этих уравнений, полученное методом усреднения, описывается формулами [1] $x^k = \bar{x}^k + \hat{f}^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) + \dots$, $\frac{d\bar{x}^k}{dx^3} = \bar{f}^k + \frac{\partial f^k}{\partial \bar{x}^i} \hat{f}^i + \dots$; операция \hat{f} означает переменную часть неопределенного интеграла по x^3 от пере-

* Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. С. 76–79.

менной части f , а правые части усредненных уравнений зависят только от переменных \bar{x}^1 и \bar{x}^2 . Если подставить в усредненные уравнения выражения для f^k из уравнений (1) и преобразовать полученные соотношения с учетом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}B^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}B^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}B^3) = 0 \quad (2)$$

и уравнений

$$\sqrt{g}B^1 = \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial \bar{x}^2}, \quad \sqrt{g}B^2 = -\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial \bar{x}^1}, \quad (3)$$

где A_3 – ковариантная компонента векторного потенциала \mathbf{A} , то уравнения усредненных силовых линий можно представить в виде

$$\frac{d\bar{x}^1}{dx^3} = \frac{1}{\sqrt{g}B^3} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}^2}, \quad \frac{d\bar{x}^2}{dx^3} = -\frac{1}{\sqrt{g}B^3} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}^1}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\Psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \bar{A}_3 - \frac{1}{\sqrt{g}B^3} \widehat{\sqrt{g}B^1 \sqrt{g}B^2}. \quad (5)$$

Интеграл этих уравнений $\bar{\Psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{const}$ и дает уравнения усредненных магнитных поверхностей. Истинные магнитные поверхности с точностью до членов первого порядка малости также определяются уравнением $\bar{\Psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{const}$, если вместо аргументов $\bar{\Psi}$ подставить

$\bar{x}^1 = x^1 - \frac{1}{\sqrt{g}B^3} \widehat{\sqrt{g}B^1}$, $\bar{x}^2 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{g}B^3} \widehat{\sqrt{g}B^2}$. Для случая

магнитных конфигураций, близких к симметричным, аналогичный интеграл был получен в [1].

Для того чтобы представить интеграл магнитных поверхностей непосредственно через компоненты поля \mathbf{B} , необходимо разрешить уравнения (3) относительно \bar{A}_3 . Решение этих уравнений можно записать в виде

$$\bar{A}_3 = -\int_{\bar{x}_0^1}^{\bar{x}^1} \sqrt{g}B^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2) d\bar{x}^1 + \int_{\bar{x}_0^2}^{\bar{x}^2} \sqrt{g}B^1(\bar{x}_0^1, \bar{x}^2) d\bar{x}^2 \quad (6)$$

или в эквивалентной форме, отличающейся от (6) заменами $x^1 \rightarrow x^2$, $x^2 \rightarrow x^1$, $B^1 \rightarrow -B^2$, $B^2 \rightarrow -B^1$. Интегрирование по одному из аргументов в (6) производится при фиксированном втором аргументе, а \bar{x}_0^1 и \bar{x}_0^2 – произвольные постоянные.

Если координата x^1 характеризует отклонение от магнитной оси системы вложенных магнитных поверхностей, так что $B^1(0, x^2) = 0$, то, полагая $\bar{x}_0^1 = 0$ и опуская далее черточки сверху у x^1 и x^2 , получим для $\bar{\Psi}(x^1, x^2)$ выражение

$$\bar{\Psi}(x^1, x^2) = -\int_0^{x^1} \sqrt{g}B^2 dx^1 - \frac{1}{\sqrt{g}B^3} \widehat{\sqrt{g}B^1 \sqrt{g}B^2}. \quad (7)$$

Точность, с которой уравнение $\Psi(x^1, x^2) = \text{const}$ описывает поведение магнитных поверхностей, существенно зависит от выбора переменных x^1 , x^2 , x^3 . Например, в

случае симметричного поля, не зависящего от координаты x^3 , уравнение $\bar{\Psi} = \text{const}$ является точным уравнением магнитных поверхностей. Переменные x^i следует выбирать таким образом, чтобы не "усреднялись" нужные эффекты.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Наличие общего решения (7) позволяет, в частности, исследовать устойчивость магнитных поверхностей. Будем считать конфигурацию магнитных поверхностей устойчивой, если любые малые возмущения поля не уведут силовую линию далеко от ее первоначальной магнитной поверхности. Пусть невозмущенное поле \mathbf{B} получает малое приращение \mathbf{b} , тогда в линейном приближении

$$\bar{\Psi}(x^1, x^2) = - \int_0^{x^1} \sqrt{gB^2} dx^1 - \frac{1}{\sqrt{gB^3}} \overline{\sqrt{gB^1} \sqrt{gB^2}} - \int_0^{x^1} \sqrt{gb^2} dx^1 - \frac{1}{\sqrt{gB^3}} \left(\overline{\sqrt{gB^1} \sqrt{gb^2}} - \overline{\sqrt{gB^2} \sqrt{gb^1}} \right). \quad (8)$$

Очевидно, магнитные поверхности являются неустойчивыми, если слагаемые $\bar{\Psi}(x^1, x^2)$, не содержащие возмущений, тождественно равны нулю. В этом случае всегда можно выбрать такие возмущения, которые приведут к существенной перестройке магнитных поверхностей. Если же невозмущенная часть $\bar{\Psi}(x^1, x^2)$ обращается в нуль только в отдельных точках x^1, x^2 или на линиях $x^1 = x^1(x^2)$, то наличие возмущения приводит лишь к малым деформациям магнитных поверхностей: к их смещению, образованию розеток и волокон [1]. При этом следует учесть, что вид функции $\bar{\Psi}(x^1, x^2)$ зависит от выбора переменных x^i , т.е. от выбора линий $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$, вдоль которых производится усреднение. Поскольку наиболее опасными являются возмущения, постоянные вдоль замкнутых силовых линий, то для выявления расщепления магнитных поверхностей следует производить усреднение вдоль линий, близких к замкнутым силовым линиям.

Для получения оценок возмущений магнитных поверхностей свяжем криволинейные координаты x^i с тороидальными магнитными поверхностями невозмущенного поля \mathbf{B} . Если за "радиальную" координату x^1 принять продольный магнитный поток $x^1 = \Phi/2\pi$, то, так как $B^i = \mathbf{B} \nabla x^i$, имеем $B^1 = 0$, и уравнение силовых линий (1) имеет первый интеграл $\Phi = \text{const}$. Второй интеграл можно найти из уравнения (2), в котором теперь отличны от нуля только два последних члена. Уравнение (2) удовлетворяется введением функции $\vartheta(\Phi, x^2, x^3)$, определяющейся уравнениями

$$\sqrt{gB^2} = -\partial\vartheta/\partial x^3, \quad \sqrt{gB^3} = \partial\vartheta/\partial x^2. \quad (9)$$

Вторым интегралом уравнений (1) является $\vartheta(\Phi, x^2, x^3) = \text{const}$. В качестве "азимутальной" координаты x^2 и "продольной" координаты x^3 выберем координаты, связанные с ϑ соотношением [2, 3]

$$\vartheta = x^2 - \mu(\Phi)x^3, \quad (10)$$

и потребуем, чтобы линия $x^2 = \text{const}$ замыкалась после полного обхода тора $\Phi = \text{const}$. Согласно (9) невозмущенное поле в такой системе координат имеет компоненты $\sqrt{gB^i} = \{0, \mu, 1\}$. Примем период изменения x^2 равным 2π , а период x^3 равным L . Величина $\mu(\Phi)$ определяется азимутальным потоком $d\chi$ между соседними магнитными

поверхностями:

$$d\chi = \frac{1}{2\pi} \int B \nabla x^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int B^2 \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\mu d\Phi}{(2\pi)^2} \int dx^2 dx^3, \quad (11)$$

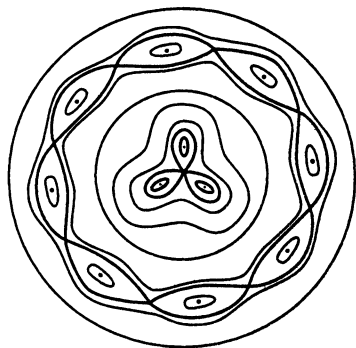
откуда $L\mu(\Phi) = 2\pi d\chi/d\Phi$. Как видно из (10), силовые линии $\vartheta = \text{const}$ в выбранной системе координат прокручиваются при полном обходе тора на каждой данной магнитной поверхности $\Phi = \text{const}$ на одинаковый угол $L\mu(\Phi)$. При этом уравнение возмущенных магнитных поверхностей принимает вид

$$\bar{\Psi}(x^1, x^2) = - \int_0^\Phi \mu(\Phi) d\Phi - \int_0^\Phi \sqrt{g} b^2 d\Phi = \text{const}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что устойчивость относительно возмущений, имеющих постоянную составляющую вдоль линии $x^2 = \text{const}$, определяется отличием от нуля величины μ .

Если на некоторой поверхности $\Phi = \Phi_0$ средний угол прокручивания $L\mu(\Phi_0) = 2\pi m/n$, где m и n – взаимно простые целые числа, то все силовые линии невозмущенного поля на поверхности $\Phi = \Phi_0$ замыкаются после n обходов тора. Перейдем к новой системе координат $x_*^2 = x^2 - \mu(\Phi_0)x^3$, в которой силовые линии на поверхности $\Phi = \Phi_0$ не вращаются. В новой координатной системе координатные линии замыкаются после n обходов тора и, следовательно, $\sqrt{g} b^i$ являются периодическими функциями x^3 с периодом nL . Уравнение усредненных магнитных поверхностей запишется теперь в виде

$$\bar{\Psi}(x^1, x_*^2) = - \int_0^\Phi [\mu(\Phi) - \mu(\Phi_0)] d\Phi - \int_0^\Phi \sqrt{g} b_*^2 d\Phi = \text{const}. \quad (13)$$



Согласно (13) устойчивость магнитных поверхностей относительно возмущений поля, имеющих постоянную составляющую вдоль замкнутой силовой линии, определяется отличием от нуля приращения $\mu(\Phi) - \mu(\Phi_0)$.

Как видно из (11), среднее по "азимуту" x^2 значение $\langle b^2 \sqrt{g} \rangle = 2\pi d\chi_b/d\Phi L$, где $d\chi_b$ – азимутальный поток поля \mathbf{b} , и, следовательно, для оценок можно полагать $L \sqrt{g} b^2 \sim 2\pi d\chi_b/d\Phi$. Полагая, кроме того, $\Phi \sim B_{\parallel} \pi \rho^2$, $\chi_b \sim L b_{\perp} \rho$, где ρ – средний радиус магнитной поверхности, получим следующие оценки для величин деформаций магнитных поверхностей: $\delta\rho \sim b_{\perp}/\mu B_{\parallel}$ в случае (12) и $(\delta\rho)^2 \sim 2b_{\perp}/\mu'(\rho_0) B_{\parallel}$ в случае (13). Аналогичные оценки можно получить и для случая, когда $\mu'(\Phi_0) = 0$, но $\mu^{(k)}(\Phi_0) \neq 0$. Полученные оценки характеризуют порядок смещения или расщепления магнитных поверхностей.

Поскольку магнитная ось также является замкнутой силовой линией, то под влиянием возмущений в ее окрестности может образоваться розетка. Для получения оценки амплитуды ее лепестков примем, что $\mu \sim \mu^{(n)} \rho^n/n!$, $b_{\perp} \sim b_{\perp}^{(m)} \rho^m/m!$. При этом если $n + 1 > m$, то в окрестности оси возникает розетка, размер лепестков которой

имеет порядок

$$\rho_{\perp} \sim \left[\frac{n!(n+2)}{m!} \frac{b_{\perp}^{(m)}}{\mu^{(n)} B_{\parallel}} \right]^{\frac{1}{n-m+1}}$$

Типичная структура устойчивых магнитных поверхностей в нормальном сечении показана на рисунке.

В заключение отметим, что появление резонансных знаменателей при расчетах магнитных поверхностей и равновесных плазменных конфигураций [4–6] обязано возникновению волокнистой структуры. Проблема "малых знаменателей" в применении к динамическим системам рассматривается в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3.
2. Крускал М., Кулсруд Р. Равновесие удерживаемой магнитным полем плазмы в тороиде // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 221.
3. Кадомцев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 6.
4. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 2. P. 23.
5. Mercier C. // Ibid. 1963. Vol. 3. P. 89.
6. Шафранов В.Д. // Ядер. синтез. 1964. Т. 4. С. 114.
7. Арнольд В.И. // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 6.

К ТЕОРИИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ*

Магнитное дифференциальное уравнение. Задача о равновесии плазмы в магнитном поле, имеющем тороидальные магнитные поверхности, приводит к "магнитному дифференциальному уравнению" [1, 2]

$$\mathbf{B} \nabla r = s, \quad (1)$$

где \mathbf{B} – магнитное поле, s – известная, а r – искомая однозначная функция. Требование однозначности налагает на r определенные условия. Действительно, интегрируя (1) по объему между двумя магнитными поверхностями, получаем (условие Крускала и Кулсруда [1])

$$\int s dV = 0. \quad (2)$$

Если проинтегрировать уравнение (1) вдоль силовой линии, то видно, что на "рациональных поверхностях", где магнитные силовые линии замкнуты, должно быть (условие Ньюкомба [2])

$$\oint \frac{s dl}{B} = 0. \quad (3)$$

Смысл этих условий легко уяснить, если ввести криволинейные координаты $x_1 = \Phi/2\pi$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \zeta$, связанные с магнитными поверхностями $\Phi = \text{const}$, где $\Phi(\mathbf{r})$ – продольный поток магнитного поля, а θ и ζ – угловые координаты на поверхности, изменяющиеся

* Совместно с В.Д. Шафрановым // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. С. 75–78.

при полном обходе тора на 2π . Координаты θ и ζ можно выбрать так, чтобы контравариантные компоненты вектора \mathbf{B} имели вид [1–5]

$$B^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \{0, \mu, 1\}. \quad (4)$$

Здесь g – детерминант метрического тензора g_{ik} ; $\mu = \mu(\Phi)$ – производная поперечного потока $\chi(\Phi)$ по продольному потоку:

$$\mu(\Phi) = d\chi/d\Phi. \quad (5)$$

Поскольку $\sqrt{g}s$ является периодической функцией θ и ζ , то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$\sqrt{g}s = \text{Re} \sum_{m,n} a_{mn}(\Phi) e^{i(m\theta - n\zeta)}. \quad (6)$$

Учитывая, что $dV = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g} d\Phi d\theta d\zeta$, получаем условие (2) в виде

$$\int s dV = \frac{d\Phi}{2\pi} \text{Re} \sum_{m,n} a_{mn}(\Phi) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\theta - n\zeta)} d\theta d\zeta = 2\pi d\Phi a_{00}(\Phi) = 0. \quad (7)$$

Так как силовая линия на поверхности $\Phi = \text{const}$ согласно (4) определяется уравнением $\theta = \mu\zeta$, то условие (3) можно записать в виде

$$\oint \frac{s d\zeta}{B^3} = \int \sqrt{g}s d\zeta = \text{Re} \sum_{m,n} a_{mn}(\Phi) \oint e^{i(m\mu - n)\zeta} d\zeta = 0. \quad (8)$$

Таким образом, условие (2) означает отсутствие в разложении (6) нулевой гармоники $a_{00} = 0$. Условие (3) согласно (8) означает отсутствие "резонансных" гармоник a_{mn} на "рациональных" поверхностях $\Phi = \Phi_{mn}$, где $\mu(\Phi_{mn}) = n/m$:

$$a_{mn}(\Phi_{mn}) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (1) в выбранных координатах имеет вид

$$(\mu \partial / \partial \theta + \partial / \partial \zeta) r = \sqrt{g}s. \quad (10)$$

Разлагая r в ряд, аналогичный (6), получим для коэффициентов ряда r_{mn} :

$$r_{mn} = -i \frac{a_{mn}(\Phi)}{m\mu(\Phi) - n}. \quad (11)$$

При выполнении условия Ньюкомба числитель обращается в нуль одновременно со знаменателем, и, следовательно, имеется конечное периодическое решение уравнения (1).

Представляет интерес выяснить, как требования (2), (3) проявляются в конкретных задачах. Такими задачами являются, например, задача о возмущениях тороидальных магнитных поверхностей и задача о равновесных тороидальных конфигурациях плазмы. В этих задачах условие Крускала и Кульсруда (2) не вызывает затруднений. Условие Ньюкомба (3) на первый взгляд является весьма жестким. Однако, как показано ниже, его можно удовлетворить с помощью перенормировки (подходящего выбора) невозмущенного решения.

Возмущения магнитных поверхностей. Уравнение для определения тороидальных магнитных поверхностей $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ имеет вид

$$\mathbf{B} \nabla \psi = 0. \quad (12)$$

Пусть истинное магнитное поле \mathbf{B} отличается от поля нулевого приближения \mathbf{B}_0 на

вектор \mathbf{V}_1 первого порядка малости. Полагая $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где ψ_0 – известная функция, удовлетворяющая уравнению $\mathbf{V}_0 \nabla \psi_0 = 0$, получаем в линейном приближении магнитное дифференциальное уравнение для ψ_1 :

$$\mathbf{V}_0 \nabla \psi_1 = -\mathbf{V}_1 \nabla \psi_0. \quad (13)$$

Условие (2) удовлетворяется в силу равенства $\text{div } \mathbf{V}_1 = 0$. Во введенных выше координатах уравнение (13) имеет вид (10), где $\sqrt{g}s = -2\pi B^1 \sqrt{g} \psi'_0(\Phi)$. Разлагая $B^1 \sqrt{g}$ в ряд Фурье:

$$B^1 \sqrt{g} = \sum_{m,n} b_{mn} e^{i(m\theta - n\zeta)},$$

имеем

$$\psi_{1mn} = 2\pi i \frac{b_{mn}(\Phi) \psi'_0(\Phi)}{m\mu(\Phi) - n}. \quad (14)$$

Возможность удовлетворения условиям разрешимости (9) при наличии резонансных гармоник возмущающего поля $b_{mn}(\Phi_{mn}) \neq 0$ связана с двумя фактами: 1) реальные возмущения имеют практически любое число резонансных гармоник с заметной амплитудой; 2) исходная функция $\psi_0(\Phi)$ допускает большой произвол в ее выборе. Наиболее простой способ выбора ψ_0 заключается в отождествлении ее с какой-либо физической функцией, являющейся, как и ψ_0 , "поверхностной величиной" [1], например с предельным потоком Φ . Эта функция обычно монотонно растет от оси. Однако в качестве ψ_0 можно взять также и произвольную функцию $\psi_0(\Phi)$, причем ее можно выбрать так, чтобы на резонансных поверхностях $\Phi = \Phi_{mn}$ производная $\psi'_0(\Phi)$ обращалась в нуль, например в виде интеграла по Φ от произведения резонансных знаменателей:

$$\psi_0(\Phi) = \int \prod_{m,n} [m\mu(\Phi) - n] d\Phi. \quad (15)$$

При этом решение имеет вид

$$\psi = \int \prod_{m,n} [m\mu(\Phi) - n] d\Phi + 2\pi \text{Re} \sum_{k,l} i b_{kl}(\Phi) \prod_{\substack{m \neq k \\ n \neq l}} [m\mu(\Phi) - n] e^{i(k\theta - l\zeta)}. \quad (16)$$

Полученное решение показывает, что наличие резонансных гармоник приводит к разрушению магнитных поверхностей при $\mu(\Phi) = \text{const}$. Однако если $\mu'(\Phi_{mn}) \neq 0$, то резонансные возмущения приводят только к расщеплению резонансных магнитных поверхностей и образованию волокнистой структуры [6, 7].

Форму возмущенных магнитных поверхностей в окрестности отдельной резонансной поверхности $\Phi = \Phi_{MN}$ можно получить, разложив (16) по $\Phi - \Phi_{MN}$:

$$\psi = \left[m\mu'(\Phi_{MN}) \frac{(\Phi - \Phi_{MN})^2}{2} + \text{Re} 2\pi i b_{MN} e^{i(M\theta - N\zeta)} \right] \prod_{\substack{m \neq M \\ n \neq N}} [m\mu(\Phi) - n]. \quad (17)$$

Из этой формулы видно, что на возмущение магнитных поверхностей вблизи резонанса влияет только одна (резонансная) гармоника возмущающего поля.

Заметим, что если отбросить все остальные гармоники возмущения, то решение, получающееся при указанном конкретном выборе перенормировки (15), в линейном приближении является точным. Оно остается точным и в более общем случае возмущений, имеющих одинаковый шаг $m/n = \text{const}$. Если $\sqrt{g} B^1 = \sum_N b_N(\Phi) e^{iN\Theta}$, где

$\Theta = m\theta - n\zeta$, то функция

$$\psi = \int_0^\Phi [m\mu(\Phi) - n] d\Phi + \operatorname{Re} \sum_N 2\pi i \frac{b_N(\Phi)}{N} e^{iN\Theta} \quad (18)$$

дает точное решение уравнения $\mathbf{B}\nabla\psi = 0$, что нетрудно проверить, используя равенство $\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0$.

Решение (16) получено выше в специальной системе координат. Однако рецепт перенормировки (15) имеет инвариантный вид и может быть использован при решении задач в любой конкретной координатной системе.

О равновесии плазмы с конечной проводимостью. Задачей теории равновесия плазмы в тороидальных магнитных ловушках является определение токов в плазме и связанных с ними возмущений магнитных поверхностей. Эту задачу можно решать методом возмущений, описанным Спитцером [8] и Крускалом и Кульсрудом [1].

В нулевом приближении имеются вакуумные тороидальные магнитные поверхности $\Phi_0 = \text{const}$. Давление плазмы в первом приближении предполагается известным: $p = p(\Phi_0)$. Разбивая вектор плотности тока на поперечную и продольную относительно вакуумного магнитного поля составляющие: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + h\mathbf{B}_0$, где $\mathbf{j}_\perp = c[\mathbf{B}_0\nabla p]/B_0^2$, получаем из условия $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ магнитное дифференциальное уравнение для h [1]:

$$\mathbf{B}_0\nabla h = \mathbf{j}_\perp\nabla B_0^2/B_0^2 = c[\mathbf{B}_0\nabla p_0]\nabla B_0^2/B_0^4. \quad (19)$$

Проекция закона Ома на магнитное поле \mathbf{B}_0 приводит также к аналогичному уравнению для скалярного потенциала и электрического поля (поддерживающего продольный ток, который снимает разделение зарядов, вызванное тороидальным эффектом) [1]:

$$\mathbf{B}_0\nabla\varphi = -\frac{(\mathbf{j}\mathbf{B}_0)}{\sigma_\parallel} = -\frac{h}{\sigma_\parallel} B_0^2. \quad (20)$$

Здесь σ_\parallel – продольная проводимость, которую можно обычно считать "поверхностной функцией": $\sigma_\parallel = \sigma_\parallel(\Phi_0)$

Правая часть уравнения (19) удовлетворяет условию Крускала и Кульсруда (2) автоматически, поскольку она представляет собой $\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp$. В отсутствие вихревого электрического поля правая часть уравнения (20) также удовлетворяет условию (2) при отсутствии суммарного продольного тока [1]. Что же касается условий Ньюкомба (3), то они не могут в общем случае выполняться автоматически при произвольном распределении давления, принимаемом за нулевое приближение. Если правые части этих уравнений имеют резонансные по отношению к вакуумным магнитным поверхностям гармоники, то условие разрешимости уравнения (20) требует наличия у функции h нулей на поверхностях $\Phi_0 = \Phi_{0mn}$, а, следовательно, ∇p должен иметь на тех же поверхностях нули второго порядка:

$$p(\Phi_0) = \int p_0(\Phi_0) \prod_{m,n} [m\mu(\Phi_0) - n]^2 d\Phi_0; \quad (21)$$

$p_0(\Phi_0)$ – аналитическая функция, не имеющая особенностей в точках $m\mu(\Phi_0) - n = 0$.

Отсюда можно заключить, что поверхности $p = \text{const}$ при наличии резонансных возмущений должны иметь волокнистую структуру. Для нахождения эффектов, связанных с наличием "волокон", обусловленных внешними возмущениями, необходимо решать полную систему уравнений, описывающих поведение плазмы, включая обобщенный закон Ома.

Резюме. Решение задач о равновесных тороидальных магнитных конфигурациях методом возмущений приводит к уравнению типа (10). Формальное решение (11)

этого уравнения содержит "малые знаменатели", аналогично решениям уравнений для возмущений в задачах классической механики [9, 10]. В рассматриваемом случае трудности, связанные с наличием малых знаменателей, можно обойти с помощью перенормировки (надлежащего выбора) невозмущенного решения, от которого зависит вид правой части уравнения (10). В настоящей работе предложен конкретный рецепт такой перенормировки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* // *Phys. Fluids*. 1958. Vol. 1. P. 265.
2. *Newcomb W.* // *Ibid.* 1959. Vol. 2. P. 362.
3. *Кадомыц Б.Б.* // *Журн. эксперим. и теорет. физики*. 1959. Т. 37. С. 1646.
4. *Hamada S.* // *Nucl. Fusion*. 1962. Vol. 1/2. P. 23.
5. *Greene J.M., Johnson J.L.* // *Phys. Fluids*. 1962. Vol. 5. P. 510.
6. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // *Докл. АН СССР*. 1964. Т. 158. С. 831.
7. *Соловьев Л.С.* // *Там же*. 1965. Т. 168. С. 76.
8. *Spitzer L.* // *Phys. Fluids*. 1958. Vol. 1. P. 253.
9. *Арнольд В.И.* // *Успехи мат. наук*. 1963. Т. 18. С. 91.
10. *Мозер Ю.* // *Математика*. 1962. Т. 6, вып. 5. С. 51.

ЗАМКНУТЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С МИНИМУМОМ В*

ВВЕДЕНИЕ

В работах Мерсье [1, 2] Фюрта и Розенблюта [3], Ленарда [4], Джонсона [5], Фюрта [6] приведены примеры конфигураций магнитного поля, удовлетворяющих условию наличия минимума на магнитной оси усредненного должным образом магнитного поля B . Это условие, являющееся критерием гидромагнитной устойчивости плазмы низкого давления, формулируется для конфигураций с непрокручивающимися силовыми линиями как требование убывания при переходе к наружным магнитным поверхностям функции [7]

$$U = \oint \frac{dl}{B}, \quad (1)$$

где интеграл берется вдоль силовой линии по периоду поля. Магнитные поверхности образуются линиями, для которых $U = \text{const}$.

Из теории равновесия плазмы в магнитном поле следует, что обобщением функции U на случай конфигураций магнитного поля с прокручивающимися силовыми линиями является производная объема V , ограниченного тороидальной магнитной поверхностью, по продольному магнитному потоку Φ внутри этой поверхности

$$U = \frac{\delta V}{\delta \Phi} = V'(\Phi). \quad (2)$$

Условие минимума B (максимума U) можно записать в виде

$$V''(\Phi) < 0. \quad (3)$$

* Совместно с В.Д. Шафрановым // *Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res.* 1966. Vol. 1. P. 171–190.

Выражение для $V''(\Phi)$, как мы увидим ниже, удобно для расчета не только в случае конфигураций с прокручивающимися силовыми линиями, но также и в случае конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, если их рассматривать как предельный случай конфигураций со слабым прокручиванием.

Следует иметь в виду, что критерий $V''(\Phi) < 0$ нельзя считать достаточным условием устойчивости, так как он получен для плазмы исчезающе малого давления в предположении, что магнитные поверхности заданы, и не касается вопроса их устойчивости относительно возмущений магнитного поля. Если форма магнитных поверхностей неустойчива относительно малых возмущений магнитного поля, то данная конфигурация прежде всего трудна для практического осуществления, так как требует повышенной точности в создании требуемых магнитных полей. Но даже и при достижении желаемой точности создания поля, неустойчивость магнитной конфигурации неизбежно проявится при наличии плазмы с не равным нулю давлением, так как токи в плазме приводят к определенному искажению магнитного поля. Поэтому условие (3) можно рассматривать в общем случае лишь как минимум требований, предъявляемых к конфигурациям магнитного поля, в которых предполагается создавать высокотемпературную плазму.

Целью настоящей работы является исследование конфигураций магнитного поля, удовлетворяющих этому минимуму требований и доступных практическому осуществлению. В отличие от работ [3–6] мы рассматриваем замкнутые тороидальные конфигурации, магнитная ось которых, по необходимости, обладает кривизной. Пример незамкнутой конфигурации с кривизной (конфигурации с винтовой симметрией) был рассмотрен Фюртом [6]. Из частного примера, однако, трудно делать заключения о том, от каких характеристик поля зависит знак и абсолютная величина второй производной объема по потоку. Как следует из наших расчетов, критерий устойчивости существенно зависит от кривизны магнитной оси. Наличие кривизны оси открывает ряд новых возможностей создания конфигураций с минимумом V .

Рассматриваемые нами конфигурации представляют собой в общем случае суперпозицию неоднородного на оси продольного магнитного поля $B_0(s)$ и мультипольных гармоник, зависящих от азимутального угла ω по закону $\cos m\omega$, $\sin m\omega$ с $m = 2, 3, \dots$. Если ось координатной системы выбрать на магнитной оси, то выражение для продольного потока Φ можно представить в виде разложения по степеням расстояния ρ от магнитной оси, начиная со второй. Для расчета $V''(\Phi)$ вблизи магнитной оси достаточно ограничиться учетом членов с ρ^2 и ρ^3 . Так как амплитуды мультипольных гармоник степенным образом зависят от ρ , то вклад в $V''(\Phi)$ дают гармоники с небольшим номером m , а именно, как будет видно из дальнейшего, лишь гармоники с $m = 2$ и $m = 3$. Беря различные комбинации этих гармоник, можно получить все возможные конфигурации, удовлетворяющие необходимому условию устойчивости $V''(\Phi) < 0$. Безразмерным параметром разложения по степеням ρ является отношение $2\pi r/\lambda$, где λ – минимальный продольный период магнитного поля. Поэтому полученные ниже формулы пригодны лишь для слабо неоднородных вдоль оси конфигураций.

Используемый нами метод расчета был развит в работах Мерсье [1, 2], где получено также и общее выражение для локального критерия устойчивости плазмы. Однако критерий Мерсье, полученный с учетом давления плазмы, записан в столь общей форме, что с его помощью трудно делать конкретные заключения об устойчивости той или иной конфигурации магнитного поля. При получении выражения для $V''(\Phi)$ мы с самого начала ограничиваемся вакуумными полями, что приводит к существенному упрощению как расчетов, так и выводов.

МЕТОД РАСЧЕТА

Интересующие нас магнитные конфигурации представляют собой систему тороидальных магнитных поверхностей. Прямой задачей является расчет магнитных поверхностей $\psi(r) = \text{const}$ по заданному магнитному полю $\mathbf{B}(r)$. Однако эта прямая задача в общем случае весьма сложна. Если не касаться вопроса об устойчивости магнитных поверхностей (т.е. о влиянии возмущений поля на форму магнитных поверхностей), то для наших целей достаточно решения обратной задачи – нахождения тех полей, которые нужны для создания заданной магнитной конфигурации.

В рамках такого подхода оказывается возможным также и частичное решение задачи об устойчивости конфигурации.

Итак, будем считать, что магнитная ось нашей конфигурации является заданной замкнутой кривой, обладающей кривизной $k(s)$ и кручением $\kappa(s)$, где s – длина дуги вдоль оси. Эту ось мы принимаем за ось координатной системы. В каждом нормальном к оси сечении вводятся полярные координаты ρ, ω . За координатные поверхности $\omega = \text{const}$ примем поверхности, проходящие через ось и ортогональные к поверхностям $s = \text{const}$ (рис. 1). Эти поверхности в дифференциальной геометрии называются поверхностными полосами кривизны [8]. Метрика получающейся ортогональной системы координат задается квадратом элемента длины (см. [1, 2, 9])

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + [1 - k(s)\rho \cos\theta]^2 ds^2, \quad \theta = \omega - \alpha(s), \quad (4)$$

где $\alpha(s)$ – угол, который составляет главная нормаль к оси v с поверхностью $\omega = 0$. Этот угол выражается интегралом от кручения оси:

$$\alpha = \int_0^s \kappa(s') ds'. \quad (5)$$

Уравнение магнитной поверхности в рассматриваемом нами приближении можно представить в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \omega, s) = B_0(s) \{ [a(s) + b(s) \cos 2u] \rho^2 + \\ + a(s) [\alpha_1(s) \cos u + \alpha_2(s) \sin u + \alpha_3(s) \cos 3u + \alpha_4(s) \sin 3u] \rho^3 \} = \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Члены, линейные по ρ , в этом выражении отсутствуют, так как точка $\rho = 0$, в согласии с нашим требованием, является эллиптической особой точкой $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = 0 \right)$

сечений магнитных поверхностей плоскостью $s = \text{const}$. Во втором приближении по ρ нормальные сечения магнитных поверхностей представляют собой эллипсы

$$\rho^2 (a + b \cos 2u) = \text{const} \quad (7)$$

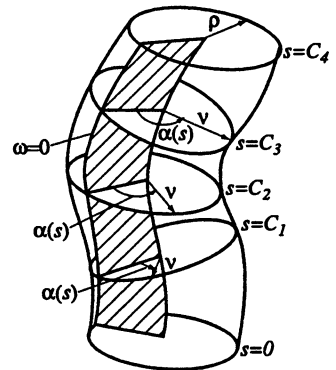
с эксцентриситетом

$$\varepsilon(s) = b(s) / a(s). \quad (8)$$

(Напомним, что отношение полуосей эллипса связано с эксцентриситетом ε соотношением $l_1/l_2 = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$.) В общем случае эти эллипсы вращаются при движении

Рис. 1. Координатные поверхности $\rho = \text{const}$, $\omega = 0$ и $s = \text{const}$

Угол главной нормали v с поверхностью $\omega = 0$ (заштрихованная поверхность) равен $\alpha(s) = \int_0^s \kappa(s') ds'$



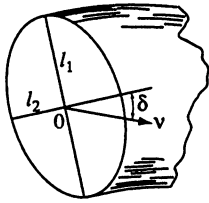


Рис. 2. Ориентация эллиптического сечения магнитной поверхности относительно главной нормали v к магнитной оси

вдоль оси s . Пусть малая ось эллипса составляет с главной нормалью к магнитной оси угол δ (рис. 2). Тогда

$$u = \omega - \alpha(s) + \delta(s), \quad (9)$$

причем $\delta(s)$ удовлетворяет условию

$$\delta(s + L) = \delta(s) + 2\pi n, \quad (10)$$

где L – полная длина магнитной оси, n – целое число поворотов эллипса вокруг магнитной оси.

Функция $\delta(s)$ определяется винтовой обмоткой стабилизирующего поля и, в частности, при "равномерной" намотке равна $\delta = \delta' s$, где $\delta' = 2\pi n/L = \text{const}$.

Входящие в выражение для $\psi(\rho, \omega, s)$ функции $a(s)$ и $b(s)$ связаны условием

$$a^2 - b^2 = c^2 = \text{const}, \quad (11)$$

так что их можно выразить через одну периодическую функцию $\eta(s)$. В случае $\epsilon < 1$ (эллипс), $c^2 > 0$, величины a и b можно представить в виде

$$a(s) = c \operatorname{ch} \eta(s) = \frac{c}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad (12)$$

$$b(s) = c \operatorname{sh} \eta(s) = \frac{\epsilon c}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (13)$$

Члены третьего приближения в выражении для ψ , вносящие существенный вклад в критерий устойчивости при наличии кривизны магнитной оси, несколько искажают магнитные поверхности и приводят, в частности, к появлению сепаратрисы, ограничивающей систему замкнутых тороидальных магнитных поверхностей (рис. 3).

Магнитное поле, необходимое для создания магнитной конфигурации (6), определяется уравнениями

$$\mathbf{B} = \nabla\varphi, \quad (14)$$

$$\nabla\varphi \nabla\psi = 0. \quad (15)$$

Скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Его разложение по степеням ρ записывается в виде

$$\varphi = \int_0^s B_0(s) ds + A(\omega, s)\rho^2 + B(\omega, s)\rho^3 + \dots, \quad (16)$$

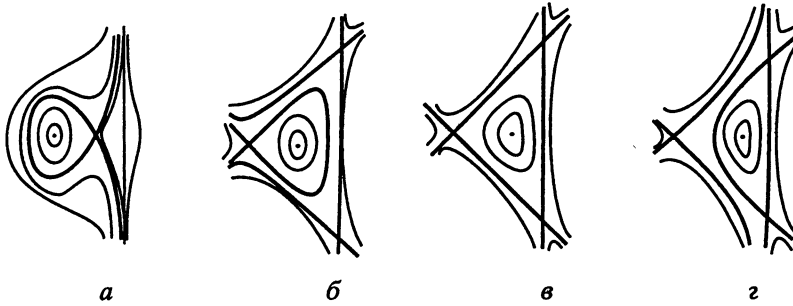


Рис. 3. Сечения магнитных поверхностей в третьем приближении по ρ
a – сепаратриса имеет одну особую точку; *б* – две особые точки; *в*, *г* – три особые точки

где функции $A(\omega, s)$ и $B(\omega, s)$ имеют следующую структуру:

$$A(\omega, s) = -\frac{B_0'}{4} + A_1(s) \sin 2u + A_2(s) \cos 2u, \quad (17)$$

$$B(\omega, s) = B_1(s) \cos u + B_2(s) \sin u + B_3(s) \cos 3u + B_4(s) \sin 3u. \quad (18)$$

Амплитуды полей второй гармоники A_1 и A_2 связаны с параметрами магнитных поверхностей соотношениями

$$A_1 = B_0 \frac{\epsilon}{2} u', \quad (19)$$

$$A_2 = -B_0 \eta' / 4. \quad (20)$$

Для связи амплитуд поля B_1, B_2, B_3, B_4 с параметрами поверхностей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ получаются более громоздкие уравнения, которые мы здесь не приводим. Отметим только, что эти уравнения при заданном втором приближении (т.е. при известных $\epsilon(s)$ и $\delta(s)$) позволяют однозначно решить не только обратную, но и прямую задачу – определение поправок третьего приближения к магнитным поверхностям по заданному полю. Уравнения второго приближения (19), (20) удобно использовать лишь для решения обратной задачи – определения поля, необходимого для создания заданных магнитных поверхностей. Для решения задачи о влиянии на форму магнитных поверхностей отклонений амплитуд второй гармоники поля $\Delta A_1, \Delta A_2$ от требуемых значений A_1, A_2 можно воспользоваться методом возмущений, линеаризовав уравнения (19), (20) по отклонениям $\Delta \eta, \Delta \delta, \Delta A_1, \Delta A_2$.

Как эта задача о возмущении магнитных поверхностей добавками к полю второй гармоники, так и задача о поправках третьего приближения, связанных с наличием поля первой и третьей гармоник, сводится к следующему уравнению для комплексной функции σ_m :

$$\{\sigma_m \exp[-imv(s)]\}' = F_m(s) \exp[-imv(s)]. \quad (21)$$

Здесь F_m – известная функция, связанная с амплитудами полей (например, при $m = 2$: $\sigma_2 = \Delta \eta - 2i \operatorname{sh} \eta \Delta \delta$, $F_2 = -\frac{4}{B_0} [\Delta A_2 + i \operatorname{ch} \eta \cdot \Delta A_1]$), штрихом обозначена производная по s . Через $v(s)$ обозначен следующий интеграл:

$$v(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \epsilon^2} u' ds. \quad (22)$$

Заметим, что средний угол прокручивания магнитных силовых линий относительно координатной поверхности $\omega = \text{const}$ вблизи оси определяется формулой

$$\iota = \oint (\sqrt{1 - \varepsilon^2 u' - \delta'}) ds, \quad (23)$$

так что с учетом соотношения (10) получаем

$$\iota = \nu(L) - 2\pi n. \quad (24)$$

Для решения уравнения (21) выделим в экспоненте линейную непериодическую фазу

$$\exp[-im\nu(s)] = \exp(-im\kappa_0 s) \exp\{-im[\nu(s) - \kappa_0 s]\}, \quad (25)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\nu(L)}{L} = \frac{\iota + 2\pi n}{L}, \quad (26)$$

и разложим периодическую функцию $F_m(s) \exp\{-im[\nu(s) - \kappa_0 s]\}$ в ряд Фурье:

$$F_m(s) \exp\{-im[\nu(s) - \kappa_0 s]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{ml} \exp\left(i \frac{2\pi}{L} ls\right). \quad (27)$$

$$F_{ml} = \frac{1}{L} \oint F_m(s) \exp\left\{im[\kappa_0 s - \nu(s)] - i \frac{2\pi}{L} ls\right\} ds. \quad (28)$$

Так как искомая функция $\sigma_m(s)$ должна быть периодической, ее также можно представить в виде аналогичного ряда Фурье. Определив из уравнения (21) коэффициенты разложения, получим решение [1, 2]

$$\sigma_m(s) = i \exp\{im[\nu(s) - \kappa_0 s]\} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{F_{ml}}{m\kappa_0 - \frac{2\pi}{L}l} \exp\left(i \frac{2\pi}{L} ls\right). \quad (29)$$

Обращение любого члена суммы в бесконечность означает отсутствие решения, т.е. неустойчивость данной конфигурации.

Из формулы (29) вытекает, что опасными для вакуумных магнитных поверхностей являются возмущения поля с гармониками, удовлетворяющими условию

$$m\kappa_0 - \frac{2\pi}{L}l = 0. \quad (30)$$

Следует заметить, однако, что появление резонансных знаменателей в выражении (29) является следствием применяемого метода разложения по степеням ρ . При наличии зависимости угла прокручивания от ρ (shear) резонансное воздействие возмущений поля проявляется в расщеплении магнитных поверхностей в окрестности замкнутых силовых линий [10]. В частности, в окрестности магнитной оси может появиться m -лепестковая розетка. Таким образом, хотя магнитные поверхности и претерпевают качественное изменение, так как появляются новые системы вложенных друг в друга поверхностей, величина их искажения стремится к нулю при стремлении к нулю возмущающего поля. Можно надеяться поэтому, что возмущения с большими номерами гармоник $m \gg 1$ легко сделать не опасными за счет уменьшения амплитуд возмущающих полей F_{ml} . Для того чтобы избежать искажений магнитных поверхностей стабилизирующими полями, необходимо добиваться условий, при которых равенство (30) не выполнялось бы по крайней мере для небольших чисел m и n .

**ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УДЕЛЬНОГО ОБЪЕМА $V'(\Phi)$
И УГЛА ПРОКРУЧИВАНИЯ $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$**

Для вычисления $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ достаточно знать выражения объема δV , поперечного потока $\delta\chi$ и продольного потока $\delta\Phi$, заключенных между двумя бесконечно близкими магнитными поверхностями:

$$\delta V = \oint ds \int dS(1 - k\rho \cos \theta) = \oint \delta S(1 - \langle k\rho \cos \theta \rangle), \quad (31)$$

$$\delta\Phi = \int B_s dS = \delta S \langle B_s \rangle, \quad (32)$$

$$\delta\chi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \nabla \theta dV = \frac{1}{2\pi} \oint ds \left[\left\langle \frac{B_\omega}{\rho} (1 - k\rho \cos \theta) \right\rangle - \langle B_s \rangle \alpha'(s) \right] \delta S. \quad (33)$$

Здесь интегрирование по dS производится по площади поперечного сечения δS между двумя соседними магнитными поверхностями. Угловые скобки означают усреднение по этой площади. Из записанных в такой форме выражений получаются следующие удобные для расчета формулы:

$$V'(\Phi) = \frac{\delta V}{\delta\Phi} = \oint ds \frac{1 - \langle k\rho \cos \theta \rangle}{\langle B_s \rangle}, \quad (34)$$

$$\iota(\Phi) = 2\pi \frac{\delta\chi}{\delta\Phi} = \oint ds \left[\frac{\langle (B_\omega/\rho)(1 - k\rho \cos \theta) \rangle}{\langle B_s \rangle} - \alpha'(s) \right]. \quad (35)$$

Формула (35) позволяет получить $\iota(\Phi)$ в виде разложения по степеням потока Φ . Нулевой член этого разложения дается формулой (23). Для получения линейного по Φ члена необходимо разложение скалярного потенциала ϕ и магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ до четвертого порядка по степеням ρ включительно.

Для получения $V'(\Phi)$ в линейном по Φ приближении достаточно знать ϕ и ψ в третьем приближении разложения по ρ . Расчет по формуле (34) приводит к следующему выражению удельного объема:

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{2} - \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} - \frac{\eta'^2}{4} - \varepsilon^2 (\delta' - \alpha')^2 - \right. \\ \left. - \varepsilon \left(\frac{k^2}{2} \cos 2\delta - \frac{\eta' B_0'}{B_0} \right) - k \left[\frac{(2 - \varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3}{1 + \varepsilon} \cos \delta + \frac{(2 + \varepsilon)\alpha_2 - 3\varepsilon\alpha_4}{1 - \varepsilon} \sin \delta \right] \right\}. \quad (36)$$

Штрихом здесь обозначена производная по дуге s . Используя полученное выражение, можно в принципе подобрать входящие в него параметры магнитных поверхностей так, чтобы выполнялось условие $V''(\Phi) < 0$, и затем найти соответствующие магнитные поля (заметим только, что среди функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ независимыми являются только две). Для практических целей больший интерес представляет проверка критерия $V''(\Phi) < 0$ при заданных конкретных полях. Эта задача в ряде случаев также может быть решена.

Знание выражения $V'(\Phi)$ в линейном по Φ приближении позволяет оценить допустимое для данной системы давление плазмы. Из теории гидродинамической устойчивости [11] следует, что функция $-V'(\Phi)$ играет роль потенциальной энергии для плазмы низкого давления. Критическое значение параметра $\beta = 8\pi\rho/B^2$, при

котором плазма является еще устойчивой, можно определить как величину, равную относительной глубине потенциальной ямы:

$$\beta_{кр} = -V'' \Phi / V'. \quad (37)$$

Из выражения (36) видно, что параметры третьего приближения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, входят только при наличии кривизны. Поэтому учет кривизны открывает дополнительные возможности создания конфигураций с минимумом магнитного поля. Кривизной можно пренебрегать лишь при сравнительно небольшом продольном периоде λ магнитного поля:

$$\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \gg \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2.$$

Здесь L – длина контура магнитной оси; в правой части неравенства стоит относительная модуляция магнитного поля (либо других параметров магнитной конфигурации).

В пренебрежении кривизной ($k = 0, \alpha' = 0$) критерий устойчивости имеет вид

$$V''(\Phi) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(\frac{3B_0'^2}{4B_0^2} + \frac{\eta'^2}{4} + \varepsilon^2 \delta'^2 - \varepsilon \frac{\eta' B_0'}{B_0} \right) < 0. \quad (38)$$

В подынтегральном выражении заведомо положительны все члены, кроме последнего. Поэтому стабилизация возможна только при одновременном изменении по s продольного поля и эксцентриситета. Случай $\delta' = 0$ был рассмотрен Фюртом и Розенблютом [3]. Учет влияния члена с $\delta' \neq 0$ произведен в работах Мерсье [1, 2] и Ленарда [4].

ЗАМЕЧАНИЕ О ЛОВУШКАХ С ГОФРИРОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В гофрированных ловушках с замкнутыми силовыми линиями магнитные поверхности определяются условием $\nabla\phi\nabla\psi = 0$ неоднозначно. Эта неоднозначность находит свое выражение в том, что функция $\eta(s)$ согласно уравнению (20) определяется при $u' = 0$ через амплитуду поля A_2 с точностью до константы:

$$\eta(s) = -4 \int_0^s \frac{A_2}{B_0} ds + \eta_0. \quad (39)$$

Предельный переход $u' \rightarrow 0$ в уравнениях второго приближения является нетривиальным и фактически не позволяет определить константу η_0 . Для однозначного выделения семейства истинных магнитных поверхностей следует использовать условие

$$U = \oint \frac{dl}{B} = \text{const}. \quad (40)$$

Расчет с помощью функции U приводит к тому же выражению (36) при $\delta' = \alpha' = 0$, но уже с определенным значением константы η_0 в выражении для $\eta(s)$, что соответствует выделению нужного семейства магнитных поверхностей.

Анализ критерия устойчивости показывает, что и при наличии кривизны необходимым условием стабилизации для таких систем является одновременное изменение вдоль оси продольного поля $B_0(s)$ и эксцентриситета $\varepsilon(s)$.

Поправки третьего приближения при известном втором приближении можно определять по общим формулам (29).

Для гофрированных конфигураций с замкнутыми силовыми линиями $\kappa_0 = 0$, и из формулы (29) видно, что при наличии однородного вдоль оси возмущения полей $F_{m0} \neq 0$ возмущение магнитных поверхностей обращается в бесконечность. Таким образом, гофрированные магнитные поверхности с замкнутыми силовыми линиями являются неустойчивыми и по этой причине представляются малоперспективными.

ОДНОРОДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

В конфигурациях с прокручивающимися силовыми линиями условие $V''(\Phi) < 0$ может быть удовлетворено и при постоянных B_0 и ε . Такие конфигурации мы будем называть однородными. Поскольку критерий устойчивости существенно зависит от поправок третьего приближения к ψ , мы остановимся на них более подробно. Необходимые параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{k}{4}(3 - \varepsilon)\cos\delta + X_1, & \alpha_2 &= \frac{k}{4}(3 + \varepsilon)\sin\delta + X_2, \\ \alpha_3 &= -\frac{k}{3}\varepsilon\cos\delta + \frac{2}{3}Q + X_3, & \alpha_4 &= -\frac{k}{3}\varepsilon\sin\delta + \frac{2}{3}P + X_4.\end{aligned}\quad (41)$$

Величины X_1, X_2, X_3, X_4 выражаются через комплексные функции σ_m ($m = 1, 3$), определяемые уравнением (21):

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{1}{4} \frac{e^{\eta/2}}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{Re}[(2 + \varepsilon)\sigma_1 - 3\varepsilon\sigma_3], \\ X_2 &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\eta/2}}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{Im}[(2 - \varepsilon)\sigma_1 - 3\varepsilon\sigma_3], \\ X_3 &= \frac{1}{4} \frac{e^{\eta/2}}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{Re}[\varepsilon\sigma_1 - (2 - \varepsilon)\sigma_3], \\ X_4 &= \frac{1}{4} \frac{e^{-\eta/2}}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{Im}[\varepsilon\sigma_1 - (2 + \varepsilon)\sigma_3].\end{aligned}\quad (42)$$

Входящие в правую часть уравнений (21) для σ_1 и σ_3 функции F_1 и F_3 выражаются формулами

$$F_1 = e^{-\eta/2}[(2 - \varepsilon)f_1 - 3\varepsilon f_3] + ie^{\eta/2}[(2 + \varepsilon)f_2 - 3\varepsilon f_4], \quad (43)$$

$$F_3 = e^{-\eta/2}[\varepsilon f_1 - (2 - \varepsilon)f_3] + ie^{\eta/2}[\varepsilon f_2 - (2 - \varepsilon)f_4],$$

где

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{3}{4}\varepsilon(k\cos\delta)' + \frac{2}{3}\varepsilon Q', & f_2 &= -\frac{3}{4}\varepsilon(k\sin\delta)' + \frac{2}{3}\varepsilon P', \\ f_3 &= \frac{7}{12}\varepsilon(k\cos\delta)', & f_4 &= \frac{7}{12}\varepsilon(k\sin\delta)'.\end{aligned}\quad (44)$$

Штрихом обозначена производная по s .

Комплексные функции σ_1 и σ_3 представляют собой следующие комбинации X_1, X_2, X_3, X_4 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= e^{-\eta/2}[(2 - \varepsilon)X_1 - 3\varepsilon X_3] + ie^{\eta/2}[(2 + \varepsilon)X_2 - 3\varepsilon X_4], \\ \sigma_3 &= e^{-\eta/2}[\varepsilon X_1 - (2 + \varepsilon)X_3] + ie^{\eta/2}[\varepsilon X_2 - (2 - \varepsilon)X_4].\end{aligned}\quad (45)$$

Как видно из формулы (36) в выражение для $V'(\Phi)$ входит лишь $\text{Re } \sigma_1$ и $\text{Im } \sigma_1$, так что для получения критерия устойчивости плазмы достаточно найти только σ_1 . Для нахождения магнитных поверхностей необходимо знать также и σ_3 .

Скалярный потенциал магнитного поля однородных конфигураций представляется в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (46)$$

где

$$\varphi_0 = B_0 s + B_0 \frac{\varepsilon}{2} u' \rho^2 \sin 2u - \frac{B_0}{9} \rho^3 \frac{\partial}{\partial s} [Q(s) \cos 3u + P(s) \sin 3u], \quad (47)$$

$$\varphi_1 = -\frac{B_0}{8} (k \cos \theta)' \rho^3 + \frac{B_0}{8} \varepsilon u' k \rho^3 \sin(u + \delta). \quad (48)$$

Потенциал φ_1 полностью определяется заданием магнитной оси и эксцентриситета ε . В потенциал φ_0 входят поля второй и третьей гармоник, которые можно задавать произвольно.

Мы будем рассматривать два типа однородных конфигураций – конфигурации, ось которых является замкнутой кривой, лежащей в плоскости (конфигурации, подобные рейстрековому стелларатору), и конфигурации с пространственной магнитной осью (подобные стелларатору в форме восьмерки).

Однородные конфигурации с круговой магнитной осью

Простейшей конфигурацией первого типа является конфигурация с круговой осью. Магнитные поверхности в такой системе образуются продольным полем при наложении поля винтовых обмоток. При этом магнитные поверхности прокручиваются вокруг круговой оси радиуса R (рис. 4). Примем скорость прокручивания постоянной:

$$\delta' = \frac{2\pi}{L} n = \text{const}. \quad (49)$$

В этом случае критерий устойчивости плазмы низкого давления имеет вид

$$V''(\Phi) = \frac{L}{\pi B_0^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\varepsilon^2 \delta'^2 - \frac{11}{2} k^2 + \frac{4k}{\varepsilon} (C_1 - \varepsilon C_2) \right]. \quad (50)$$

Требующееся для создания данной конфигурации магнитное поле описывается скалярным потенциалом

$$\begin{aligned} \varphi_0 = B_0 s + \frac{1}{2} B_0 \varepsilon \delta' \rho^2 \sin 2(\omega + \delta' s) + \\ + \frac{1}{3} B_0 \delta' \rho^3 [C_1 \sin(3\omega + 2\delta' s) + 2C_2 \sin(3\omega + 4\delta' s)]. \end{aligned} \quad (51)$$



Рис. 4. Винтовая магнитная поверхность эллиптического сечения с круговой магнитной осью

Поле второй гармоники представляет собой двухзаходное винтовое поле с периодом $2\pi R/n$. Поле третьей гармоники является суперпозицией двух трехзаходных винтовых полей, делающих, соответственно, $2n/3$ и $4n/3$ оборотов вокруг оси при обходе вдоль всей системы. От гармоник с другим числом обходов критерий устойчивости не зависит.

При отсутствии третьей гармоники, когда $C_1 = C_2 = 0$, поле (51) является полем двухзаходного стелларатора. Условие устойчивости в этом случае таково:

$$\varepsilon^2 < \frac{11}{2} \frac{k^2}{\delta'^2} = \frac{11}{2n^2}. \quad (52)$$

Стабилизация связана с конечной длиной системы (конечное n) и возможна, в принципе, также в прямой системе с "вмороженными" на торцах силовыми линиями.

Критическое для устойчивости значение параметра β в однородных системах с круговой осью согласно формулам (37), (50) определяется соотношением

$$\frac{\beta_{кр}}{k^2 \rho_0^2} = \frac{11/2 - \varepsilon^2 n^2 - 4(C_1 - \varepsilon C_2)/(k\varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad (53)$$

где ρ_0 – средний радиус сечения плазменного шнура, определяемый условием $\pi \rho_0^2 B_0 = \Phi$.

Эффективный радиус потенциальной ямы ρ_0 , от которого зависит ее глубина, ограничен сверху поперечным размером установки либо размером сепаратрисы. При $\varepsilon \rightarrow 0$ сепаратриса имеет вид, изображенный на рис. 3, причем $k\rho_s = 0,153$. Экстраполируя выражение для $V''(\Phi)$, справедливое лишь при $\rho \ll \rho_s$, на всю область, ограниченную сепаратрисой, и полагая для оценки $\rho_0 = \rho_s$, получаем при $C_1 = C_2 = 0$: $\beta_{кр} \approx 13\%$. Случай $\varepsilon = 0$ не является, однако, благоприятным с точки зрения устойчивости конфигурации относительно возмущений поля, поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ угол прокручивания силовых линий (23)

$$\iota = 2\pi n(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \approx \pi n \varepsilon^2 / 2$$

стремится к нулю. При конечном значении ε ($\varepsilon \sim 0,2-0,6$) значение $\beta_{кр}$ не превышает 1–2%. Наличие поля третьей гармоники позволяет удовлетворить условию $V''(\Phi) < 0$ при $\varepsilon^2 n^2 > 11/2$. Однако это поле приводит к еще большему уменьшению размеров сепаратрисы и, следовательно, к уменьшению значения $\beta_{кр}$.

Однородные конфигурации с пространственной магнитной осью

Рассмотрим теперь конфигурации, магнитная ось которых является пространственной кривой. Это конфигурации типа стелларатора, имеющего форму восьмерки. Без дополнительных стабилизирующих полей такие системы не удовлетворяют условию устойчивости.

При наличии одного только продольного поля $B_0 = \text{const}$ выражение для $V''(\Phi)$ имеет вид

$$V''(\Phi) = \frac{1}{\pi B_0^2} \oint k^2(s) ds. \quad (54)$$

Однако с помощью дополнительных магнитных полей тороидальные системы с пространственной осью можно стабилизировать.

Простейшей конфигурацией с пространственной осью является конфигурация, обладающая винтовой симметрией. В этом случае магнитная ось представляет собой винтовую линию, для которой кривизна k и кручение χ постоянны. Такая конфи-

гурация образуется, в частности, внутри соленоида, ось которого является винтовой линией. При наличии одного только продольного поля нормальные сечения магнитных поверхностей имеют вид окружностей. Для стабилизации плазмы в такой системе достаточно наложить поля второй и третьей гармоник, вращающиеся вместе с главной нормалью к оси системы.

Выражение для $V''(\Phi)$ имеет вид

$$V''(\Phi) = \frac{L}{\pi B_0^2 \sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{1-\epsilon^2} \left[1 + 3\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{4}(9 + 7\epsilon^2) \cos 2\delta \right] + \epsilon^2 \kappa^2 - 2k\epsilon \left(\frac{Q \cos \delta}{1+\epsilon} + \frac{P \sin \delta}{1-\epsilon} \right) \right\}. \quad (55)$$

Как видно из этой формулы, стабилизация возможна только при $\epsilon \neq 0$. Кроме того, требуется наличие поля третьей гармоники (Q или P должны быть отличными от нуля). При этом устойчивость может быть достигнута и при малом ϵ .

Требующееся для создания рассматриваемой конфигурации магнитное поле описывается скалярным потенциалом (при $\delta = 0$)

$$\Phi_0 = B_0 s + \frac{B_0}{2} \rho^2 \epsilon u' \sin 2u + \frac{B_0}{3} \rho^3 Q u' \sin 3u. \quad (56)$$

Стабилизирующее поле может быть создано токами, расположенными на поверхности $\rho = \rho_M$ с поверхностной плотностью i , определяемой из условия

$$\frac{4\pi}{c} i = B_\omega(\rho_M) = B_0 \rho_M \epsilon u' \cos 2u + B_0 \rho_M^2 Q u' \cos 3u. \quad (57)$$

Отсюда видно, что амплитуды полей второй и третьей гармоник имеют следующие порядки величин:

$$\frac{B_\omega^{(2)}}{B_0} = \epsilon \rho_M u' \sim \epsilon \frac{\rho_M}{L}, \quad (58)$$

$$\frac{B_\omega^{(3)}}{B_0} = \rho_M^2 Q u' \sim \frac{Q}{k} (k \rho_M) \epsilon \frac{\rho_M}{L}. \quad (59)$$

Критическое для устойчивости давление плазмы в оптимальном случае, когда ось эллипса ориентирована вдоль главной нормали к магнитной оси ($\delta = 0$), определяется выражением

$$\frac{\beta_{кр}}{k^2 \rho_0^2} = \frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \left[\frac{Q}{k} - \frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon) \frac{\kappa^2}{k^2} - \frac{4-5\epsilon-7\epsilon^2}{8\epsilon} \right]. \quad (60)$$

Входящий в выражение для $\beta_{кр}$ параметр $k^2 \rho_0^2 \equiv k^2 \Phi / (\pi B_0)$ ограничен сверху значением Φ_{\max} на сепаратрисе. В первом приближении поток Φ связан с функцией ψ соотношением $\Phi = \pi \psi / (a \sqrt{1-\epsilon^2})$. Экстраполируя эту зависимость до сепаратрисы, можно получить оценку максимального значения параметра $(k \rho_0)_{\max}$. Полученная таким образом зависимость $(k \rho_0)_{\max}$ от параметра Q/k при разных значениях ϵ изображена для случая $\kappa = k$ на рис. 5. Излом кривых при некотором значении Q^*/k соответствует перестройке сепаратрисы при $Q = Q^*$. При $Q < Q^*$ сепаратриса имеет одну особую точку (см. рис. 3, а), при $Q > Q^*$ – две особые точки (см. рис. 3, б), при $Q = Q^*$ – три особые точки (см. рис. 3, в).

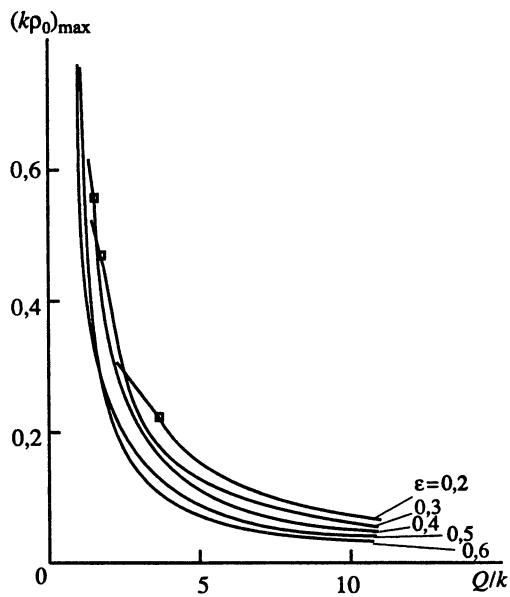


Рис. 5. Зависимость $(kp_0)_{\max}$ от параметра Q/k при разных значениях ϵ

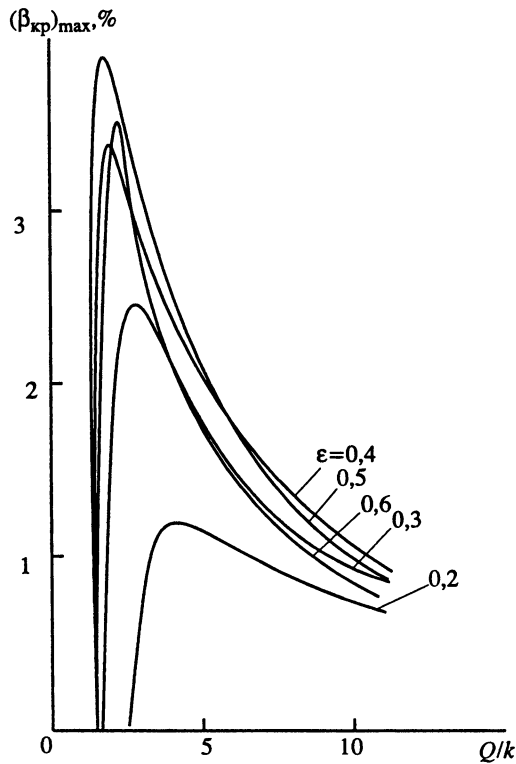


Рис. 6. Зависимость максимального значения параметра $\beta_{кр}$ от параметров ϵ и Q/k , характеризующих величину амплитуд второй и третьей гармоник стабилизирующего поля

На рис. 6 показана зависимость максимального значения $\beta_{кр}$, рассчитанного по формуле (60), экстраполированной на всю область, ограниченную сепаратрисой, от параметра Q/k , характеризующего амплитуду поля третьей гармоники, и параметра ε , характеризующего амплитуду поля второй гармоники. Из графиков видно, что оптимальными являются значения $\varepsilon = 0,4$, $Q/k = 2$, при которых получается $\beta_{кр} \approx 3\%$. Амплитуды полей второй и третьей гармоник в рассматриваемом случае $\kappa = k$ составляют при $k r_M = 0,2$ соответственно $B_{\omega}^{(2)} / B_0 = 8\%$ и $B_{\omega}^{(3)} / B_0 = 8\%$ от основного продольного магнитного поля.

Заметим, что критическое значение параметра β в рассматриваемой системе, определяемое из условий равновесия, составляет $\beta \sim 8\%$. Таким образом, в системах с пространственной осью условия равновесия и устойчивости оказываются согласующимися.

Рассмотренная конфигурация не является замкнутой. Однако основные выводы о возможности стабилизации с помощью второй и третьей гармоник поля сохраняются и для подобных замкнутых систем. Типичным представителем замкнутой конфигурации с пространственной осью является конфигурация поля в соленоиде, который является винтовой линией, обвивающей тор (рис. 7). В частности, при двух обходах оси вокруг тора мы получим конфигурацию, подобную "восьмерке" Спитцера. При большом числе обходов $N \gg 1$ такая система мало отличается от рассмотренной выше системы с винтовой симметрией. Различие состоит в том, что теперь кривизна и кручение оси слегка промодулированы по длине:

$$k = k_0 + k_1 \cos \frac{2\pi}{L} Ns, \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \cos \frac{2\pi}{L} Ns,$$

причем $k_1 \sim k_0 a/R$, $\kappa_1 \sim k_0 a/R$, где a и R – малый и большой радиусы воображаемого тора, вокруг которого обвивается магнитная ось.

Поправка к $V''(\Phi)$ в формуле (55) при $\varepsilon \ll 1$ имеет вид:

$$\Delta V''(\Phi) = \frac{3\varepsilon L}{4\varepsilon B_0^2} \left(\frac{2\pi N}{L} \right)^2 \frac{k_1^2 - k_0^2 \delta_1^2}{\left(\frac{2\pi}{L} N \right)^2 - \kappa_0^2},$$

где $\delta_1 = \frac{L}{2\pi N} \kappa_1$. Здесь принято, что $u = -\kappa_0 s$, т.е. витки стабилизирующей обмотки составляют постоянный угол с магнитной осью.

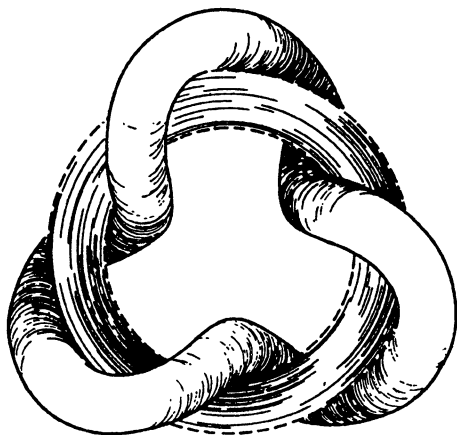


Рис. 7. Замкнутая конфигурация поля в соленоиде

Наличие в этой формуле "резонансного" знаменателя связано с наличием возмущений поля, вызванных модуляцией кривизны и кручения, в соответствии с общими выводами (29). В рассматриваемом случае этот знаменатель в нуль не обращается, и поправка оказывается всегда малой.

Таким образом, все выводы, полученные для конфигурации с винтовой симметрией, сохраняют силу и для замкнутых конфигураций с $N \gg 1$. Для систем типа "восьмерки" ($N = 2$) приведенные данные можно рассматривать как оценки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана возможность создания сравнительно простыми средствами замкнутых конфигураций с "минимумом B ". Наиболее перспективными представляются системы с пространственной магнитной осью. Для создания минимума B в таких системах достаточно на основную конфигурацию, создаваемую продольным магнитным полем, наложить стабилизирующее поперечное магнитное поле, содержащее вторую и третью гармоники, амплитуда которых имеет порядок 10% от основного продольного поля. Преимуществом этих систем по сравнению с системами с непрокручивающимися силовыми линиями является устойчивость магнитных поверхностей, обусловленная наличием сдвига силовых линий. В отличие от конфигураций типа стелларатора (двух- или трехзаходного), свергнутого в тор, в этих системах условия устойчивости плазмы и условия устойчивости магнитных поверхностей не являются противоречивыми требованиями. Это связано с тем, что устойчивые магнитные поверхности в конфигурациях с пространственной магнитной осью существуют независимо от наличия стабилизирующих полей.

В настоящей работе $V(\Phi)$ вычислена в линейном по Φ приближении. Однако приведенные выше формулы для функций $\phi(r)$ и $\psi(r)$ позволяют численно вычислить интегралы, необходимые для определения $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$, вплоть до сепаратрисы. При этом такой численный расчет может быть произведен для произвольной пространственной магнитной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Nucl. Fision. 1963. Vol. 3. P. 89.
2. Mercier C. // Ibid. 1964. Vol. 4. P. 213.
3. Furth H.P., Rosenbluth M.N. // Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. P. 764.
4. Lenard A. // Ibid. P. 1875.
5. Johnson J.L. // Ibid. P. 2015.
6. Furth H.P. // Private communication. 1964.
7. Кадомцев Б.Б. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132.
8. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.: ОНТИ-НКГБ, 1935.
9. Шафранов В.Д. // Ядер. синтез. 1964. Т. 4. С. 114.
10. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 3.
11. Кадомцев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 1646.

СПИРАЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С МИНИМУМОМ В*

В работе [1] приведен пример прямого периодического поля с минимумом \bar{B} , т.е. поля, у которого удельный объем $V'(\Phi) = \oint \frac{dl}{B}$ на оси системы максимален. Как показал Фюрт [2], обладать минимумом \bar{B} может и поле, имеющее винтовую симметрию. Магнитные поверхности такого поля представляют собой вложенные друг в друга винтовые магнитные трубки постоянного поперечного сечения. В настоящей работе рассмотрены магнитные конфигурации, обладающие винтовой симметрией.

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Безвихревое магнитное поле \mathbf{B} , обладающее винтовой симметрией, может быть описано как скалярным потенциалом $\mathbf{B} = \nabla \Phi_m$, так и функцией потока ψ . В цилиндрической системе координат r, Φ, z винтовое поле зависит от двух переменных $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \theta)$, $\theta = \Phi - \alpha z$, где $\alpha = 2\pi/L$, L – шаг винта. Общее выражение для скалярного потенциала винтового поля имеет вид

$$\Phi_m = B_{z0}z - A\Phi + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\alpha nr) \sin n\theta, \quad (1)$$

где Z_n – бесселевы функции: $Z_n(x) = a_n I_n(x) + b_n K_n(x)$. Такое поле представляет собой суперпозицию однородного поля B_{z0} , параллельного оси z , поля нити с током, натянутой вдоль оси z , и поля винтовых обмоток, расположенных на цилиндрических поверхностях $r = R_1$ и $r = R_2$, т.е. рассматривается случай, когда $R_1 < r < R_2$.

Функция потока ψ , являющаяся комбинацией компонент векторного потенциала $\psi = A_z + \alpha r A_\Phi$, удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{2\alpha r^2}{\beta^2} I, \quad (2)$$

где $\beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2$, причем в рассматриваемом случае безвихревого поля $I \equiv B_z + \alpha r B_\Phi = \text{const}$. Компоненты поля \mathbf{B} выражаются через ψ :

$$r B_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \alpha r B_z - B_\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3)$$

При известном магнитном поле $\mathbf{B}(r, \theta)$ функция $\psi(r, \theta)$ может быть определена интегрированием по r при фиксированном θ : $\psi = \int_0^r (\alpha r B_z - B_\Phi) dr$. Функция ψ , соответствующая полю (1), имеет вид

$$\psi = B_{z0} \frac{\alpha r^2}{2} + A \ln r - r \sum_{n=1}^{\infty} Z'_n(\alpha nr) \cos n\theta. \quad (4)$$

Таким образом, получены точные выражения для поля и магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ в цилиндрической системе координат. Выведем приближенные аналитические выражения для удельного объема и среднего угла прокручивания силовых

* Совместно с Н.М. Зуевой // Атом. энергия. 1966. Т. 20. С. 396–400.

линий в окрестности оси винтовой магнитной трубки, а затем точные интегральные выражения для этих величин, пригодные для численного расчета.

Отметим, что тангенс угла винтовой линии с осью z равен αr , а компоненты поля (параллельная винтовой линии $\theta = \text{const}$ и перпендикулярная ей и радиусу-вектору r) соответственно равны $B_{\parallel} = I/\sqrt{\beta}$, $B_{\perp} = \partial\psi/\partial r\sqrt{\beta}$. Магнитной осью является винтовая линия, шаг которой совпадает с шагом поля L .

УДЕЛЬНЫЙ ОБЪЕМ МАГНИТНОЙ ТРУБКИ

Пусть в сечении $z = \text{const}$ магнитные поверхности представляются замкнутыми линиями $\psi(\rho, \vartheta, z) = \text{const}$, окружающими точку $\rho = 0$, сдвинутую относительно оси z на некоторое расстояние r_0 . Продольный магнитный поток $\delta\Phi$, проходящий между двумя соседними магнитными поверхностями, равен

$$\delta\Phi = \int B_z dS \equiv \bar{B}_z \delta S, \quad (5)$$

где интегрирование проводится на площади δS сечения $z = \text{const}$ (рис. 1). Объем соответствующего слоя определяется интегрированием по z :

$$\delta V = \int \delta S dz = \delta\Phi \int \frac{dz}{B_z}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что удельный объем $V'(\Phi)$ можно представить в виде

$$V'(\Phi) = \int \frac{dz}{B_z}, \quad (7)$$

где

$$\bar{B}_z = \frac{1}{\delta S} \int B_z dS \quad (8)$$

представляет собой среднее значение B_z по площади δS . Поскольку элемент площади δS равен $dS = \rho \delta\rho d\vartheta = \delta\psi \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}$, то, приняв $B_z = B_0 + B_1$, где $B_0 = \text{const}$ – аксиальное поле в точке $\rho = 0$, получим

$$\delta S = \delta\psi \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}, \quad (9)$$

$$\bar{B}_z = \frac{\delta\psi}{\delta S} \int_0^{2\pi} B_z \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho} = B_0 + \frac{\delta\psi}{\delta S} \int_0^{2\pi} B_1 \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}, \quad (10)$$

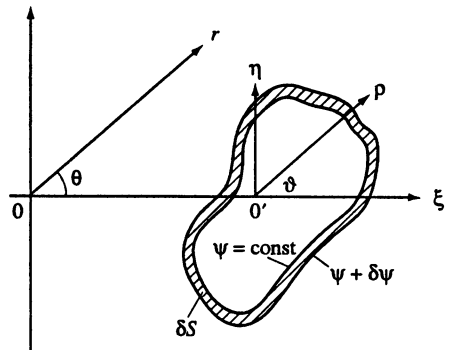
причем для магнитных поверхностей, обладающих винтовой симметрией, удельный объем

$$V'(\Phi) = L/\bar{B}_z, \quad (11)$$

где L – шаг винта, отсчитываемый вдоль оси z .

Для приближенного вычисления $V'(\Phi)$ представим B_z и ψ в окрестности магнитной оси $\rho = 0$ в виде рядов по $\xi = \rho \cos\vartheta$ и $\eta = \rho \sin\vartheta$ и ограничимся при этом случаем, когда магнит-

Рис. 1. Сечение двух близких магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$



ные поверхности симметричны относительно оси ξ :

$$B_z = B_0 + b_0\xi + b_1\xi^2 + b_2\eta^2 + \dots, \quad (12)$$

$$\psi = \psi_1\xi^2 + \psi_2\eta^2 + \psi_3\xi^3 + \psi_4\xi\eta^2 + \dots. \quad (13)$$

В полярных координатах ρ , ϑ эти разложения примут вид

$$B_z = B_0 + b_0\rho \cos \vartheta + (b_1 \cos^2 \vartheta + b_2 \sin^2 \vartheta)\rho^2 + \dots$$

$$\dots \equiv B_0 + h_1(\vartheta)\rho + h_2(\vartheta)\rho^2 + \dots, \quad (14)$$

$$\psi = (\psi_1 \cos^2 \vartheta + \psi_2 \sin^2 \vartheta)\rho^2 + (\psi_3 \cos^3 \vartheta +$$

$$+ \psi_4 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta)\rho^3 + \dots \equiv f_1(\vartheta)\rho^2 + f_2(\vartheta)\rho^3 + \dots. \quad (15)$$

С точностью до членов порядка ρ^3 получим $\rho \approx \frac{\psi^{1/2}}{f_1^{1/2}} - \frac{f_2\psi}{2f_1^2}$. Отсюда для \bar{B}_z найдем выражение, справедливое в окрестности магнитной оси:

$$\bar{B}_z = B_0 + \psi \frac{\delta\psi}{\delta S} \int_0^{2\pi} \left(\frac{h_2}{2f_1^2} - \frac{h_1 f_2}{f_1^3} \right) d\vartheta, \quad (16)$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta \psi} \approx \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{f_1(\vartheta)} = \frac{\pi}{\sqrt{\psi_1 \psi_2}}. \quad (17)$$

Значение $V''(\Phi)$ можно определить из равенства $V'(\Phi) \approx \frac{L}{B_0} + V''(\Phi) \frac{\delta\Phi}{\delta\psi} \psi$. Таким образом,

$$V''(\Phi) = -\frac{L}{B_0^3} \left(\frac{\delta\psi}{\delta S} \right)^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{h_2}{2f_1^2} - \frac{h_1 f_2}{f_1^3} \right) d\vartheta. \quad (18)$$

Из вычислений входящих в это выражение интегралов получим

$$V''(\Phi) = -\frac{h}{B_0^3} \left(\frac{\delta\psi}{\delta S} \right)^2 \frac{\pi\psi_2}{4(\psi_1\psi_2)^{3/2}} \times$$

$$\times [2\psi_1(b_1\psi_2 - b_2\psi_1) - b_0(3\psi_2\psi_3 + \psi_1\psi_4)]. \quad (19)$$

Местоположение магнитной оси, или, иными словами, особой точки эллиптического типа семейства линий $\psi = \text{const}$, $z = \text{const}$ определяется уравнениями $\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0$.

Коэффициенты разложений (12), (13) не являются произвольными. Для определения связей между ними используем уравнение (2). Координаты ξ и η связаны с r и θ соотношениями (см. рис. 1)

$$\xi = \rho \cos \vartheta = r \cos \theta - r_0, \quad (20)$$

$$\eta = \rho \sin \vartheta = r \sin \theta. \quad (21)$$

Разлагая B_z и ψ по степеням $r - r_0$ и θ в окрестности магнитной оси O' и используя равенство $B_z = \frac{I}{\beta} + \frac{\alpha r \psi'}{\beta}$ и уравнение (2), находим связь производных, входящих в

разложения B_z и ψ :

$$B_z' = -\frac{\alpha\ddot{\psi}}{r}; \quad B_z'' = \frac{\alpha}{r} \left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \ddot{\psi}' \right); \quad \ddot{B}_z = \frac{\alpha r}{\beta} \ddot{\psi}';$$

$$\psi''' = -\frac{\psi''}{r} + \frac{4-2\beta}{r^3} \ddot{\psi} - \frac{\beta}{r^2} \ddot{\psi}'; \quad (22)$$

$$B_0 = \frac{\beta}{2\alpha} \left(\psi'' + \frac{\ddot{\psi}}{r^2} \right) = \frac{B_{\parallel}}{\sqrt{\beta}}. \quad (23)$$

Здесь B_{\parallel} – значение поля на магнитной оси, а штрихами и точками обозначены частные производные по r и θ в точке O' , где $\psi' = \dot{\psi} = 0$, $r = r_0$. Таким образом, разложения B_z и ψ содержат всего три свободных параметра, в качестве которых можно выбрать, например, $\ddot{\psi}, \psi'', \ddot{\psi}'$.

Подставив в эти разложения $r - r_0 \approx \xi - \eta^2/(2r_0)$, $\theta \approx \eta/r_0 - \xi\eta/r_0^2$ и опустив для краткости индекс у r_0 , получим

$$B_z = B_0 - \frac{\alpha\ddot{\psi}}{r} \xi + \frac{\alpha}{2r} \left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \ddot{\psi}' \right) \xi^2 - \frac{\alpha}{2r} \left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \frac{\ddot{\psi}'}{\beta} \right) \eta^2 + \dots, \quad (24)$$

$$\psi = \frac{\psi''}{2} \xi^2 + \frac{\ddot{\psi}}{2r^2} \eta^2 - \frac{\xi^3}{6} \left(\frac{\psi''}{r} - \frac{4-2\beta}{r^3} + \frac{\beta\ddot{\psi}'}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi''}{r} - \frac{2\ddot{\psi}}{r^3} + \frac{\ddot{\psi}'}{r^2} \right) \xi \eta^2 + \dots \quad (25)$$

Используя эти выражения, можно написать формулу для $V''(\Phi)$ через независимые производные $\ddot{\psi}, \psi'', \ddot{\psi}'$, взятые в точке $\rho = 0$:

$$V''(\Phi) = -\frac{\ddot{\psi}}{2B_0^3(\psi''\ddot{\psi})^{3/2}} \left\{ -\frac{4\alpha^2\ddot{\psi}^3}{r^3} - \left[\frac{\ddot{\psi}'}{\beta} \left(\psi'' - \frac{\beta\ddot{\psi}}{r^2} \right) - \frac{2\ddot{\psi}^2}{r^3} \right] \left(\psi'' - \frac{\beta\ddot{\psi}}{r^2} \right) \right\}. \quad (26)$$

В окрестности магнитной оси винтовые трубки имеют эллиптические сечения, причем в плоскости, перпендикулярной к магнитной оси, отношение полуосей эллипса равно

$$\frac{b_{\perp}}{a_{\perp}} = \left(\frac{r^2\psi''}{\beta\ddot{\psi}} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

Формулу для $V''(\Phi)$ удобно выразить через величину ε :

$$\varepsilon = \frac{b_{\perp}^2 - a_{\perp}^2}{b_{\perp}^2 + a_{\perp}^2} = \frac{\psi'' - \beta\ddot{\psi}/r^2}{\psi'' + \beta\ddot{\psi}/r^2}, \quad (28)$$

при этом она принимает вид

$$V''(\Phi) = \frac{2\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}}{B_{\parallel}^2\beta^{3/2}(1+\varepsilon)^2} \left[\alpha^2 r^2 (1-\varepsilon) - \left(\frac{\beta r \ddot{\psi}'}{\ddot{\psi}} - 1 + \varepsilon \right) \varepsilon \right]. \quad (29)$$

Поскольку первый член в квадратных скобках всегда положителен ($|\varepsilon| < 1$), то в случае, когда нормальные сечения магнитной трубки круглые ($\varepsilon = 0$), величина $V''(\Phi) > 0$.

Для эллиптического нормального сечения ($\varepsilon \neq 0$) величина $V''(\Phi)$ может быть отрицательной.

СРЕДНИЙ УГОЛ ПРОКРУЧИВАНИЯ $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$

Для вычисления $\chi'(\Phi)$ воспользуемся формулой $\Phi - \chi = \frac{2\pi}{\alpha}\psi$ [3], связывающей продольный поток Φ и азимутальный поток χ с функцией ψ в случае винтовой симметрии. Тогда получим

$$\chi'(\Phi) = 1 - \frac{2\pi}{\alpha}\psi'(\Phi). \quad (30)$$

Если ограничиться лишь нулевым приближением в разложении $\chi'(\Phi)$ по степеням Φ , то согласно выражениям (5), (9) получим

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} \approx B_0 \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}; \quad (31)$$

тогда аналогично предыдущему находим

$$\chi'(\Phi) = 1 - \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{\beta}}. \quad (32)$$

Таким образом, в окрестности магнитной оси (при $\rho \rightarrow 0$) средний угол прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$ полностью определяется эксцентриситетом эллиптического сечения магнитной трубки и углом наклона винтовой магнитной оси к оси з цилиндра, на который навита магнитная ось.

ТОЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $V'(\Phi)$ И ι

В случае, когда винтовое магнитное поле содержит только одну n -ю гармонику, т.е. в цилиндрической системе координат скалярный потенциал имеет вид

$$\Phi_m = z - A\varphi + BZ_n(nr) \sin n\theta \quad (\theta = \varphi - z), \quad (33)$$

можно в явном виде написать интегралы для $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$. В выражении (33) продольное однородное поле B_{z0} принято равным единице, а в качестве единицы длины выбрана величина $1/\alpha = L/(2\pi)$. Потенциал $A\varphi$ соответствует полю нити с током, натянутой вдоль оси z : $B_\varphi = -A/r$. Последний член в выражении (33) описывает n -заходное винтовое поле $Z_n(nr) = a_n I_n(nr) + b_n K_n(nr)$.

Функция потока ψ , соответствующая потенциалу (33), имеет вид

$$\psi = \frac{r^2}{2} + A \ln r - BrZ'_n(nr) \cos n\theta. \quad (34)$$

Если обозначить $S(\psi)$ площадь нормального к оси z сечения магнитной поверхности, то для $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$ мы можем написать выражения

$$S'(\psi) = \int \frac{rdr}{\partial\psi/\partial\theta}, \quad \Phi'(\psi) = \int B_z \frac{rdr}{\partial\psi/\partial\theta}. \quad (35)$$

Величины $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ выразятся через $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$ при помощи формул

$$V'(\Phi) = 2\pi \frac{S'(\psi)}{\Phi'(\psi)}, \quad (36)$$

$$\chi'(\Phi) = 1 - \frac{2\pi}{\Phi'(\psi)}. \quad (37)$$

Осевое поле $B_z = 1 - nB Z_n(nr) \cos n\theta$. Введем обозначения $F(r) = r^2/2 - A \ln r$, $f(r) = BrZ'_n(nr)$ и выразим $\partial\psi/\partial\theta$ в виде явной функции от r :

$$\psi = F - f \cos n\theta, \quad \partial\psi/\partial\theta = nf \sin n\theta = n\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}.$$

Если подставить эти соотношения в выражения (35), то получим искомые формулы для $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$:

$$S'(\psi) = \frac{2}{n} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r dr}{\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}}, \quad (38)$$

$$\Phi'(\psi) = S'(\psi) + 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Z_n(nr)(\psi - F) dr}{Z'_n(nr)\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}}. \quad (39)$$

В этих выражениях интегрирование проводится по r от r_{\min} до r_{\max} , обращающих в нуль подкоренное выражение. Вычислив эти интегралы, получим точные выражения для $V'(\Phi)$ и $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$ в функции от ψ .

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В качестве примеров были рассмотрены магнитные поверхности, образуемые полями:

$$1) \quad \phi_m = z - A\phi + BI_1(r) \sin \theta, \quad (40)$$

$$2) \quad \phi_m = z - A\phi + BK_1(r) \sin \theta. \quad (41)$$

Винтовое поле в первом примере создается однозаходной токовой обмоткой на цилиндре $r = R_2$ (рис. 2–4), а на втором примере – на цилиндре $r = R_1$ (рис. 5). Радиус

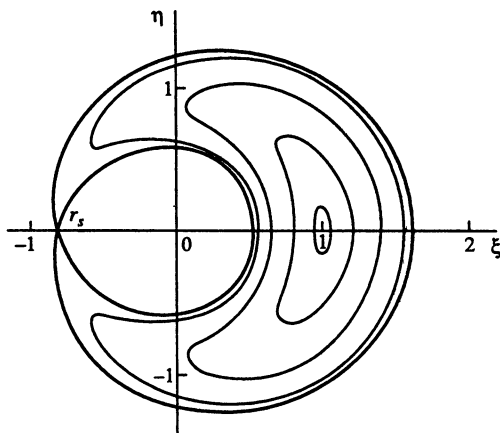
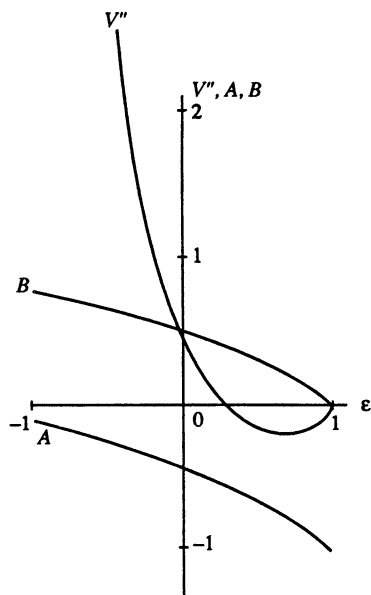


Рис. 2. Величины V'' , A и B как функции от параметра ϵ , характеризующего эксцентриситет нормальных сечений магнитных поверхностей в случае внешней токовой обмотки

Рис. 3. Поперечное сечение магнитных поверхностей в случае внешнего расположения винтовой токовой обмотки (40) при $\epsilon = 0,7$

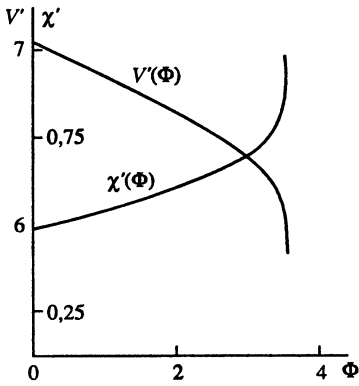


Рис. 4. Величины V' и χ' как функции продольного потока Φ в случае внешней токовой обмотки

центра винтовой магнитной трубки r_0 принят равным единице, что соответствует кривизне k и кручению κ магнитной оси $k = \alpha^2 r / \beta = 1/2$, $\kappa = \alpha / \beta = 1/2$.

На рис. 2 приведены графики $V''(\Phi)$, A и B как функций от ε . Значения V'' были рассчитаны по формулам (29), где $\frac{r\ddot{\psi}'}{\ddot{\psi}} = \frac{n\beta Z_n(n\alpha r)}{\alpha r Z_n'(n\alpha r)}$. Величины A и B

определены из уравнения (28) и условия $\psi''(1, 0) = 0$. Область отрицательных $V''(\Phi)$ лежит при $\varepsilon > 0$. Минимум V'' соответствует $\varepsilon = 0,7$. Для этого случая были построены магнитные поверхности, сечения которых плоскостью $z = 0$ приведены на рис. 3.

Точные значения $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$, рассчитанные численно по формулам (35) и (36) вплоть до сепаратрисы, показаны на рис. 4. Величины V' и χ' на магнитной оси ($r = 1$) равны

$$V'(\Phi) = \frac{2\pi}{B_0}; \quad \chi'(\Phi) = 1 - \frac{\sqrt{\ddot{\psi}\psi''}}{B_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\beta}}, \quad (42)$$

а на сепаратрисе

$$V'(\Phi) = \frac{2\pi}{B_S}, \quad \chi'(\Phi) = 1, \quad (43)$$

так как $\Phi'(\psi) \rightarrow \infty$, $S'(\psi) \rightarrow \infty$ и значение $V'(\Phi)$ определяется полем B_S в бесконечно малой окрестности ребра сепаратрисы (см. рис. 3, окрестность точки r_S).

На рис. 6–8 приведены соответствующие результаты для второго примера (41), причем магнитные поверхности были построены для случая $\varepsilon = -0,7$.

В заключение приведем общие для винтовой симметрии аналитические выражения для удельных объемов на магнитной оси и сепаратрисе. Поскольку среднее значение B_z на сепаратрисе определяется только окрестностью ребер сепаратрисы, то

$$\bar{B}_z = \frac{1}{\delta S} \int B_z dS = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_{Sk}, \quad (44)$$

где суммирование проводится по значениям B_z на ребрах сепаратрисы. Учитывая равенство $B_z = I / \beta$ в особых точках ($\psi' = 0$), получаем для $V'(\Phi) = L / \bar{B}_z$:

$$V'_S = \frac{nL}{\sum_{k=1}^n B_{Sk}} = \frac{nL}{I \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_{Sk}}}, \quad (45)$$

$$V'_0 = \frac{L}{B_0} = \frac{L\beta_0}{I}. \quad (46)$$

В рассмотренных выше случаях, когда имеется лишь одно ребро сепаратрисы

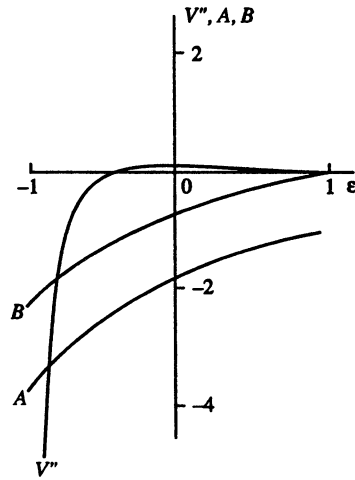
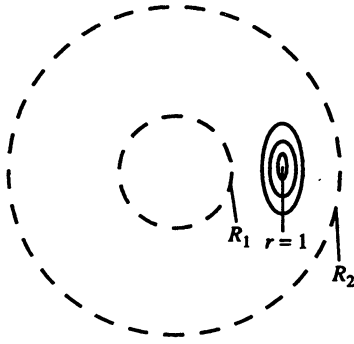


Рис. 5. Расположение замкнутых магнитных поверхностей с осью $r = 1$ между винтовыми токовыми обмотками на цилиндрах $r = R_1$ и $r = R_2$

Рис. 6. Величины V'' , A и B как функции продольного потока ϵ в случае внутренней токовой обмотки (41)

($n = 1$), отношение значений $V'(\Phi)$ на сепаратрисе и магнитной оси равно

$$\frac{V'_S}{V'_0} = \frac{1 + \alpha^2 r_S^2}{1 + \alpha^2 r_0^2}. \quad (47)$$

Отсюда видно, что магнитная конфигурация имеет область минимального \bar{B} (по крайней мере вблизи сепаратрисы), если расстояние от оси винтовых обмоток до ребра сепаратрисы r_S меньше расстояния до магнитной оси r_0 , т.е. во всех случаях,

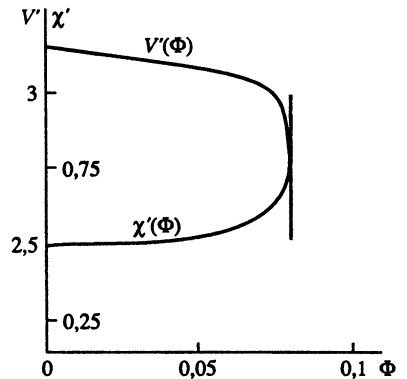
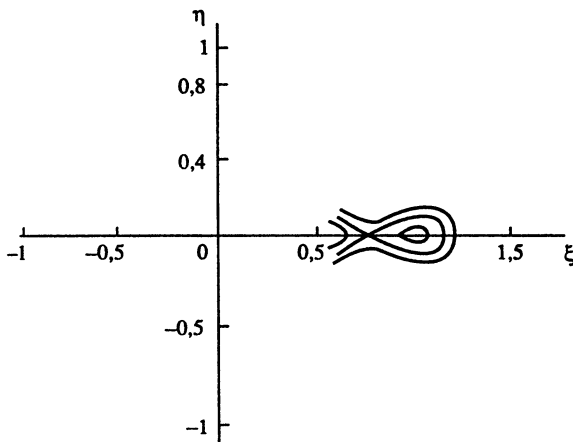


Рис. 7. Поперечные сечения магнитных поверхностей в случае внутреннего расположения токовой обмотки (41)

Рис. 8. Величины V' и χ' в функции от Φ в случае внутренней токовой обмотки (41)

когда ребро сепаратрисы находится со стороны оси спиральной магнитной конфигурации. При этом в окрестности магнитной оси может быть как минимум, так и максимум \bar{B} .

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что возможность осуществления магнитной конфигурации описанного типа, имеющей минимум \bar{B} в окрестности магнитной оси, связана с пространственностью магнитной оси и эллиптичностью нормальных сечений магнитных поверхностей ($\epsilon \neq 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Furth H., Rosenbluth M.* // *Phys. Fluids*. 1964. Vol. 7. P. 764.
2. *Furth H.* // *Private communication*. 1964.
3. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // *Вопросы теории плазмы*. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 2. С. 3.

К ТЕОРИИ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ*

1. ОБЩИЕ КРИТЕРИИ ЛОКАЛЬНОЙ И КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В ряде работ было получено условие магнитогидродинамической устойчивости произвольной равновесной плазменной конфигурации относительно локальных возмущений [1–5]. При этом под локальными возмущениями понимаются малые смещения плазмы относительно положения равновесия, имеющие произвольную форму на рассматриваемой магнитной поверхности и малую область локализации в направлении нормали к магнитной поверхности. В качестве другой предельной формы возмущений можно рассмотреть возмущения, которые постоянны на каждой магнитной поверхности. Вывод соответствующего критерия "конвективной" устойчивости дан в приложении. Условие локальной устойчивости, которое было получено в [1–4], имеет трудно обозримый вид. Оказывается, однако, что его можно преобразовать к значительно более удобной форме, близкой к условию конвективной устойчивости, что позволяет с единой точки зрения проанализировать известные критерии Розенблюта–Лонгмайра и Кадомцева, Крускала–Шафранова и Сайдема. Все эти критерии оказываются предельными случаями общего критерия локальной устойчивости, хотя по смыслу их первоначального вывода первые два критерия не связаны с допущением о локальности.

Используя обозначения Грина, Джонсона [4], запишем уравнения равновесия плазмы в виде

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.1)$$

Общие критерии локальной и конвективной устойчивости, выведенные в приложении, в этих обозначениях имеют вид

$$\frac{1}{4} S^2 + S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left[\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c^2 \right] > 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{S^2}{\dot{p}^2} (\langle \mathbf{j}^2 \rangle \langle \mathbf{B}^2 \rangle - \langle \mathbf{j}\mathbf{B} \rangle^2) + 2S \langle \mathbf{j}\mathbf{B} \rangle - \Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - \dot{p}^2 + \frac{\gamma p}{\dot{p}^2} \langle (S\mathbf{j} - \Omega\mathbf{B})^2 + \dot{p}^2 \Omega \rangle > 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\gamma = 5/3$, V – текущий объем системы вложенных замкнутых магнитных поверхностей. Величины p , Ω и S являются так называемыми поверхностными функциями,

* Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626–643.

зависящими только от V . Они определяются равенствами

$$\dot{p} = I\dot{\Phi} - J\dot{\chi}, \quad \Omega = I\ddot{\Phi} - J\ddot{\chi}, \quad S = \dot{\chi}\dot{\Phi} - \dot{\Phi}\dot{\chi}, \quad (1.4)$$

где точками обозначены производные по V . Функции Φ и χ описывают продольный и азимутальный магнитные потоки, а функции J и I – продольный и азимутальный токи внутри магнитной поверхности, ограничивающей объем V :

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\sigma_{\perp}, \quad \chi = \int \mathbf{B} d\sigma_{\parallel}, \quad J = \int \mathbf{j} d\sigma_{\perp}, \quad I = \int \mathbf{j} d\sigma_{\parallel}. \quad (1.5)$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по объему, заключенному между двумя соседними магнитными поверхностями, а угловыми скобками с индексом c – усреднение по замкнутой магнитной силовой линии, лежащей на "рациональной" магнитной поверхности:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f d\tau, \quad \langle f \rangle_c = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}. \quad (1.6)$$

Функция

$$S = -\dot{\Phi}^2 \frac{d}{dV} \frac{d\chi}{d\Phi}$$

характеризует перекашивание силовых линий магнитного поля (shear). Функция Ω , которая при $S = 0$ равна $\Omega = \dot{p}\ddot{\Phi} / \dot{\Phi} = \dot{p}\ddot{\chi} / \dot{\chi}$, является характеристикой "минимума \bar{B} ".

Перейдем к анализу критериев (1.2) и (1.3).

1. Для случая цилиндрической геометрии плазмы (1.2) переходит в известное необходимое условие устойчивости Сайдема [6]

$$\rho B_s^2 (\mu' / \mu)^2 + 8\rho' > 0 \quad (1.7)$$

($\mu(\rho) = B_{\omega} / (\rho B_s)$, B_{ω} и B_s – азимутальное и продольное магнитные поля), которое, очевидно, накладывает весьма жесткие требования на распределение давления $p(\rho)$ по радиусу ρ плазменного цилиндра. При $\mu'(\rho) = 0$ критерий (1.3) в рассматриваемом случае приводит к неравенству

$$p' - \gamma p B_s' / B_s > 0, \quad (1.8)$$

так что для устойчивости необходим "максимум \bar{B} ".

2. Для конфигураций с замкнутыми магнитными силовыми линиями, когда $S = 0$, условия устойчивости (1.2) и (1.3) принимают вид

$$-\Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left[\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c^2 \right] > 0, \quad (1.9)$$

$$\Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - \dot{p}^2 + \gamma p \langle \mathbf{B}^2 \rangle \Omega^2 / \dot{p}^2 + \Omega > 0. \quad (1.10)$$

Так как величина в круглых скобках неравенства (1.9) положительна, для устойчивости необходимо $\Omega < 0$. Условие $\Omega < 0$ является требованием "минимума \bar{B} ", полученным впервые в работах Розенблюта–Лонгмайра [7] и Кадомцева [8]. Как показывает выражение (1.9), при малом давлении плазмы, когда можно пренебречь величиной в круглых скобках, условие $\Omega < 0$ становится достаточным условием локальной устойчивости при $S = 0$.

Условие конвективной устойчивости (1.10) было получено Кадомцевым [9] при рассмотрении конфигурации с замкнутыми силовыми линиями \mathbf{B} в предположении о постоянстве смещений ξ_{\perp} вдоль силовых линий. В [8] им показано, что условие,

близкое к $\Omega < 0$ и являющееся более мягким, чем $\Omega < 0$,

$$\Omega(\bar{p}^2 - \gamma p \Omega) < 0, \quad (1.11)$$

представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости для произвольных возмущений в плазме низкого давления с замкнутыми магнитными силовыми линиями.

3. Отдельные слагаемые в левой части неравенства (1.2) можно интерпретировать следующим образом. Первый член описывает стабилизирующее действие скоса силовых линий (shear). Член, пропорциональный Ω , характеризует стабилизирующее действие минимума \bar{B} . Член в круглых скобках описывает дестабилизацию, связанную с конечным давлением плазмы. Второй член выражает совместное действие скоса и продольного тока, текущего в плазме.

В случае плазменной конфигурации с продольным током член, пропорциональный Ω , остается того же порядка величины, что и последний член в круглых скобках неравенства (1.2), даже при исчезающе малом давлении и может оказаться недостаточным для стабилизации. Так, например, в случае цилиндрической геометрии при $S = 0$ получается требование $\bar{p} > 0$. Стабилизирующее действие скоса, описываемое первым членом в (1.2), пренебрежимо мало для конфигураций со слабо неоднородным продольным током. Основной стабилизирующий эффект для таких систем определяется вторым и третьим членами выражения (1.2). Таким образом, принцип минимума \bar{B} , определяющий устойчивость конфигураций типа стелларатор, где магнитные поверхности формируются внешними магнитными полями, оказывается недостаточным для стабилизации систем типа токамак, магнитные поверхности которых создаются током в плазме.

Недостаточность одного лишь условия минимума \bar{B} для конфигураций с продольным током согласуется с фактом существования еще одного, дополнительного, условия устойчивости – критерия Шафранова–Крускала [10, 11], первоначально полученного для случая цилиндрической геометрии плазмы и затем перенесенного на случай тора достаточно большого радиуса R . Это условие имеет вид

$$\rho_{\Sigma} B_s / R B_{\omega} > 1. \quad (1.12)$$

Здесь ρ_{Σ} – радиус плазменного шнура, B_{ω} и B_s , так же как и в формуле (1.7), – азимутальное и продольное магнитные поля. Далее будет показано, что критерии (1.2) и (1.3), примененные к тороидальной конфигурации, приводят к ограничению на продольный ток того же типа, что и условие (1.12).

Критерии (1.2) и (1.3) являются лишь необходимыми условиями устойчивости плазмы, поскольку при их выводе рассматривались возмущения специальной формы. Однако они приводят к достаточно жестким ограничениям и содержат в качестве частных случаев все известные до настоящего времени критерии гидромагнитной устойчивости, полученные при других предположениях. Отметим в заключение, что критерий (1.2), который для циклической плазмы дает условие Сайдема (1.7), для тороидальной плазмы приводит к значительно более мягкому ограничению на величину продольного тока типа (1.12) (см. разд. 3).

2. ТОРОИДАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПРИ УСЛОВИИ АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

2.1. Общие соотношения

Аксиально-симметричные конфигурации в цилиндрической системе координат r, ϕ, z удобно описывать с помощью функций $\psi = rA_{\phi}$, $I_A = rB_{\phi}$ и p , зависящих только от ψ , т.е. являющихся поверхностными функциями. Компоненты векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} опре-

деляются при этом соотношениями [12]

$$B_z = \partial\psi/r\partial r, \quad B_r = -\partial\psi/r\partial z, \quad B_\varphi = I_A/r, \quad (2.1)$$

$$j_z = I'_A \partial\psi/r\partial r, \quad j_r = -I'_A \partial\psi/r\partial z, \quad j_\varphi = rp' + I_A I'_A / r. \quad (2.2)$$

Штрих здесь и далее означает дифференцирование по ψ .

Функция $\psi(z, r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r^2 p' - I_A I'_A, \quad (2.3)$$

где p и I_A – произвольные функции ψ , определяющие распределение продольного поля B_φ и плотности продольного тока j_φ по сечению плазмы.

Основные поверхностные величины Φ , χ , J и I , фигурирующие в теории устойчивости, для случая аксиальной симметрии задачи представляются в виде

$$\chi = -2\pi \int B_z r dr = -2\pi\psi, \quad I = 2\pi \int j_z r dr = -2\pi I_A, \quad (2.4)$$

$$\Phi = \int I_A dz dr / r, \quad J = \int \left(rp' + \frac{I_A I'_A}{r} \right) dz dr. \quad (2.5)$$

Если наряду с объемом V , ограниченным замкнутой магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$, ввести функцию U так, чтобы

$$V = 2\pi \int r dz dr, \quad U = 2\pi \int (1/r) dz dr, \quad (2.6)$$

то дифференциалы функций Φ и J выразятся через дифференциалы V и U :

$$2\pi d\Phi = I_A dU, \quad 2\pi dJ = p'dV + I_A I'_A dU. \quad (2.7)$$

Таким образом, для нахождения поверхностных величин, определенных соотношениями (1.4), в функции от ψ при заданных $p(\psi)$ и $I_A(\psi)$ достаточно вычислить интегралы (2.6). Выражения для S и Ω записываются при этом в виде

$$V'^3 S = -(I_A U')', \quad V'^3 \Omega = -I'_A (I_A U')' - p' V''. \quad (2.8)$$

2.2. Представление решения в окрестности магнитной оси

Разложим функции $-p'$ и $-I_A I'_A$ в ряд по степеням ψ :

$$-p' = a + a'\psi + \dots, \quad -I_A I'_A / R^2 = b + b'\psi + \dots \quad (2.9)$$

и будем искать решение уравнения равновесия (2.3) в окрестности магнитной оси $r = R$, $z = 0$ в виде ряда по степеням z и $r^2 - R^2$. Налагая требование симметрии относительно плоскости $z = 0$, получим с точностью до кубических членов включительно

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{AR^2}{2} \left(1 + C \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{a+b-A}{8} (r^2 - R^2)^2 - \\ & - \frac{b-(1-C)A}{24R^2} (r^2 - R^2)^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении линейные по ψ члены разложений (2.9) не влияют на равновесную конфигурацию. Сечения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ в окрестности магнитной оси являются эллипсами, отношение полуосей которых $l_z/l_r = \varepsilon$ определяет константу $A = (a+b)/(1+\varepsilon^2)$. Вторая произвольная

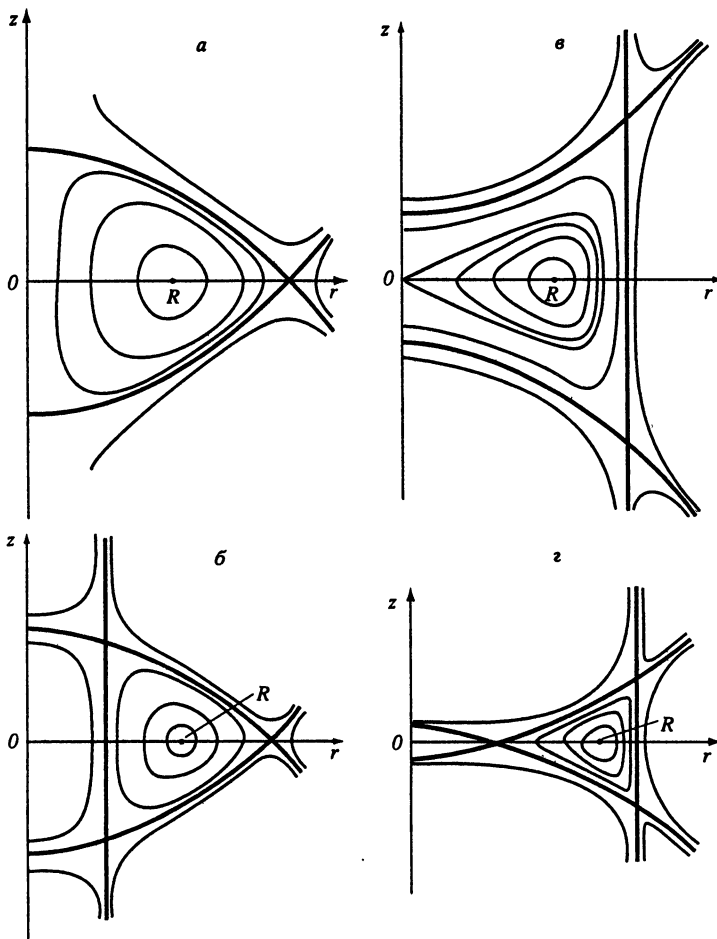


Рис. 1. Нормальные сечения магнитных поверхностей конфигурации (2.10)

$a - C = 1, b/a = 1$; $б - C = 4/3, b/a = 1$; $в - C = -4/5, b/a = 1$; $г - C = -8/3, b/a = 1$

постоянная C зависит от расположения сепаратрисы магнитных поверхностей, координаты ребер которой r_S, z_S выражаются формулами

$$\frac{r_S^2}{R^2} - 1 = -\frac{1}{C}, \quad \frac{z_S^2}{R^2} = \frac{1}{4C^3} \left[(1 + 2\varepsilon^2)C - \frac{\varepsilon^2 - a/b}{1 + a/b} \right], \quad (2.11)$$

$$\frac{r_S^2}{R^2} - 1 = \frac{2\varepsilon^2}{C + (\varepsilon^2 - a/b)/(1 + a/b)}, \quad z_S = 0. \quad (2.12)$$

Таким образом, форма магнитных поверхностей равновесной конфигурации (2.10) зависит от трех постоянных параметров: ε, C и b/a . Отношение b/a определяется распределением тока в плазме. В частности, согласно (2.2) от b/a зависит положение максимума плотности тока j_φ в функции от r : $r_0 = R\sqrt{b/a}$.

Нетрудно проверить, что при специальном выборе констант таким образом, чтобы коэффициент при $(r^2 - R^2)^3$ обращался в нуль, выражение (2.10) дает точное решение уравнения (2.3) при постоянных $p' = -a$ и $I_A I'_A = -bR^2$. Полагая $b = (1 - C)A$,

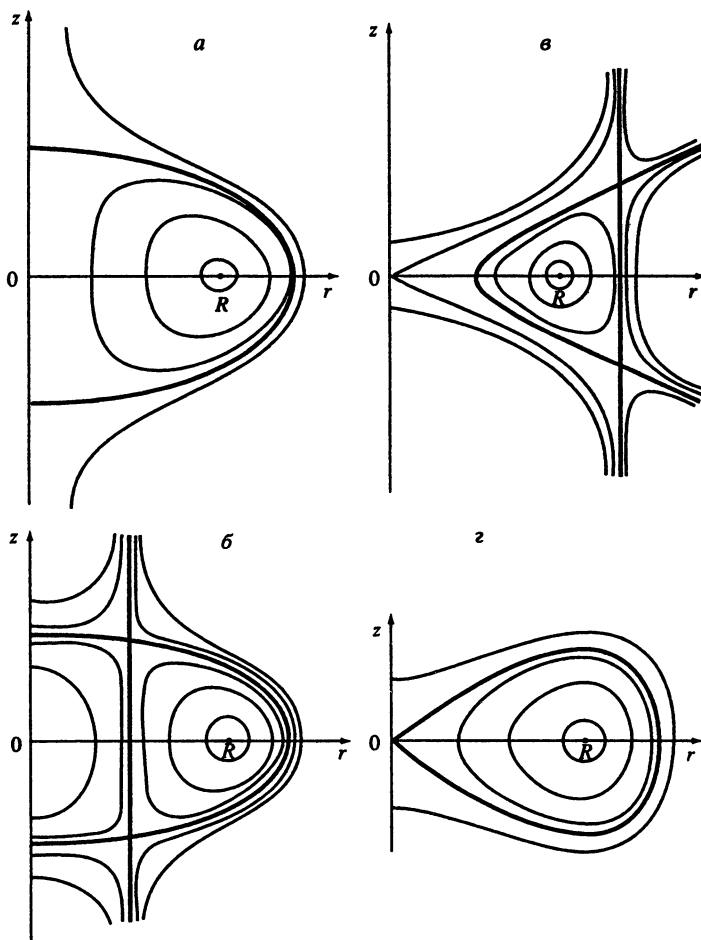


Рис. 2. Нормальные сечения магнитных поверхностей конфигурации (2.13)

$a - b = 0$; $б - b/a = -1/7$; $в - b/a = -7$; $г - b/a = 1$

$c_0 = AC$, получим точное решение

$$\psi = (bR^2 + c_0r^2)z^2/2 + (a - c_0)(r^2 - R^2)^2/8. \quad (2.13)$$

Отметим два частных случая.

1. При $b = 0$ оба ребра сепаратрисы стягиваются к оси z . Соответствующая равновесная конфигурация, рассмотренная в [13], описывается функцией

$$\psi = c_0r^2z^2/2 + (a - c_0)(r^2 - R^2)^2/8. \quad (2.14)$$

2. В случае $c_0 = 0$ сепаратриса имеет только одно ребро, расположенное в начале координат $r = 0, z = 0$, при этом

$$\psi = bR^2z^2/2 + a(r^2 - R^2)^2/8. \quad (2.15)$$

Равновесная конфигурация (2.15) замечательна тем, что для нее довольно просто вычисляются все поверхностные функции, входящие в критерии устойчивости (1.2), (1.3).

Сечения магнитных поверхностей равновесных конфигураций (2.10) и (2.13) при $\epsilon = 1$ показаны на рис. 1, 2. Магнитные поверхности конфигурации (2.13) отличаются

от магнитных поверхностей для общего случая (2.10) отсутствием ребра сепаратрисы (2.12), расположенного при $z = 0$.

В "полярных" координатах $R - r = \rho \cos \omega$, $z = \rho \sin \omega$, связанных с магнитной осью $r = R$, решение (2.10) с точностью до членов порядка ρ^3 запишется в виде

$$\psi = (\lambda_1 \sin^2 \omega + \lambda_2 \cos^2 \omega) \rho^2 + (\lambda_3 \sin^2 \omega + \lambda_4 \cos^2 \omega) \cos \omega \rho^3 + \dots, \quad (2.16)$$

где параметры λ_i выражаются через параметры конфигурации (2.10) формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= AR^2/2, & \lambda_2 &= (a+b-A)R^2/2, & \lambda_3 &= ACR, \\ \lambda_4 &= (3a+b-A-2AC)R/6. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3. Выражения для поверхностных функций в системе координат, связанной с магнитной осью

Для вычисления поверхностных функций равновесной аксиально-симметричной конфигурации можно воспользоваться полярной системой координат ρ , ω , ϕ , связанной с магнитной осью ($R - r = \rho \cos \omega$, $z = \rho \sin \omega$), в которой компоненты магнитного поля выражаются через ψ формулами $B_\rho = \partial\psi/(\rho r \partial\omega)$, $B_\omega = -\partial\psi/(r\partial\rho)$. Интегрируя по слою между двумя соседними магнитными поверхностями $\delta\psi = \delta\rho\partial\psi/\partial\rho$, получим следующие выражения для V' и U' :

$$V' = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{r\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}, \quad U' = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\omega}{r\partial\psi/\partial\rho}. \quad (2.18)$$

Кроме V' и U' в критерии устойчивости (1.2), (1.3) входят поверхностные величины, обозначенные угловыми скобками. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае аксиальной симметрии $\langle f \rangle_c = \langle f \rangle$. Действительно,

$$\oint f dl / B = \oint f \rho d\omega / B_\omega = -\oint f r \rho d\omega / (\partial\psi/\partial\rho), \quad (2.19)$$

и согласно (2.18) получаем

$$\langle f \rangle = \frac{2\pi}{V'} \int_0^{2\pi} f \frac{r\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}. \quad (2.20)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\langle 1/r^2 \rangle = U'/V'$. Таким образом, при известной функции ψ поверхностные величины $\langle f \rangle$, аналогично V' и U' , выражаются однократными интегралами, взятыми в пределах от 0 до 2π .

2.4. Выражения для поверхностных функций в цилиндрических координатах

Вычисление поверхностных функций для точного решения (2.13) более удобно производить непосредственно в цилиндрической системе координат r , ϕ , z . Если известно выражение для z в функции от r и ψ , то, принимая r за независимую переменную, получим однократные интегралы

$$V = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} z(r, \psi) r dr, \quad U = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} z(r, \psi) \frac{dr}{r}, \quad (2.21)$$

где интегрирование производится между точками обращения $z(r, \psi)$ в нуль. Произ-

водные V' и U' , аналогично предыдущему пункту, можно представить в виде

$$V' = 4\pi \int_{\eta}^{r_2} \frac{r dr}{\partial \Psi / \partial z}, \quad U' = 4\pi \int_{\eta}^{r_2} \frac{dr}{r \partial \Psi / \partial z}. \quad (2.22)$$

При этом поверхностные функции, обозначенные угловыми скобками, выразятся интегралами

$$\langle f \rangle = \frac{4\pi}{V'} \int_{\eta}^{r_2} f \frac{r dr}{\partial \Psi / \partial z}. \quad (2.23)$$

2.5. Поверхностные функции V и U для равновесной конфигурации (2.13)

С помощью подстановки $r^2 = R^2(1 + \sqrt{\Psi} \cos \vartheta)$, где $\Psi = 8\psi / [R^4(a - c_0)]$, выражения для функций V и U конфигурации (2.13) можно представить в виде

$$V = \frac{8\pi\psi}{R\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)}} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1+k_0 \cos \vartheta}}, \quad (2.24)$$

$$U = \frac{8\pi\psi}{R^3\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)}} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{(1+\kappa k_0 \cos \vartheta)\sqrt{1+k_0 \cos \vartheta}}.$$

Здесь $k_0 = \sqrt{\Psi} / \kappa$, $\kappa = 1 + b/c_0$. Полученные интегралы приводятся к эллиптическим [14]:

$$V = \frac{64\pi\psi}{R\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)(1+k_0)}} \left[\left(2 - \frac{2}{k^2}\right) \frac{K-E}{3k^2} - \frac{E}{3k^2} \right], \quad (2.25)$$

$$U = \frac{64\pi\psi}{R^3\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)(1+k_0)}} \frac{1}{1+\kappa k_0} \times$$

$$\times \left[\frac{K-E}{k^4 \sin^2 \alpha} - \frac{KE(\alpha, k) - EF(\alpha, k)}{k^4 \sin^3 \alpha \cos \alpha \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \right], \quad (2.26)$$

где модуль k и $\sin \alpha$ определяются выражениями $k^2 = 2k_0/(1+k_0)$, $\sin^2 \alpha = (\kappa + \kappa k_0)/(1 + \kappa k_0)$.

Разложения V и U в окрестности магнитной оси легко найти дифференцированием интегралов (2.24) по параметру k_0 :

$$V = \frac{4\pi^2\psi}{R\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)}} \left[1 + \frac{3}{32} k_0^2 + \dots \right], \quad (2.27)$$

$$U = \frac{4\pi^2\psi}{R^3\sqrt{(a-c_0)(b+c_0)}} \left[1 + \left(\frac{3}{32} + \frac{\kappa}{8} + \frac{\kappa^2}{4} \right) k_0^2 + \dots \right].$$

При $\epsilon = 1$, когда $c_0 = (a-b)/2$, отсюда следует

$$V = \frac{8\pi^2\psi}{R(a+b)} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^3} \frac{2\psi}{R^4} + \dots \right\}, \quad (2.28)$$

$$U = \frac{8\pi^2\psi}{R^3(a+b)} \left\{ 1 + \left[\frac{3}{4} \frac{(a-b)^2}{(a+b)} + \frac{3a+b}{a+b} \right] \frac{2\psi/R^4}{a+b} + \dots \right\}.$$

В случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей обе функции V и U для конфигурации (2.14) выражаются через полные эллиптические интегралы

$$V = \frac{8\pi R^3 \Psi}{(1 + \sqrt{\Psi})^{3/2}} \left[\frac{2k^2 - 2}{3k^4} K + \frac{2 - k^2}{3k^4} E \right],$$

$$U = \frac{8\pi R \Psi}{(1 + \sqrt{\Psi})^{3/2}} \left[\frac{2 - k^2}{k^4} K - \frac{2}{k^4} E \right].$$
(2.29)

При этом $b = 0$, $a = 2c_0$, $\Psi = 16\psi/(aR^4)$, $k^2 = 2\sqrt{\Psi}/(1 + \sqrt{\Psi})$.

Для случая равновесной конфигурации (2.15) V и U представляются элементарными функциями при произвольном эксцентриситете приосевых сечений магнитных поверхностей:

$$V = \frac{4\pi^2}{\sqrt{ab}R} \psi, \quad U = \pi^2 R \sqrt{\frac{a}{b}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\psi}{aR^4}} \right).$$
(2.30)

3. УСТОЙЧИВОСТЬ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

С учетом приведенных выше выражений для поверхностных функций критерии локальной и конвективной устойчивостей (1.2), (1.3) для аксиально-симметричных конфигураций можно представить в виде¹

$$\frac{1}{4} V'^6 S^2 - p' \left\{ I^2 [U'' Q_1 - V'' Q_2 + p' (Q_2 Q_3 - Q_1^2)] + \right. \\ \left. + U' (II' Q_1 + p' Q_3 - V'') \right\} > 0,$$
(3.1)

$$S^2 \left[I^2 (U' Q_4 - V'^2) + Q_4 Q_5 \right] + SI \left(2p' + II' \frac{U'}{V'} + \frac{I'}{I} \frac{Q_5}{V'} \right) + \\ + \frac{p' V''}{V'^4} (I^2 U' + Q_5) - \frac{p'^2}{V'^2} + \\ + \gamma p \left\{ S^2 V' Q_4 + SI \left(\frac{2V''}{V'} + \frac{I'}{I} \right) + \frac{V''}{V'^3} \left[(I^2 U' + Q_5) \frac{V''}{V'^2} - p' \right] \right\} > 0.$$
(3.2)

Здесь согласно соотношениям (2.8) $S = -(IU')'/V'^3$, $\Omega = I'S - p'V''/V'^3$, а через Q_i обозначены следующие величины:

$$\frac{Q_1}{V'} = \left\langle \frac{1}{|\nabla \Psi|^2} \right\rangle, \quad \frac{Q_2}{V'} = \left\langle \frac{1}{r^2 |\nabla \Psi|^2} \right\rangle, \quad \frac{Q_3}{V'} = \left\langle \frac{r^2}{|\nabla \Psi|^2} \right\rangle,$$

$$\frac{Q_4}{V'} = \langle r^2 \rangle, \quad \frac{Q_5}{V'} = \left\langle \frac{|\nabla \Psi|^2}{r^2} \right\rangle.$$
(3.3)

При заданных функциях $p(\psi)$ и $I(\psi)$ функция ψ определяется решением уравнения равновесия (2.3), а функции $V(\psi)$, $U(\psi)$ и $Q_i(\psi)$ выражаются интегралами (2.18)–(2.23).

¹ Далее для краткости мы опускаем индекс A у функции $I_A(\psi) = rB_\phi$.

3.1. Устойчивость тороидальных конфигураций в окрестности магнитной оси

Для исследования устойчивости в окрестности магнитной оси методом разложения по степеням ψ целесообразно представить функции V и Q_i в виде

$$V = R^2 U - W, \quad Q_2 = \frac{Q_1}{R^2} - \frac{V'}{R^2} \left\langle \frac{r^2 - R^2}{r^2 |\nabla \psi|^2} \right\rangle,$$

$$Q_3 = R^2 Q_1 + V' \left\langle \frac{r^2 - R^2}{|\nabla \psi|^2} \right\rangle, \quad Q_4 = R^2 V' + V' \langle r^2 - R^2 \rangle,$$

выделяя явно их основную часть и поправки, которые легко вычисляются при известном разложении ψ по степеням отклонения ρ от магнитной оси.

Оставляя в неравенствах (3.1) и (3.2) лишь основные члены, получим следующие условия устойчивости в окрестности магнитной оси $r = R$:

$$p' \left[p' + \frac{H'}{R^2} + \frac{I^2}{R^2} \left(\frac{W''}{V'} + p' \frac{q}{V'} \right) \right] > 0, \quad (3.4)$$

$$- \left(p' + \frac{H'}{R^2} \right)^2 - I^2 \left[\frac{p'}{R^2} \frac{W''}{V'} + \left(p' + \frac{H'}{R^2} \right) \frac{U''}{V'} \right] +$$

$$+ \gamma p \left[\left(\frac{I^2}{R^2} \frac{W''}{V'} + \frac{H'}{R^2} \right) \frac{W''}{V'} - \left(p' + \frac{H'}{R^2} \right) \frac{V''}{V'} \right] > 0. \quad (3.5)$$

Здесь W и q – поверхностные функции, определяемые соотношениями

$$W' = R^2 U' - V' = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \rho \, d\omega}{r \partial \psi / \partial \rho},$$

$$q = V' \left\langle \frac{(r^2 - R^2)^2}{r^2 |\nabla \psi|^2} \right\rangle = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)^2 \rho \, d\omega}{r |\nabla \psi|^2 \partial \psi / \partial \rho}. \quad (3.6)$$

Как показывают выражения (3.4)–(3.6), для вычисления всех величин, входящих в условие локальной устойчивости (3.4), достаточно знать разложение функции ψ с точностью до членов порядка ρ^3 . Для условия же конвективной устойчивости кроме вычисления W'' необходимо вычислить отдельно V'' либо U'' , а это требует учета в функции ψ величин порядка ρ^4 .

А. Рассмотрим сначала условие локальной устойчивости (3.4). Функция потока ψ для симметричной относительно плоскости $z = 0$ равновесной конфигурации представляется выражением (2.16):

$$\psi = f_1(\omega) \rho^2 + f_2(\omega) \cos \omega \rho^3 + \dots$$

В рассматриваемом приближении $\rho = \sqrt{\psi / f_1} \left(1 - \sqrt{\psi / f_1} f_2 / 2 \right)$, и входящие в (3.4) функции V' , W'' и q запишутся в виде

$$V' = \pi R \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{f_1}, \quad W'' = \frac{\pi}{R} \int_0^{2\pi} \left(4R \frac{f_2}{f_1} + 1 \right) \cos^2 \omega \frac{d\omega}{f_1^2},$$

$$q = 4\pi R \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \omega}{4f_1^2 + f_1'^2} \frac{d\omega}{f_1}. \quad (3.7)$$

Вычисление этих интегралов дает

$$V' = \frac{2\pi^2 R}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}, \quad q = \frac{2\pi^2 R}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3} \frac{(1 + \varepsilon^2)^3}{(1 + \varepsilon)\varepsilon^4}, \quad (3.8)$$

$$W'' = \frac{\pi^2 (1 + \varepsilon^2)^2}{R(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \varepsilon^3} \left\{ 1 + \frac{R}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(1 + \varepsilon^2)^3}{4\varepsilon^2} \left[\lambda_3 + 3\lambda_4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 6\lambda_4 \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} - (\lambda_3 - 3\lambda_4) \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.9)$$

где $\varepsilon = l_z/l_r = \sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$ – отношение полуосей эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси. Выразив коэффициенты λ_i через параметры a, b и C равновесной конфигурации (2.10), получим

$$V' = \frac{4\pi^2}{R(a+b)} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}, \quad q = \frac{16\pi^2}{R^5(a+b)^3} \frac{(1 + \varepsilon^2)^3}{(1 + \varepsilon)\varepsilon^4}, \quad (3.10)$$

$$W'' = \frac{4\pi^2 (1 + \varepsilon^2)^3}{R^5(a+b)^2 \varepsilon^5} \left[\frac{3a+b}{a+b} - \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} (1 + 2C) \right]. \quad (3.11)$$

Подстановка этих выражений в неравенство (3.4) приводит к следующему условию локальной устойчивости вблизи магнитной оси:

$$\frac{R^2 j_0^2}{B_0^2} < \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^2 \left[\frac{2}{1 + \varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{a - b}{a + b} - \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} (1 + 2C) \right], \quad (3.12)$$

где значения j^2 и B^2 берутся на самой магнитной оси $r = R$. Согласно (3.12) предельная плотность тока в окрестности магнитной оси зависит от параметров $\varepsilon, b/a$ и C . Величина ε определяется эксцентриситетом приосевых сечений магнитных поверхностей, отношение b/a зависит от распределения тока по сечению плазмы, а постоянная C является характеристикой третьей гармоники функции ψ , определяющей положение сепаратрисы.

В случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей ($\varepsilon = 1$) зависимость от параметров b/a и C пропадает и условие устойчивости (3.12) принимает весьма простой вид $R^2 j_0^2 / B_0^2 < 4$. В предположении малой тороидальности и однородности продольного тока и продольного магнитного поля это условие в точности соответствует ограничению (1.12).

Для выяснения зависимости предельной плотности тока от эксцентриситета приосевых сечений магнитных поверхностей выберем постоянную C таким образом, чтобы разложение ψ в окрестности магнитной оси (2.10) совпадало с точным решением (2.13), при этом $C = (a/b - \varepsilon^2)/(a/b + 1)$. Рассмотрим частные случаи для различных отношений b/a .

1. Если $a = 0$, т.е. магнитная конфигурация в окрестности оси бессилова,

$$R^2 j_0^2 / B_0^2 < 2(1 + \varepsilon^2)(2 - \varepsilon^2) / \varepsilon^2$$

и для устойчивости необходимо $\varepsilon < \sqrt{2}$.

2. При $a = b$, когда максимум плотности продольного тока в функции от r находится при $r = R$, имеем

$$R^2 j_0^2 / B_0^2 < (5 + 3\varepsilon - 2/\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3)(1 + \varepsilon^2) / [\varepsilon^2(1 + \varepsilon)].$$

Здесь первый множитель в правой части имеет максимум при $\epsilon = 1$ и переходит через нуль вблизи $\epsilon = 1/2$ и $\epsilon = 3/2$, так что устойчивость имеет место только для сечений магнитных поверхностей, достаточно близких к круговым.

3. В случае $b = 0$ (для равновесной конфигурации (2.14)) имеем

$$R^2 j_0^2 / B_0^2 < 2(\epsilon^2 + 3\epsilon - 2)(1 + \epsilon^2) / [\epsilon^3(1 + \epsilon)].$$

При этом для устойчивости необходимо $\epsilon > 0,56$.

4. Когда $a/b = \epsilon^2$ (для равновесной конфигурации (2.15)), получаем

$$R^2 j_0^2 / B_0^2 < 4(1 + \epsilon^2) / [\epsilon^2(1 + \epsilon)].$$

В этом случае в правой части неравенства стоит монотонно уменьшающаяся функция ϵ , которая в нуль не обращается.

Предположим теперь, что давление плазмы обращается в нуль на некоторой магнитной поверхности ψ_Σ , минимальное расстояние которой от оси z равно R_1 ; тогда

$$p = p_0(1 - \psi / \psi_\Sigma), \quad I^2 = I_e^2 + 2II'(\psi - \psi_\Sigma), \quad (3.13)$$

$$\psi_\Sigma = \frac{\epsilon^2 R^4}{8} \frac{a+b}{1+\epsilon^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)^2 \Theta, \quad \Theta = 1 + \frac{1 - R_1^2 / R^2}{3\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon^2 - a/b}{1 + a/b} + C\right). \quad (3.14)$$

Эти соотношения позволяют получить условие локальной устойчивости, выраженное через отношение давления плазмы к магнитному давлению на магнитной оси ($\beta_0 = 2p_0 / B_0^2$):

$$\beta_0 < \frac{(1 + \epsilon^2)(1 - R_1^2 / R^2)^2}{4\epsilon^2(1 + b/a)} \left[\frac{2}{1 + \epsilon} + \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \frac{1 - b/a}{1 + b/a} - \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon^2} (1 + 2C) \right] \Theta. \quad (3.15)$$

При такой форме условия устойчивости зависимость от параметров b/a и ϵ остается также и в случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей $\epsilon = 1$, когда для устойчивости необходимо

$$\beta_0 < \frac{1}{2} \frac{(1 - R_1^2 / R^2)^2}{1 + b/a} \left[1 - \left(\frac{1 - b/a}{1 + b/a} - C \right) \frac{1 - R_1^2 / R^2}{3} \right]. \quad (3.16)$$

Параметр C зависит от расстояния до ребер сепаратрисы. Если пара ребер сепаратрисы (2.11) находится с внутренней стороны тора, то $C > 0$ и устойчивость улучшается. Наличие же пары ребер сепаратрисы (2.11) с наружной стороны тора оказывает дестабилизирующее действие.

Как это следует из (3.13), отношение b/a можно интерпретировать как характеристику степени диамагнетизма плазмы:

$$\frac{b}{a} = \frac{I^2(0) - I^2(\psi_\Sigma)}{2R^2 p(0)} = \frac{B_0^2 - B_e^2}{2p_0}. \quad (3.17)$$

Здесь B_e – продольное поле B_ϕ на границе плазмы $\psi = \psi_\Sigma$ при $r = R$.

При малой тороидальности, когда $1 - R_1^2 / R^2 \ll 1$, остается существенной зависимость β_0 от параметров R_1/R и b/a :

$$\beta_0 < \frac{1}{2} \frac{(1 - R_1^2 / R^2)^2}{1 + b/a}. \quad (3.18)$$

Для равновесных конфигураций, описываемых точным решением (2.13), $\Theta = 1$, и в случае $\epsilon = 1$ получается условие локальной устойчивости, совпадающее с (3.18).

Чтобы оценить порознь влияние скоса и минимума \bar{B} , рассмотрим локальную устойчивость конфигурации (2.13) при $\epsilon = 1$. В случае конфигурации (2.15), когда $V'' = 0$, получаем, что $a = b$, и условие (3.18) дает $\beta_0 < (1 - R_1^2/R^2)^2/4$. В случае, когда $S = 0$, из (2.8) и (2.28) вытекает

$$R^2 j_0^2 / B_0^2 = [7 + 10a/b + 15(a/b)^2] / (1 + a/b). \quad (3.19)$$

Правая часть равенства (3.19) имеет минимум при $a/b \approx 0,1$, превышающий 4, что противоречит условию локальной устойчивости $R^2 j_0^2 / B_0^2 < 4$. Таким образом, в случае замкнутых силовых линий **B** конфигурация (2.13) при $\epsilon = 1$ оказывается неустойчивой.

Б. Рассмотрим теперь условие конвективной устойчивости (3.5). В случаях, когда $V'' = 0$ или $S = 0$, функции V'' и U'' , входящие в (3.5), можно выразить через функцию W'' , для вычисления которой достаточно знать разложение ψ с точностью до членов $\sim r^3$. Используя соотношение (2.8), получим условие (3.5) для случаев $V'' = 0$ и $S = 0$ соответственно в виде

$$-\left(p' + \frac{II'}{R^2}\right)^2 - \left[\frac{I^2}{R^2} \left(2p' + \frac{II'}{R^2}\right) - \gamma p \left(\frac{I^2}{R^2} \frac{W''}{V'} + \frac{II'}{R^2}\right)\right] \frac{W''}{V'} > 0, \quad (3.20)$$

$$-\left(p' + \frac{II'}{R^2}\right)^2 - \frac{I^2}{R^2} \left[p' \frac{W''}{V'} - \left(p' + \frac{II'}{R^2}\right) \frac{I'}{I}\right] + \gamma p \left[\left(\frac{I^2}{R^2} \frac{W''}{V'} + p' + \frac{2II'}{R^2}\right) \frac{W''}{V'} + \left(p' + \frac{II'}{R^2}\right) \frac{I'}{I}\right] > 0. \quad (3.21)$$

Обратимся далее к равновесной конфигурации (2.13) и ограничимся при этом круглыми приосевыми сечениями магнитных поверхностей $\epsilon = 1$. В случае $V'' = 0$ согласно (3.28) $a = b$, и условие (3.20) при $\epsilon = 1$ дает $R^2 j_0^2 / B_0^2 < 12$. Таким образом, условие конвективной устойчивости в окрестности магнитной оси имеет ту же форму, что и условие локальной устойчивости, и оказывается в рассматриваемом случае более мягким. В случае $S = 0$, как это следует из выражений (3.19) и (3.21), рассматриваемая конфигурация при $\beta_0 \ll 1$ и $1 + b/a > 0$ оказывается неустойчивой также и по отношению к конвективным возмущениям.

3.2. Устойчивость равновесной конфигурации (2.15)

В заключение остановимся более подробно на рассмотрении конфигурации (2.15), устойчивость которой рассчитывается наиболее просто. Поскольку для данной конфигурации объем V пропорционален ψ , соотношения (3.13), (3.14) можно записать в виде

$$p = p_0(1 - V/V_\Sigma), \quad 2V_\Sigma = \pi^2 \epsilon R^3 (1 - R_1^2/R^2)^2. \quad (3.22)$$

Здесь V_Σ – объем, ограниченный магнитной поверхностью ψ_Σ , на которой $p = 0$.

Полагая $C = 0$, $a/b = \epsilon^2$, получим согласно (3.15) условие локальной устойчивости в окрестности $r = R$:

$$\beta_0 < \frac{2\epsilon V_\Sigma / (\pi^2 R^3)}{(1 + \epsilon)(1 + \epsilon^2)}. \quad (3.23)$$

При фиксированных V_Σ и R выражение в правой части неравенства (3.23) максимально при $\varepsilon = l_z/l_r = 0,66$. Практически оптимальное ε более целесообразно искать, считая заданными V_Σ и R_1 . Если записать предельное значение β_0 , определяемое неравенством (3.23), как $\beta_{0\max} = \varepsilon^2(1 - R_1^2/R^2)^2/[(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)]$ и приравнять нулю вариации V_Σ и $\beta_{0\max}$ по ε и $R(\varepsilon)$ при фиксированном R_1 , то получим, что оптимальное значение ε определяется равенством

$$R_1^2/(3R^2) = (2 + \varepsilon - \varepsilon^2)/(2 + 3\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3)$$

и зависит от отношения R_1/R . В случае малой тороидальности ($R_1/R \rightarrow 1$) оптимальное $\varepsilon = 0,66 = 1/1,52$. В случае предельно большой тороидальности ($R_1/R \rightarrow 0$) оптимальное $\varepsilon = 1,52$. Значение $\varepsilon = 1$ становится оптимальным при $R/(R - R_1) = 2,9$. Следует, однако, отметить, что оптимальные значения $\beta_{0\max}$ мало отличаются от соответствующих значений при $\varepsilon = 1$.

Величины Q_4 и Q_5 , входящие в критерий конвективной устойчивости (3.2), аналогично V и U выражаются в элементарных функциях:

$$Q_4 = \frac{4\pi^2 R}{\sqrt{ab}}, \quad Q_5 = \pi^2 R^3 \sqrt{\frac{a}{b}} \left[\frac{4\Psi}{R^4} + b \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\Psi}{aR^4}} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Как уже отмечалось выше, условие конвективной устойчивости в окрестности магнитной оси оказывается более мягким, чем условие локальной устойчивости.

Учитывая, что для рассматриваемой конфигурации $V'' = 0$, критерии (3.1) и (3.2) приводим к виду

$$V'^6 S^2 - 4p' \left\{ I^2 [U''Q_1 + p'(Q_2Q_3 - Q_1^2)] + U'(I'Q_1 + p'Q_3) \right\} > 0, \quad (3.25)$$

$$S^2 [I^2 (U'Q_4 - V'^2) + Q_4Q_5] + SI \left(2p' + I' \frac{U'}{V'} + \frac{I'}{I} \frac{Q_5}{V'} \right) - \frac{p'^2}{V'^2} + \gamma p (S^2 V'Q_4 + SI') > 0. \quad (3.26)$$

Если ограничиться случаем круглых приосевых сечений магнитных поверхностей $\varepsilon = 1$, то для величин Q_1, Q_2, Q_3 нетрудно получить

$$Q_1 = \frac{2\pi^2}{3a^2 R^3 \Psi} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + g_1 \right], \quad (3.27)$$

$$Q_2 = \frac{2\pi^2}{3a^2 R^5 \Psi} \left[\frac{1}{(1-\alpha)^{3/2}} - \frac{3\alpha^3}{(1-\alpha^3)^{3/2}} + \frac{g_1 + \alpha g_2}{1 + \alpha + \alpha^2} \right],$$

$$Q_3 = \frac{2\pi^2}{3a^2 R \Psi} \left[\sqrt{1-\alpha} + (1+\alpha)g_1 - \alpha g_2 \right]. \quad (3.28)$$

Здесь $\alpha^3 = 8\Psi/(aR^4)$, а через g_1 и g_2 обозначены следующие функции α :

$$g_1 = \left[\frac{2}{\sqrt{1+\alpha+\alpha^2}} + \frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \right]^{1/2}, \quad (3.29)$$

$$g_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{1+\alpha+\alpha^2}} - \frac{1+2\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, для рассматриваемой конфигурации (2.15) при $\varepsilon = 1$ все величины,

входящие в условия устойчивости (3.25) и (3.26), имеют точные выражения (2.30), (3.24) и (3.27)–(3.29) в элементарных функциях. Эти выражения показывают, что параметром разложения в окрестности магнитной оси является отношение ψ/ψ_S , где ψ_S – значение ψ на сепаратрисе. В данном случае $\psi/\psi_S = 8\psi/(aR^4)$. При $\varepsilon = \sqrt{a/b} = 1$ согласно (2.30) и (3.24) имеем

$$V' = \frac{4\pi^2}{aR}, \quad U' = \frac{4\pi^2}{aR^3} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^3}}, \quad Q_4 = \frac{4\pi^2 R}{a},$$

$$Q_5 = \pi^2 R^3 a \left(\frac{\alpha^3}{2} + 1 - \sqrt{1-\alpha^3} \right). \quad (3.30)$$

Подставляя функции (3.27)–(3.30) в критерии устойчивости (3.25), (3.26), можно убедиться, что наиболее жестким является рассмотренное выше условие устойчивости в окрестности магнитной оси. В случае предельно большой тороидальности основным стабилизирующим фактором для плазмы, находящейся на магнитных поверхностях вблизи сепаратрисы ($\alpha \approx 1$), становится скос, описываемый членом, пропорциональным S^2 .

Автор весьма признателен акад. М.А. Леонтовичу и В.Д. Шаfranову за полезные дискуссии, а также Т.Д. Кузнецовой, рассчитавшей и построившей сечения магнитных поверхностей, приведенные в данной статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Условия гидромагнитной устойчивости плазмы могут быть получены из вариационного принципа [15]

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\text{rot}[\xi \mathbf{B}])^2 + \gamma p (\text{div} \xi)^2 + (\xi \nabla p) \text{div} \xi + [\mathbf{j} \xi] \text{rot}[\xi \mathbf{B}] \right\} dt > 0 \quad (1)$$

для произвольного смещения ξ . Если ввести систему координат θ, ζ, V , связанную с магнитными поверхностями, так, чтобы θ и ζ были циклическими координатами на магнитных поверхностях с периодами изменения, равными единице, а в качестве третьей координаты выбрать объем V и потребовать, чтобы $(\nabla \theta \nabla \zeta) \nabla V = 1$, то выражение для δw можно представить в виде [4]

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\text{rot}[\xi \mathbf{B}] + \xi_V \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^2} \right)^2 + \gamma p (\text{div} \xi)^2 - 2 \xi_V \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^4} (\mathbf{B} \nabla) \nabla V \right\} d\theta d\zeta dV. \quad (2)$$

При этом векторы \mathbf{B} , \mathbf{j} и ξ определяются выражениями

$$\mathbf{B} = \dot{\Phi}[\nabla V \nabla \theta] + \dot{\chi}[\nabla \xi \nabla V], \quad \mathbf{j} = J[\nabla V \nabla \theta] + I[\nabla \zeta \nabla V],$$

$$\xi = \xi_\theta[\nabla \zeta \nabla V] + \xi_\zeta[\nabla V \nabla \theta] + \xi_V[\nabla \theta \nabla \zeta], \quad (3)$$

так что контравариантные компоненты этих векторов соответственно равны

$$B^i = \{\dot{\chi}, \dot{\Phi}, 0\}, \quad j^i = \{J, I, 0\}, \quad \xi^i = \{\xi_\theta, \xi_\zeta, \xi_V\}. \quad (4)$$

Если ввести обозначения

$$\mu = \dot{\Phi} \xi_\theta - \dot{\chi} \xi_\zeta, \quad \eta = J \xi_\theta - I \xi_\zeta, \quad (5)$$

то получим

$$[\nabla V \nabla \theta] = \frac{I \mathbf{B} - \dot{\chi} \mathbf{j}}{\dot{p}}, \quad [\nabla \zeta \nabla V] = \frac{\dot{\Phi} \mathbf{j} - J \mathbf{B}}{\dot{p}},$$

$$\xi = \frac{\mu \mathbf{j} - \eta \mathbf{B}}{\dot{p}} + \xi_V [\nabla \theta \nabla \zeta]. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что выражения для $\text{div } \xi$ и $\text{rot } [\xi \mathbf{B}]$ будут

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\dot{p}} (\mathbf{j} \nabla \mu - \mathbf{B} \nabla \eta) + \frac{\partial \xi_V}{\partial V}, \quad (7)$$

$$\text{rot } [\xi \mathbf{B}] = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_V \dot{\Phi}}{\partial V} \right) [\nabla \theta \nabla V] + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{\partial \xi_V \dot{\chi}}{\partial V} \right) [\nabla \zeta \nabla V] + \left(\frac{\partial \xi_V \dot{\Phi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \xi_V \dot{\chi}}{\partial \theta} \right) [\nabla \theta \nabla \zeta]. \quad (8)$$

1. Для получения критерия конвективной устойчивости положим $\xi = \xi(V)$. При этом потенциальная энергия (2) примет вид

$$\begin{aligned} \delta w = \frac{1}{2} \int & \left\{ \dot{\xi}_V^2 (\gamma p + \mathbf{B}^2) - 2 \xi_V \dot{\xi}_V \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B}}{\dot{p}} + \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^2} \right) + \right. \\ & \left. + \xi_V^2 \left[\left(\frac{\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B}}{\dot{p}} + \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^2} \right)^2 - 2 \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^4} (\mathbf{B} \nabla) \nabla V \right] \right\} d\theta d\zeta dV. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем последний член этого выражения. Поскольку $\mathbf{B} \nabla V = 0$, используя векторное тождество $(\mathbf{B} \nabla) \nabla V + (\nabla V \nabla) \mathbf{B} = [\mathbf{j} \nabla V]$, получим

$$\Lambda \equiv \frac{2}{|\nabla V|^4} [\mathbf{j} \nabla V] (\mathbf{B} \nabla) \nabla V = \frac{[\mathbf{j} \nabla V]}{|\nabla V|^4} ([\mathbf{j} \nabla V] + \mathbf{K}), \quad (10)$$

где $\mathbf{K} = (\mathbf{B} \nabla) \nabla V - (\nabla V \nabla) \mathbf{B}$. Согласно определению координаты V имеем

$$\nabla V_i = \{0, 0, 1\}, \quad \nabla V^i = g^{i3}, \quad |\nabla V|^2 = g^{33}.$$

Отсюда, поскольку $K^i = (\mathbf{B} \nabla) \nabla V^i - (\nabla V \nabla) B^i$, получаем

$$K^i = \{\mathbf{B} \nabla g^{i3} - g^{33} \ddot{\chi}^i, \mathbf{B} \nabla g^{23} - g^{33} \dot{\Phi}, \mathbf{B} \nabla g^{33}\},$$

и, следовательно,

$$[\mathbf{j} \nabla V] \mathbf{K} = |\nabla V|^4 \left(\Omega - \mathbf{B} \nabla \frac{j g^{23} - j g^{13}}{g^{33}} \right) = |\nabla V|^4 \left(\Omega - \mathbf{B} \nabla \frac{[\mathbf{j} \nabla V]_3}{|\nabla V|^2} \right). \quad (11)$$

Подставив это соотношение в (10), найдем

$$\Lambda = \frac{[\mathbf{j} \nabla V]^2}{|\nabla V|^4} + \Omega - \mathbf{B} \nabla \frac{[\mathbf{j} \nabla V]_3}{|\nabla V|^2} = \frac{j^2}{|\nabla V|^2} + \Omega - \text{div } \frac{[\mathbf{j} \nabla V]_3}{|\nabla V|^2} \mathbf{B}. \quad (12)$$

При $\xi_V = \xi_V(V)$ последнее слагаемое в (12) не дает вклада в интеграл (9) и поэтому

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ \dot{\xi}_V^2 (\gamma p + \mathbf{B}^2) - \frac{2 \xi_V \dot{\xi}_V}{\dot{p}} [\mathbf{B} (\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B}) - \dot{p}^2] + \frac{\xi_V^2}{\dot{p}^2} [(\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B})^2 + \dot{p}^2 \Omega] \right\} d\theta d\zeta dV. \quad (13)$$

Величина δw будет положительной, если положителен интеграл по объему δV , заключенному между двумя соседними магнитными поверхностями. Таким образом, если обозначить среднее по объему слоя δV угловыми скобками, то условие положительной определенности (13) будет

$$-\langle (\mathbf{B} (\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B}) - \dot{p}^2) \rangle^2 + \langle \gamma p + \mathbf{B}^2 \rangle \langle (\mathbf{Sj} - \Omega \mathbf{B})^2 + \dot{p}^2 \Omega \rangle > 0. \quad (14)$$

Отсюда, раскрывая скобки, получим критерий конвективной устойчивости в виде

$$\frac{S^2}{\dot{p}^2} \langle (j^2) \langle \mathbf{B}^2 \rangle - \langle \mathbf{jB} \rangle^2 \rangle + 2S \langle \mathbf{jB} \rangle - \Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - \dot{p}^2 + \gamma p \left\langle \left(\frac{\mathbf{jS} - \mathbf{B}\Omega}{\dot{p}} \right)^2 + \Omega \right\rangle > 0. \quad (15)$$

2. Условие локальной устойчивости, полученное в [1–4], имеет вид

$$\left(\frac{S}{2} \oint \frac{dl}{B} + \oint \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \frac{dl}{B} \right)^2 - 2 \oint \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \frac{dl}{B} \oint \frac{[\mathbf{j}\nabla V](\mathbf{B}\nabla)\nabla V}{|\nabla V|^4} \frac{dl}{B} > 0, \quad (16)$$

где интегрирование производится по замкнутым силовым линиям на рациональных магнитных поверхностях. Согласно соотношениям (10) и (12), поскольку последний член в (12) обращается в нуль при интегрировании вдоль силовой линии, условие (16) можно записать в виде

$$\left(\frac{S}{2} \oint \frac{dl}{B} + \oint \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \frac{dl}{B} \right)^2 - \oint \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \frac{dl}{B} \left(\oint \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \frac{dl}{B} - \Omega \oint \frac{dl}{B} \right) > 0. \quad (17)$$

В полученном выражении явно выделяется инвариантная поверхностная функция Ω , определяющая стабилизацию минимумом \bar{B} , а также видно, что положительный квадрат второго члена в первой скобке в значительной степени компенсируется первым членом во второй скобке (17). Вводя обозначение

$$\langle f \rangle_c = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B},$$

приходим к условию локальной устойчивости в форме

$$\frac{1}{4} S^2 + S \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \Omega \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_c^2 \right) > 0. \quad (18)$$

Критерий конвективной устойчивости (15) и критерий локальной устойчивости (18) и были использованы выше в тексте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7. P. 401.
2. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
3. Bineau M. // Ibid. P. 35.
4. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510.
5. Mercier C. // Nucl. Fusion. 1964. Vol. 4. P. 213.
6. Саїдем В. Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термо-ядерные реакции. С. 89.
7. Rosenbluth M., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. Vol. 1. P. 120.
8. Кадо́мцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 16.
9. Кадо́мцев Б.Б. // Там же. С. 380.
10. Шафранов В.Д. // Там же. С. 61.
11. Kruskal M.D., Johnson J.L., Gottlieb M.B. // Phys. Fluids. 1958. Vol. 1. P. 421.
12. Шафранов В.Д. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1957. Т. 33. С. 710.
13. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 2. С. 92.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
15. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.

ГИДРОМАГНИТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В КВАЗИОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

1. РАВНОВЕСИЕ, ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И СИСТЕМА КООРДИНАТ

Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле \mathbf{B} имеют вид

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.1)$$

Мы будем рассматривать ограниченные плазменные конфигурации, магнитные поверхности которых представляют собой систему вложенных тороидальных поверхностей, окружающих магнитную ось. Из (1.1) следует, что векторы \mathbf{j} и \mathbf{B} лежат на магнитных поверхностях, совпадающих с поверхностями равного давления p .

Для внутренней устойчивости идеально проводящей плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия [1]

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\text{rot} [\xi\mathbf{B}])^2 + \gamma p (\text{div } \xi)^2 + (\xi \nabla p) \text{div } \xi + [\mathbf{j}\xi] \text{rot} [\xi\mathbf{B}] \right\} d\tau \quad (1.2)$$

была положительной при произвольных смещениях ξ , удовлетворяющих условию обращения ξ_{\perp} в нуль на границе плазмы S .

Для получения условий устойчивости удобно использовать систему криволинейных координат x^1, x^2, x^3 , связанную с магнитными поверхностями, таким образом, чтобы координаты x^1 и x^2 изменялись вдоль магнитных поверхностей, а x^3 – в поперечном направлении. В качестве координаты x^3 удобно выбрать текущий объем V системы вложенных магнитных поверхностей, отсчитываемый от магнитной оси $V = 0$, являющейся замкнутой пространственной кривой s . При этом векторы \mathbf{j} и \mathbf{B} будут иметь по две отличные от нуля контравариантные компоненты $j^i = \{j^1, j^2, 0\}$, $B^i = \{B^1, B^2, 0\}$, а ∇p – лишь одну ковариантную компоненту $\partial p / \partial x^3 = \sqrt{g} (j^1 B^2 - j^2 B^1)$.

Как показано в работах [2, 3], возможно ввести "натуральную" поверхностную систему координат, в которой $x^1 = \theta$, $x^2 = \zeta$ – циклические координаты с периодами изменения, равными единице, детерминант метрического тензора $g = 1$, а контравариантные компоненты \mathbf{j} и \mathbf{B} соответственно равны

$$j^i = \{\dot{i}, \dot{j}, 0\}, \quad B^i = \{\dot{\chi}, \dot{\Phi}, 0\}. \quad (1.3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по V , $J(V)$ и $I(V)$ – продольный и азимутальный токи, а $\dot{\Phi}(V)$ и $\dot{\chi}(V)$ – продольный и азимутальный магнитные потоки внутри магнитной поверхности, ограничивающей объем V .

Элемент длины, определяющий метрику такой системы координат, записывается как

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \mathbf{e}_3 dx^3 = [\nabla x^2 \nabla x^3] dx^1 + [\nabla x^3 \nabla x^1] dx^2 + [\nabla x^1 \nabla x^2] dx^3. \quad (1.4)$$

При этом $g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$, $a^i = \mathbf{a} \nabla x^i$, $a_i = \mathbf{e}_i \mathbf{a}$, $\partial / \partial x^i = \mathbf{e}_i \nabla$, а векторы \mathbf{e}_i могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \dot{p}^{-1} (\dot{\Phi} \mathbf{j} - J \mathbf{B}), & \mathbf{e}_2 &= \dot{p}^{-1} (I \mathbf{B} - \dot{\chi} \mathbf{j}), \\ \mathbf{e}_3 &= k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + \nabla V / |\nabla V|^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

* Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 2063–2069.

Из уравнения $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$ вытекает, что функции k_1 и k_2 удовлетворяют следующим "магнитным дифференциальным уравнениям":

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\nabla k_1 &= -\ddot{\chi} - \frac{\mathbf{e}_2}{|\nabla V|^2} \left(\mathbf{j} - \frac{2}{|\nabla V|^2} [\nabla V, (\nabla V \nabla) \mathbf{B}] \right), \\ \mathbf{B}\nabla k_2 &= -\ddot{\Phi} + \frac{\mathbf{e}_1}{|\nabla V|^2} \left(\mathbf{j} - \frac{2}{|\nabla V|^2} [\nabla V, (\nabla V \nabla) \mathbf{B}] \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. УСЛОВИЯ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Если через \mathbf{f} и \mathbf{F} обозначить векторы

$$\mathbf{f} = \text{rot} [\xi \mathbf{B}] + \mathbf{B} \text{div } \xi + \mathbf{D} \xi^3, \quad \mathbf{F} = [\mathbf{j} \mathbf{e}], \quad (2.1)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{e} определяются своими контравариантными компонентами $D^i = \{\partial B^1 / \partial x^3, \partial B^2 / \partial x^3, 0\}$, $e^i = \{0, 0, 1\}$ в заданной поверхностной системе координат x^1, x^2, x^3 , то можно показать, что имеет место тождество

$$\text{div} (\xi \mathbf{F}) \xi^3 \mathbf{B} = (\xi \mathbf{F}) f^3 + (f \mathbf{F}) \xi^3. \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) позволяет преобразовать выражение (1.2) к виду

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\text{rot} [\xi \mathbf{B}] + [\mathbf{j} \mathbf{e}] \xi^3)^2 + \gamma p (\text{div } \xi)^2 + [\mathbf{j} \mathbf{e}] (\mathbf{D} - [\mathbf{j} \mathbf{e}]) (\xi^3)^2 \right\} d\tau. \quad (2.3)$$

Заметим, что выражение (2.3) отличается от соответствующего выражения, полученного в [3], заменой вектора $\mathbf{n} = \nabla V / |\nabla V|^2$ на $\mathbf{e} = \sqrt{g} [\nabla x^1 \nabla x^2]$. Обозначая точкой производные по $x^3 = V$, введем поверхностные функции

$$\dot{p} = \dot{I} \dot{\Phi} - j \dot{\chi}, \quad \Omega = \dot{I} \ddot{\Phi} - j \ddot{\chi}, \quad S = \dot{\chi} \ddot{\Phi} - \ddot{\Phi} \dot{\chi}. \quad (2.4)$$

Функция

$$S = \dot{\Phi}^2 \frac{d}{dV} \frac{d\chi}{d\dot{\Phi}}$$

является характеристикой скоса (shear) магнитных силовых линий на соседних магнитных поверхностях, а функция Ω , которая при $S = 0$ равна $\dot{p} \ddot{\Phi} / \dot{\Phi}$, характеризует "минимум \bar{B} ".

В натуральных координатах $x^1 = \theta$, $x^2 = \zeta$, $x^3 = V$ формула (2.3) принимает вид

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\text{rot} [\xi \mathbf{B}] + [\mathbf{j} \mathbf{e}] \xi^3)^2 + \gamma p (\text{div } \xi)^2 - (\Omega + [\mathbf{j} \mathbf{e}]) (\xi^3)^2 \right\} d\tau. \quad (2.5)$$

A. Найденное выражение (2.5) для потенциальной энергии δw позволяет сразу получить достаточное условие устойчивости плазмы

$$\Omega + [\mathbf{j} \mathbf{e}]^2 \leq 0. \quad (2.6)$$

Введем понятие квазиоднородного магнитного поля, считая малыми порядка ϵ величины, содержащие производные магнитного поля по V , т.е. полагая $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x^1, x^2, \epsilon V)$. При этом величины j , \dot{p} , S будут порядка ϵ , а Ω – порядка ϵ^2 . Поскольку при $g = 1$ вектор $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ и из уравнений (1.6) следует, что коэффициенты k_1 и k_2 являются малыми порядка ϵ , то с точностью до членов порядка ϵ будет

$$\mathbf{e} \approx \nabla V / |\nabla V|^2. \quad (2.7)$$

Таким образом, при условии квазиоднородности магнитного поля достаточный критерий устойчивости (2.6) может быть записан в инвариантной форме

$$\Omega + \mathbf{j}^2 / |\nabla V|^2 \leq 0. \quad (2.8)$$

Б. Условие квазиоднородности позволяет также получить необходимый и достаточный критерий устойчивости плазмы. Обозначим контравариантные компоненты смещения ξ как $\xi^i = \{\xi_\theta, \xi_\zeta, \xi_V\}$ и введем их комбинации $\mu = \dot{\Phi}\xi_\theta - \dot{\chi}\xi_\zeta$ и $\eta = j\xi_\theta - i\xi_\zeta$.

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{e}_1 \dot{\chi} + \mathbf{e}_2 \dot{\Phi}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_1 i + \mathbf{e}_2 j, \\ \xi &= \mathbf{e}_1 \xi_\theta + \mathbf{e}_2 \xi_\zeta + \mathbf{e}_3 \xi_V = \dot{p}^{-1} (\mu \mathbf{j} - \eta \mathbf{B}) + \xi_V \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выражение для $\text{rot} [\xi \mathbf{B}]$ можно записать в виде

$$\text{rot} [\xi \mathbf{B}] = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial V} \xi_V \dot{\chi} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial V} \xi_V \dot{\Phi} \right) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{B} \nabla \xi_V) \mathbf{e}_3. \quad (2.10)$$

Представляя ξ_V и μ разложениями по параметру неоднородности ε :

$$\xi_V = \xi_V^0 + \varepsilon \xi_V^1 + \dots, \quad \mu = \mu^0 + \varepsilon \mu^1 + \dots \quad (2.11)$$

и разлагая также $\dot{\Phi}$ и $\dot{\chi}$ по εV , получим

$$\begin{aligned} \text{rot} [\xi \mathbf{B}] &= \left\{ \frac{\partial \mu^0}{\partial \zeta} - \dot{\chi} \dot{\xi}_V^0 + \varepsilon \left(\frac{\partial \mu^1}{\partial \zeta} - \dot{\chi} \dot{\xi}_V^1 - \dot{\chi} \frac{\partial}{\partial V} V \xi_V^0 \right) \right\} \mathbf{e}_1 - \\ &- \left\{ \frac{\partial \mu^0}{\partial \theta} + \dot{\Phi} \dot{\xi}_V^0 + \varepsilon \left(\frac{\partial \mu^1}{\partial \theta} + \dot{\Phi} \dot{\xi}_V^1 - \dot{\Phi} \frac{\partial}{\partial V} V \xi_V^0 \right) \right\} \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left\{ \mathbf{B} \nabla \xi_V^0 + \varepsilon (\mathbf{B} \nabla \xi_V^1 + V \mathbf{D} \nabla \xi_V^0) \right\} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Будем искать достаточное условие устойчивости методом последовательных приближений по параметру ε . В нулевом приближении величина $\delta w > 0$, если $\text{rot} [\xi \mathbf{B}] \neq 0$. Требование $\text{rot} [\xi \mathbf{B}] = 0$ приводит к уравнениям

$$\dot{\chi} \dot{\xi}_V^0 = \partial \mu^0 / \partial \zeta, \quad \dot{\Phi} \dot{\xi}_V^0 = -\partial \mu^0 / \partial \theta, \quad \mathbf{B} \nabla \xi_V^0 = 0. \quad (2.13)$$

Эти уравнения могут быть удовлетворены, только если в нулевом приближении (в котором $S = 0$) все силовые линии замкнуты: $n \dot{\Phi} = m \dot{\chi}$ и, кроме того, $\xi_V^0 = \xi_V^0(u, V)$, где $u = m\theta - n\zeta$, так что $\mathbf{B} \nabla u = 0$ [3].

Представим далее векторы \mathbf{B} , \mathbf{j} и $\text{rot} [\xi \mathbf{B}]$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \alpha_1 [\mathbf{eB}] + \beta_1 [\mathbf{ej}] + \gamma_1 \mathbf{e}, \quad \mathbf{j} = \alpha_2 [\mathbf{eB}] + \beta_2 [\mathbf{ej}] + \gamma_2 \mathbf{e}, \\ \text{rot} [\xi \mathbf{B}] &= a \mathbf{B} + b \mathbf{j} + c \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где коэффициенты α_i , β_i и γ_i равны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{[\mathbf{eB}][\mathbf{ej}]}{\dot{p} e^2}, \quad \beta_1 = \frac{[\mathbf{eB}]^2}{\dot{p} e^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\mathbf{eB}}{e^2}, \\ \alpha_2 &= -\frac{[\mathbf{j}e]^2}{\dot{p} e^2}, \quad \beta_2 = \frac{[\mathbf{eB}][\mathbf{ej}]}{\dot{p} e^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\mathbf{ej}}{e^2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

а коэффициенты a , b и c определяются формулой (2.12). В этих обозначениях

$$\begin{aligned} (\text{rot}[\xi\mathbf{B}] + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi_v)^2 = & \left\{ \left(b\alpha_2 - b\alpha_1 \frac{\beta_2}{\beta_1} + \xi_v \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) [\mathbf{e}\mathbf{B}] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{e^2} \left(a + b \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\xi_v}{\beta_1} \right) [\mathbf{e}[\mathbf{B}\mathbf{e}]] + (c + \gamma_1 a + \gamma_2 b) \mathbf{e} \right\}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку все три вектора в фигурных скобках взаимно ортогональны, то выражение (2.16) может только уменьшиться, если мы отбросим последние два вектора. Таким образом, в первом приближении по ε получаем

$$(\text{rot}[\xi\mathbf{B}] + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi_v^0)^2 \geq \frac{1}{[\mathbf{B}\mathbf{e}]^2} \left(\mathbf{B}\nabla\mu^1 + S \frac{\partial}{\partial V} v\xi_v^0 + [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}]\xi_v^0 \right)^2. \quad (2.17)$$

Отбрасывая, кроме того, в (2.5) положительный член $\gamma\rho(\text{div } \xi)^2$, имеем

$$\delta w \geq \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{[\mathbf{B}\mathbf{e}]^2} \left(\mathbf{B}\nabla\mu^1 + S \frac{\partial}{\partial V} v\xi_v^0 + [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}]\xi_v^0 \right)^2 - (\Omega + [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2)(\xi_v^0)^2 \right\} d\tau. \quad (2.18)$$

Обозначим угловыми скобками усреднение по замкнутой силовой линии \mathbf{B} :

$$\langle f \rangle = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}. \quad (2.19)$$

Интегрируя в (2.18) вдоль силовой линии и воспользовавшись при этом неравенством Шварца $\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle \geq \langle ab \rangle^2$, где

$$\begin{aligned} a &= \left(\mathbf{B}\nabla\mu^1 + S \frac{\partial}{\partial V} v\xi_v^0 + [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}]\xi_v^0 \right) / [\mathbf{B}\mathbf{e}], \\ b &= [\mathbf{B}\mathbf{e}], \end{aligned}$$

получим

$$\delta w \geq \frac{1}{2} \int \left\{ \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle^{-1} \left\langle S \frac{\partial}{\partial V} v\xi_v^0 + [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}]\xi_v^0 \right\rangle^2 - \langle \Omega + [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 \rangle (\xi_v^0)^2 \right\} d\tau. \quad (2.20)$$

Далее, так как в силу граничного условия $\xi_v^0|_{\Sigma} = 0$

$$\int \frac{\partial}{\partial V} (v\xi_v^0) \xi_v^0 dV = \int (\xi_v^0)^2 dV + \frac{1}{2} \int v \frac{\partial}{\partial V} (\xi_v^0)^2 dV = \frac{1}{2} \int (\xi_v^0)^2 dV, \quad (2.21)$$

то применение неравенства Шварца

$$\int (\xi_v^0)^2 dV \int \left(\frac{\partial}{\partial V} v\xi_v^0 \right)^2 dV \geq \left\{ \int \xi_v^0 \frac{\partial}{\partial V} (v\xi_v^0) dV \right\}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \int (\xi_v^0)^2 dV \right\}^2 \quad (2.22)$$

приводит к следующему достаточному критерию устойчивости:

$$\langle S/2 + [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle - \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle \langle \Omega + [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 \rangle \geq 0. \quad (2.23)$$

При условии квазиоднородности магнитного поля критерий (2.23) согласно (2.7) принимает вид

$$\left\langle \frac{S}{2} + \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \Omega + \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \geq 0. \quad (2.24)$$

Можно показать [4], что к такому же виду можно преобразовать необходимый и достаточный критерий устойчивости относительно локальных возмущений [3, 5, 6]. Таким образом, неравенство (2.24) представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости плазмы в квазиоднородном магнитном поле.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ОКРЕСТНОСТИ МАГНИТНОЙ ОСИ

Критерий устойчивости (2.24) удобно записать в виде

$$\frac{S^2}{4} + \left(S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) - \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) \geq 0. \quad (3.1)$$

Здесь первый член определяет стабилизирующее действие скоса, первая круглая скобка описывает стабилизацию минимумом \bar{B} , а вторая круглая скобка положительна в силу неравенства Шварца. Заметим, что усреднение по силовой линии можно приближенно заменить на усреднение по объему бесконечно тонкого слоя между соседними магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle \approx \frac{d}{dV} \int f d\tau.$$

В окрестности магнитной оси объем $V \rightarrow 0$, и все величины, входящие в критерий (3.1), можно разложить по степеням V . При этом члены, стоящие в первых круглых скобках, порядка $1/V^2$, и их достаточно вычислить в самом грубом приближении, в то время как вторые круглые скобки содержат взаимно компенсирующиеся члены порядка $1/V^4$, и при их вычислении следует соблюдать осторожность, чтобы сохранить все величины порядка $1/V^2$.

Воспользовавшись приближенными соотношениями

$$\Phi \approx \dot{\Phi}V \approx B_s \sigma, \quad J \approx \dot{J}V \approx j_s \sigma, \quad (3.2)$$

где σ – площадь поперечного сечения, а B_s и j_s берутся на магнитной оси s , получим

$$S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \approx \left\langle \frac{1}{|\nabla V|^2} \right\rangle B_s^2 \dot{\Phi} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}. \quad (3.3)$$

При вычислении вторых круглых скобок в (3.1) учтем, что $j_s(s) = \text{const} \cdot B_s(s)$, и представим \mathbf{j} и \mathbf{B} в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_1, \quad (3.4)$$

где \mathbf{j}_1 и \mathbf{B}_1 являются малыми величинами порядка V .

С точностью до членов $1/V^2$ получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 &\approx \left\langle \frac{1}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{j_s^2 B_1^2 + B_s^2 j_1^2 - 2(j_s B_s)(j_1 B_1)}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \\ &- \left\langle \frac{\mathbf{B}_s \mathbf{j}_1}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\mathbf{j}_s \mathbf{B}_1}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\mathbf{B}_s \mathbf{j}_1}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{j}_s \mathbf{B}_1}{|\nabla V|^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Можно показать, что последние три члена в правой части порядка единицы и ими можно пренебречь. Для преобразования оставшихся членов используем уравнение равновесия $|\nabla p|^2 = j^2 B^2 - (\mathbf{j}\mathbf{B})^2$, разложенное по \mathbf{B}_1 и \mathbf{j}_1 :

$$|\nabla p|^2 \approx j_s^2 B_1^2 + B_s^2 j_1^2 - 2(j_s B_s)(j_1 B_1) - (j_s B_1)^2 - (B_s j_1)^2 + 2(j_s B_1)(B_s j_1). \quad (3.6)$$

В результате найдем

$$\left\langle \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{jB}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \approx \left\langle \frac{1}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\{ \dot{p}^2 + \left\langle \frac{(j_s B_1 - B_s j_1)^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь выражение в круглых скобках можно представить также в виде

$$(j_s B_1 - B_s j_1)^2 \approx \left(j_s \frac{\partial B_s}{\partial \rho} - B_s \frac{\partial j_s}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 = \left(B_s^2 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{j_s}{B_s} \right)^2, \quad (3.8)$$

где ρ – расстояние от магнитной оси s .

Если в качестве аргумента всех поверхностных функций принять продольный поток Φ , то критерий устойчивости в окрестности магнитной оси s запишется как

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\chi''}{V'} \right)^2 + \left\langle \frac{1}{|\nabla \Phi|^2} \right\rangle \left\{ p' \left(B_s^2 \frac{V''}{V'} - p' \right) - B_s^4 \left\langle \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{j_s}{B_s} \right)^2 / |\nabla \Phi|^2 \right\rangle \right\} \geq 0, \quad (3.9)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по Φ .

Рассмотрим порознь условия устойчивости для конфигураций без продольного тока $j_s \approx 0$ и для аксиально-симметричных конфигураций, равновесие которых невозможно без продольного тока.

А. В отсутствие продольного тока $j_s = 0$ условие устойчивости (3.9) сводится к требованию "минимума \bar{B} ":

$$-p' \leq -B_s^2 V'' / V'. \quad (3.10)$$

Представляя давление плазмы p в виде

$$p = p_0 (1 - \Phi / \Phi_\Sigma), \quad (3.11)$$

получим условие на отношение давления плазмы к магнитному давлению $\beta = 2p / B_s^2$:

$$\beta \leq -2\Phi_\Sigma V'' / V'. \quad (3.12)$$

Б. В случае аксиально-симметричных конфигураций [7]

$$B_s = I_A(\psi) / r, \quad j_s = r p'(\psi) - I_A(\psi) I_A'(\psi) / r, \\ \psi = -\chi / 2\pi, \quad (3.13)$$

где r – расстояние от оси симметрии, $R - r = \rho \cos \omega$, R – радиус магнитной оси. Поскольку ψ пропорционально V , то согласно (3.9) получим

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\chi''}{V'} \right)^2 + \left\langle \frac{p'}{|\nabla \Phi|^2} \right\rangle \left\{ B_s^2 \frac{V''}{V'} - p' \left(1 + \frac{16\pi^2 B_s^2}{\chi'^2} \left\langle \frac{(r-R)^2}{|\nabla \Phi|^2} \right\rangle \right) \right\} \geq 0. \quad (3.14)$$

Условие устойчивости (3.14) справедливо для произвольных приосевых сечений магнитных поверхностей. В случае круговых нормальных сечений магнитных поверхностей, когда $\Phi \approx B_s \pi \rho^2$, $V \approx 2\pi^2 R \rho^2$, условие устойчивости (3.14) можно записать в виде [8]

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\chi''}{V'} \right)^2 + \left\langle \frac{p'}{|\nabla \Phi|^2} \right\rangle \left\{ B_s^2 \frac{V''}{V'} - p' \left(1 + \frac{2}{\chi'^2} \right) \right\} \geq 0. \quad (3.15)$$

Для цилиндрической геометрии это условие переходит в критерий Сайдема [9]. В случае же тороидальной геометрии оно сводится к ограничению на продольный ток: $Rj_s/B_s \leq 2$.

Автор весьма признателен акад. М.А. Леонтовичу за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
2. *Hamada S.* // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
3. *Green J.M., Johnson J.L.* // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510.
4. *Соловьев Л.С.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
5. *Mercier C.* // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
6. *Vineau M.* // Ibid. P. 35.
7. *Шафранов В.Д.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1957. Т. 33. С. 710.
8. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. С. 811.
9. *Сайдем В.* Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.

КРИТЕРИЙ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ОКРЕСТНОСТИ МАГНИТНОЙ ОСИ*

Общий критерий устойчивости произвольной равновесной плазменной конфигурации имеет вид [1-5]

$$\langle S/2 - \mathbf{jB}|\nabla V|^{-2} \rangle^2 - \langle \mathbf{B}^2|\nabla V|^{-2} \rangle \langle \Omega - \mathbf{j}^2|\nabla V|^{-2} \rangle \geq 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{B} – магнитное поле, $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, V – текущий объем системы вложенных магнитных поверхностей (м.п.) с магнитной осью (м.о.) $V=0$, $\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f d\tau$, $\nabla p = [\mathbf{jB}]$, $p' = I'\Phi' - J'\chi'$. $\Omega = I'\Phi'' - J'\chi''$, $S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi''$, $\Phi(V)$ и $J(V)$ – продольные, а $\chi(V)$ и $I(V)$ – поперечные потоки векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} .

В натуральной [6, 7] поверхностной системе координат θ, ζ, V

$$j^i = \{I', J', 0\}, \quad B^i = \{\chi', \Phi', 0\}, \quad B_i = \{\varphi_\theta + J, \varphi_\zeta - I, \varphi_V\}, \\ A_i = \{\Phi, -\chi, 0\},$$

где φ и \mathbf{A} – скалярный и векторный потенциалы магнитного поля, а индексы θ, ζ, V означают частные производные по соответствующей координате.

В окрестности м.о. критерий (1) преобразуется к виду

$$p' \left\{ V''/V' - p' \left\langle \mathbf{B}^{-2} \left(1 + \varphi_\theta^2 |\nabla \Phi|^{-2} \right) \right\rangle \right\} > 0, \quad (2)$$

где штрихами обозначены производные по Φ . Введем скругляющую [7] осевую систему координат r, ϑ, s , прокручивающуюся вместе с м.п. квадратичного по r приближения со скоростью $\delta'(s)$. Метрика такой координатной системы определяется квадратичной формой $dr^2 = g_{ik} dx^i dx^k$,

$$dr^2 = (q_0 + q_1 \cos 2\vartheta) dr^2 + (q_0 - q_1 \cos 2\vartheta) r^2 d\vartheta^2 + (h_s^2 + q_2 r^2) ds^2 - \\ - 2q_1 r \sin 2\vartheta dr d\vartheta + r(q_0' + q_1' \cos 2\vartheta) dr ds - \\ - (2u'B_0^{-1} + q_1' \sin 2\vartheta) r^2 d\vartheta ds, \quad (3)$$

где $q_0(s) = B_0^{-1} \text{ch } \eta$, $q_1(s) = -B_0^{-1} \text{sh } \eta$, $q_2 = (u'\lambda_1 \cos \vartheta - \lambda_2' \sin \vartheta)^2 + (u'\lambda_2 \sin \vartheta + \lambda_1' \cos \vartheta)^2$, $\lambda_1 = (B_0 e^\eta)^{-1/2}$, $\lambda_2 = (B_0 e^{-\eta})^{-1/2}$, $u' = \delta' - \kappa$, $h_s = 1 - r f_c$, $f_c = c_1 \cos \vartheta + c_2 \sin \vartheta$, $c_1 = k\lambda_1 \cos \theta$, $c_2 = k\lambda_2 \sin \vartheta$, e^η – отношение полуосей нормального эллиптического сечения м.п. в окрестности м.о., $\delta(s)$ – угол полуоси эллипса с главной нормалью к м.о., $k(s)$ и $\kappa(s)$ – кривизна и кручение м.о., $j_0(s)$ и $B_0(s)$ – значения j и B на м.о. Детерминант g_{ik} равен $g = r^2 B_0^{-2} h_s^2$. Введем обозначения $f_a = a_1 \cos \vartheta + a_2 \sin \vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + a_4 \sin 3\vartheta$, $F_b = b_0 + b_1 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + b_3 \cos 4\vartheta + b_4 \sin 4\vartheta$ для соответствующих тригонометрических функций с коэффициентами $a_i(s)$, $b_i(s)$ и т.д.

* Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. С. 1052-1054.

Контравариантные компоненты \mathbf{B} в координатах r, ϑ, s представим в виде

$$\begin{aligned}\sqrt{g}B^1 &= r^3 f_a + r^4 F_l + \dots, & \sqrt{g}B^2 &= v'r + r^2 f_b + r^3 F_m + \dots, \\ \sqrt{g}B^3 &= r + r^2 f_c + r^3 F_n + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Выражения для скалярного потенциала ϕ и поверхностной функции ψ будут

$$\phi = \int_0^s B_0 ds + r^2 F_D + r^3 f_\phi + \dots, \quad \psi = r^2 + r^3 f_\alpha + \dots\quad (5)$$

Преобразование от координат r, ϑ, s к координатам θ, ζ, V ищем в виде

$$V = V_\psi(r^2 + r^3 f_\alpha + \dots), \quad \theta = k_0 \vartheta + \int_0^s k_1 ds + r f_\beta + \dots, \quad \zeta = \int_0^s k_2 ds + r f_\gamma + \dots, \quad (6)$$

при этом для $k_i(s)$ и $v'(s)$ получаются формулы

$$\begin{aligned}k_0 &= 1/(2\pi), \quad k_1 = \chi_V/B_0 - v'/(2\pi), \quad k_2 = \Phi_V/B_0, \\ v' \operatorname{ch} \eta &= u' - j_0/(2B_0),\end{aligned}\quad (7)$$

$$\Phi_\psi = \pi, \quad 2\pi\chi_\phi = \oint v' ds, \quad V_\phi = \oint B_0^{-1} ds, \quad J_\psi = \pi j_0/B_0, \quad I_\psi = p_\psi V_\phi + J_\psi \chi_\phi,$$

где индексами ψ, Φ, V обозначены производные по ψ, Φ, V , а для функций $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ получаются стандартные уравнения:

$$\begin{aligned}\partial f_\alpha / \partial s + v' \partial f_\alpha / \partial \vartheta &= -2f_a, \\ \partial f_\beta / \partial s + v' \partial f_\beta / \partial \vartheta &= -k_0 f_b - (2k_1 + k_0 v') f_c, \\ \partial f_\gamma / \partial s + v' \partial f_\gamma / \partial \vartheta &= -2k_2 f_c.\end{aligned}\quad (8)$$

Коэффициенты D_i и n_0 определяются выражениями ($D_3 = D_4 = 0$)

$$\begin{aligned}4D_0 &= B_0(\operatorname{ch} \eta/B_0)', \quad 4D_1 = -B_0(\operatorname{sh} \eta/B_0), \quad 2D_2 = v' \operatorname{sh} \eta, \\ 2B_0^2 n_0 &= -2p_\psi - v' j_0 + 2B_0 u'(v' - u' \operatorname{ch} \eta) - (B_0' + B_0 \eta')' e^{-\eta}/4 - \\ &\quad - (B_0' - B_0 \eta')' e^\eta/4 + k^2 B_0 (e^{-\eta} \cos^2 \delta + e^\eta \sin^2 \delta).\end{aligned}\quad (9)$$

Вычисление поверхностных функций, входящих в критерий (2), дает

$$\begin{aligned}\pi V'' &= -\oint (n_0 - 2\alpha_i c_i) B_0^{-1} ds, \quad 2\pi^2 \chi'' = -\oint \{(n_0 - \alpha_i c_i) v' - m_0 + \alpha_i b_i\} ds, \\ V' \langle B_0^{-2} \rangle &= \oint B_0^{-3} ds, \quad \langle \phi_\theta^2 B_0^{-2} |\nabla \Phi|^2 \rangle = V' \oint (2 \operatorname{ch} \eta / 2)^{-1} (e^{\eta/2} \gamma_1^2 + e^{-\eta/2} \gamma_2^2) ds.\end{aligned}\quad (10)$$

Если подставить эти выражения в (2), то после интегрирования по частям получим следующее условие устойчивости плазмы в окрестности м.о.:

$$\begin{aligned}-p_\psi \oint ds \{ & B_0^{-2} \operatorname{ch} \eta [2k^2(1 - \varepsilon \cos 2\delta) - j_0^2 B_0^{-2}(1 - \varepsilon^2) - 4u'^2 \varepsilon^2 - \eta'^2 - \\ & - 3B_0^{-2} B_0'^2 + 4B_0^{-1} B_0' \eta'] - 8k B_0^{-3/2} (\alpha_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \alpha_2 e^{\eta/2} \sin \delta) + \\ & + 2p_\psi V_\phi^2 \operatorname{ch}^{-1}(\eta/2) (e^{\eta/2} \gamma_1^2 + e^{-\eta/2} \gamma_2^2) \} > 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь $\varepsilon = \operatorname{th} \eta$ и отброшен член $S^2/4$.

Использование уравнения $\text{div } \mathbf{B}$ и правил преобразования $B_i = g_{ik} B^k$ приводит после исключения функций $\varphi_i(s)$ к следующим уравнениям для $\alpha_i(s)$:

$$\alpha'_1 + \nu' \alpha_2 = (2q_0 + q_1)^{-1} (P_1 - 2q_1 a_3), \quad \alpha'_3 + 3\nu' \alpha_4 = -2a_3, \quad (12)$$

$$\alpha'_2 - \nu' \alpha_1 = (2q_0 - q_1)^{-1} (P_2 - 2q_1 a_4), \quad \alpha'_4 - 3\nu' \alpha_3 = -2a_4.$$

Аналогичным уравнениям согласно (8) удовлетворяют и функции γ_1 и γ_2 , причем правые части уравнений для γ_1 и γ_2 известны, а в правые части уравнений для α_1 и α_2 входят произвольные функции $a_3(s)$ и $a_4(s)$, а также γ_1 и γ_2 :

$$2P_1 = (3q_0 + q_1)(c'_1 - \nu' c_2) - (q'_0 + q'_1)c_1 + 6B_0^{-1} u' c_2 + B_0^{-1} (J_\Phi c_2 + 2p_\Psi V_\Phi \gamma_1), \quad (13)$$

$$2P_2 = (3q_0 - q_1)(c'_2 - \nu' c_1) - (q'_0 + q'_1)c_2 + 6B_0^{-1} u' c_1 - B_0^{-1} (J_\Phi c_1 - 2p_\Psi V_\Phi \gamma_2).$$

Функции a_3 и a_4 можно определить, если задать профиль поперечного сечения граничной магнитной поверхности Σ в системе координат r_1, ϑ_1 : $r_1 \cos \vartheta_1 = x_0 + r \cos \vartheta$, $r_1 \sin \vartheta_1 = y_0 + r \sin \vartheta$, ось которой сдвинута на расстояние $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ от магнитной оси. В этой системе координат $\Psi = (1 + r_1 f_\Delta)(r_1^2 + r_1^3 f_\sigma - \rho^2) + \text{const}$, где $\rho = \text{const}$, а σ_i можно считать заданными функциями, определяющими форму поперечного сечения поверхности Σ . При малых смещениях $r_0 \ll \rho$ эллиптичность ϵ приосевых сечений м.п. совпадает с эллиптичностью поверхности Σ , $\vartheta_1 \approx \vartheta$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, $\Delta_1 = 2x_0 / \rho^2$, $\Delta_2 = 2y_0 / \rho^2$, $\alpha_1 = \Delta_1 + \sigma_1$, $\alpha_2 = \Delta_2 + \sigma_2$, $\alpha_3 = \sigma_3$, $\alpha_4 = \sigma_4$.

В частности, для эллиптического сечения поверхности Σ имеем $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$, так что функции α_1 и α_2 оказываются пропорциональными смещениями магнитной оси $\alpha_1 = 2x_0 / \rho^2$, $\alpha_2 = 2y_0 / \rho^2$. Следует отметить, что выбор параметров несимметричности σ_i профиля поперечного сечения поверхности Σ ограничен сепаратрисой семейства поверхностей $\Psi(r_1, \vartheta_1) = r_1^2 + r_1^3 f_\sigma(\vartheta_1) = \text{const}$.

Решение систем уравнений типа (12) в интегральной форме и в виде рядов приведено в [7].

Подынтегральное выражение в критерии устойчивости плазмы в окрестности магнитной оси (11) существенно зависит от девяти параметров: от кривизны и кручения магнитной оси k и κ , от эллиптичности приосевых сечений магнитных поверхностей ϵ и параметров несимметричности σ_i , от скорости прокручивания сечений $\delta'(s)$, от изменения продольного поля $B_0(s)$, от отношения $j_0 / B_0 = \text{const}$ и от давления $p(V)$.

В случае прямой магнитной оси $k = 0$ плазма может быть устойчивой согласно условию (11) при $p'(V) < 0$, только если $\epsilon \eta' B'_0 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
2. Bineau M. // Ibid. P. 35.
3. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7. P. 401.
4. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
5. Соловьев Л.С. // Там же. С. 2063.
6. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
7. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1967. Т. 5. С. 3.

чим критерии локальной (1.1) и конвективной (1.3) устойчивости в виде

$$-\Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) \geq 0, \quad (1.4)$$

$$-\Omega \langle \mathbf{B}^2 \rangle - p'^2 \geq 0. \quad (1.5)$$

Учитывая, что $[\mathbf{jB}] = p' \nabla V$, мы видим, что для достаточно плавных конфигураций критерий конвективной устойчивости почти совпадает с критерием локальной устойчивости.

Отметим, что для случая замкнутых силовых линий

$$S = 0, \quad \frac{1}{\Phi'} = U \equiv \oint \frac{dl}{B}, \quad \Omega = -p' \frac{U'}{U}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае наиболее опасными являются возмущения, локализованные в тонком слое между соседними магнитными поверхностями и почти постоянные вдоль магнитных силовых линий.

Целью настоящей работы является обобщение критериев (1.1) и (1.3) на случай стационарных течений плазмы. При этом мы будем исходить из вариационного принципа, установленного Фриманом и Ротенбергом [7], который позволяет получать достаточные условия устойчивости. Мы ограничимся рассмотрением лишь локальных возмущений и будем предполагать, что рассматриваемые плазменные конфигурации являются топологически тороидальными и близки к цилиндрически симметричным (слабая гофрировка, малая тороидальность, т.е. большой радиус кривизны магнитной оси по сравнению с радиусом сечения тора и т.д.), а скорости \mathbf{v} будем считать малыми по сравнению с альфвеновской скоростью $\mathbf{B}/\sqrt{\rho}$.

В разд. 2 приводится вариационный принцип и на примере конфигурации с азимутальным магнитным полем рассматривается неустойчивость относительно смещений вдоль магнитного поля. В разд. 3 рассматривается случай цилиндрически симметричных конфигураций и выводится достаточный критерий локальной устойчивости для таких конфигураций. В разд. 4 и 5 выводятся достаточные условия устойчивости относительно конвективных и локальных возмущений для случая квазицилиндрической геометрии.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

При условии идеальной проводимости и отсутствии диссипативных процессов стационарные течения плазмы в магнитном поле описываются уравнениями

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla p + \mathbf{b}, \quad [\mathbf{vB}] = \nabla \phi_e, \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{v} \nabla) \rho \rho^{-\gamma} = 0, \quad \text{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0.$$

Здесь $\mathbf{a} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = [\mathbf{jB}]$, $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{B}$, \mathbf{v} – скорость плазмы, ρ – ее плотность, p – давление, γ – показатель адиабаты, ϕ_e – потенциал электрического поля.

Мы будем исследовать устойчивость конфигураций, обладающих магнитными поверхностями. Как это следует из второго уравнения (2.1), магнитные поверхности являются эквипотенциальными и плазма течет по этим поверхностям.

В работе [7] показано, что уравнение для малых возмущений $\xi(\mathbf{r}^0, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}^0$ имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\rho(\mathbf{v} \nabla) \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{F}(\xi) = 0, \quad (2.2)$$

О ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ*

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1-3] было получено необходимое условие локальной гидромагнитной устойчивости для равновесных плазменных конфигураций произвольной геометрии. Как показано в [4], это условие может быть преобразовано к виду

$$\left\langle \frac{S}{2} + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \Omega + \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{B} – магнитное поле, $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, V – текущий объем, заключенный внутри магнитной поверхности и отсчитываемый от магнитной оси $V = 0$. Давление p связано с \mathbf{j} и \mathbf{B} уравнением равновесия $\nabla p = [\mathbf{jB}]$. Величины $p(V)$, $\Omega(V)$ и $S(V)$ определяются следующими выражениями:

$$p' = I'\Phi' - J'\chi', \quad \Omega = I'\Phi'' - J'\chi'', \quad S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi'', \quad (1.2)$$

где $\Phi(V)$, $\chi(V)$ и $J(V)$, $I(V)$ – соответственно продольные и поперечные потоки \mathbf{B} и \mathbf{j} внутри магнитной поверхности объема V , а угловыми скобками обозначено усреднение по замкнутым магнитным силовым линиям:

$$\langle f \rangle = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}.$$

Критерий (1.1) выводится из энергетического принципа [5] в предположении, что рассматриваемые смещения плазмы ξ из равновесного положения локализованы в узком слое между двумя соседними магнитными поверхностями. В работе [6] показано, что критерий устойчивости (1.1) является необходимым и достаточным при условии квазиоднородности магнитного поля, которое представляет собой, по существу, условие малости давления плазмы p по сравнению с магнитным давлением $\frac{1}{2}B^2$. Таким образом, для плазмы низкого давления локальные возмущения ξ представляются наиболее опасными.

В [4] получено также необходимое условие конвективной устойчивости:

$$-\left\langle B \frac{B\Omega - \mathbf{jS}}{p'} + p' \right\rangle^2 + \langle \gamma p + B^2 \rangle \left\langle \frac{B\Omega - \mathbf{jS}}{p'^2} + \Omega \right\rangle \geq 0, \quad (1.3)$$

при выводе которого предполагалось, что возмущения почти постоянны вдоль магнитных силовых линий. Угловыми скобками в (1.3) обозначено усреднение по бесконечно тонкому слою между соседними магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f dt.$$

Отметим, что соответствующие средние значения весьма близки к средним по силовым линиям, определенным выше.

В случаях, когда можно пренебречь скосом силовых линий (shear), S мало (например, для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями), и, полагая $\gamma p \ll B^2$, полу-

* Журн. эксперим. и теорет. физики. 1968. Т. 54. С. 666-675.

где

$$\mathbf{F} = \nabla(\gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \nabla p - \mathbf{BQ}) + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{Q} + (\mathbf{Q}\nabla)\mathbf{B} + \\ + \mathbf{a} \operatorname{div} \rho \xi + \rho(\xi \nabla)\mathbf{a} - \rho(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\nabla)\xi, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{Q} = \operatorname{rot}[\xi \mathbf{B}]. \quad (2.4)$$

Для колебаний, происходящих с частотой ω ($\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$), уравнение (2.2) дает $\omega^2 \rho \xi + 2i\omega \rho(\mathbf{v}\nabla)\xi + \mathbf{F} = 0$. Если умножить это уравнение на ξ^* и проинтегрировать по всему объему плазмы, то получим следующее выражение для частоты:

$$\omega = \left(\int i \rho \xi^* \xi d\tau \right)^{-1} \left[- \int i \rho \xi^* (\mathbf{v}\nabla)\xi d\tau \pm \right. \\ \left. \pm \left\{ \left(\int i \rho \xi^* (\mathbf{v}\nabla)\xi d\tau \right)^2 - \int \rho \xi^* \xi d\tau \int \xi^* \mathbf{F} d\tau \right\}^{1/2} \right]. \quad (2.5)$$

Как показано ниже, все интегральные выражения в (2.5) действительны, и поэтому достаточным условием внутренней устойчивости является неравенство

$$\left(\int i \rho \xi^* (\mathbf{v}\nabla)\xi d\tau \right)^2 - \int \rho \xi^* \xi d\tau \int \xi^* \mathbf{F} d\tau \geq 0 \quad (2.6)$$

для произвольных возмущений ξ , исчезающих на границе плазмы. Это условие не является, вообще говоря, необходимым, как в случае $\mathbf{v} = 0$, когда $-\frac{1}{2} \int \xi^* \mathbf{F} d\tau$ представляет собой потенциальную энергию колебаний консервативной системы, которая для устойчивых систем должна иметь абсолютный минимум для произвольных смещений ξ . Поскольку условие устойчивости (2.6) применяется также к возмущениям ξ , не являющимся собственными функциями задачи, оно может привести к слишком жестким ограничениям.

Представим вектор ξ в виде разложения по векторам \mathbf{B} , \mathbf{j} и \mathbf{b} :

$$\xi = \xi_\alpha + \xi_\beta + \xi_\nu = \alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{j} + \nu \mathbf{b}. \quad (2.7)$$

Тогда, отбрасывая под знаком интеграла члены, содержащие полную дивергенцию, и используя при этом уравнения (2.1), получим из (2.6)

$$\left(\int \operatorname{Re} i \rho \xi^* (\mathbf{v}\nabla)\xi d\tau \right)^2 - \int \rho |\xi|^2 d\tau \int \xi^* \mathbf{F} d\tau \geq 0. \quad (2.8)$$

Оператор $F(\xi)$ самосопряженный, в чем можно убедиться, преобразовав $-\xi^* \mathbf{F}$ к виду

$$-\xi^* \mathbf{F} = \gamma p \operatorname{div} \xi^2 + |\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi_\nu]|^2 + [\mathbf{j}\xi_\nu^*][(\xi_\nu \nabla)\mathbf{B} - \\ - (\mathbf{B}\nabla)\xi_\nu - [\mathbf{j}\xi_\nu]] - \rho(\mathbf{v}\nabla)\xi^2 - \operatorname{Re}\{2\rho \alpha \xi^* \operatorname{div} \xi + \\ + (\xi_\nu (\xi_\nu^* \nabla) + (\xi_\beta + 2\xi_\alpha)(\xi_\beta^* \nabla) + (\xi_\alpha + 2\xi_\beta + 2\xi_\nu)(\xi_\alpha^* \nabla))\rho \alpha\}. \quad (2.9)$$

Поэтому, если использовать более жесткое, чем (2.8), условие устойчивости $-\int \xi^* \mathbf{F} d\tau \geq 0$, то можно ограничиться рассмотрением лишь действительных возмущений ξ .

При $\mathbf{v} = 0$ необходимым и достаточным условием внутренней устойчивости является положительность потенциальной энергии

$$\delta w_0 = -\frac{1}{2} \int \xi^* \mathbf{F} d\tau \quad (2.10)$$

для любых смещений ξ , обращающихся в нуль на границе плазмы. При этом для $\xi = \alpha \mathbf{V}$ в случае $\mathbf{V}\nabla\alpha = 0$ величина $\delta\omega_0 = 0$, т.е. относительно таких смещений имеет место безразличное равновесие. В случае же $\mathbf{v} \neq 0$ достаточное условие устойчивости (2.8) для таких смещений не выполняется, что указывает на возможную неустойчивость.

Рассмотрим, например, случай аксиально-симметричного течения при наличии одного лишь азимутального магнитного поля, так что в цилиндрических координатах r, φ, z имеем $\mathbf{B} = \{0, B_\varphi, 0\}$, $\mathbf{v} = \{v_r, v_\varphi, v_z\}$. Если подставить в (2.8) смещение ξ , которое имеет только одну азимутальную компоненту $\xi_\varphi = \alpha B_\varphi$, то при $\mathbf{V}\nabla\alpha = 0$ и $\mathbf{v}\nabla\alpha = 0$ получим

$$\int \operatorname{Re} i \xi^* (\mathbf{v}\nabla) \xi d\tau = 0, \quad \int \xi^* \mathbf{F} d\tau = \int |\xi|^2 \frac{(\mathbf{v}\nabla\rho)^2}{\rho} d\tau > 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае условие устойчивости (2.8) не выполняется. Возможная с точки зрения критерия (2.8) неустойчивость связана с отклонением от цилиндрической симметрии течения, при которой $\mathbf{v}\nabla\rho = 0$.

Мы далее будем рассматривать течения, близкие к цилиндрически симметричным, и, считая скорости малыми по сравнению с альфвеновскими, будем пренебрегать возможными неустойчивостями, инкременты развития которых, аналогично $(\mathbf{v}\nabla\rho)/\rho$, пропорциональны произведению \mathbf{v} на некоторый параметр, характеризующий отклонение от цилиндрической симметрии.

Если комплексное смещение ξ представить в экспоненциальной форме

$$\xi = \xi_A e^{i\delta}, \quad (2.12)$$

где ξ_A и δ — действительные функции, то

$$\operatorname{Re} i \xi^* (\mathbf{v}\nabla) \xi = -(\mathbf{v}\nabla\delta) |\xi|^2, \quad (2.13)$$

$$|(\mathbf{v}\nabla) \xi|^2 = (\mathbf{v}\nabla\delta)^2 |\xi|^2 + ((\mathbf{v}\nabla) \xi_A)^2.$$

Введем криволинейные координаты θ, ζ, V , связанные с магнитными поверхностями, так чтобы циклические координаты θ и ζ изменялись вдоль магнитных поверхностей, а "радиальная" координата V представляла собой текущий объем системы вложенных магнитных поверхностей. При этом смещение ξ может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$\xi = \sum \xi_{mn}(V) e^{im\theta + in\zeta}. \quad (2.14)$$

В случае цилиндрической симметрии задачи каждая гармоника этого ряда является собственной функцией и колеблется со своей частотой ω_{mn} , так что достаточно исследовать устойчивость конфигурации относительно каждой отдельной гармоники (2.14). Для конфигураций, близких к цилиндрическим, разложение собственной функции в ряд Фурье содержит одну большую гармонику типа (2.14) с фиксированными m и n и малые по амплитуде другие гармоники. Используя это обстоятельство, мы можем для случая малых скоростей и малых отклонений от цилиндричности рассматриваемой конфигурации преобразовать критерий (2.8) к более простому виду. При этом члены (2.8), пропорциональные \mathbf{v}^2 , нам достаточно исследовать на устойчивость относительно отдельных гармоник ряда (2.14). Ограничиваясь рассмотрением возмущений, локализованных в тонком слое между соседними магнитными поверхностями, и подставляя (2.13) в (2.8), мы видим, что члены $\rho(\mathbf{v}\nabla\delta)^2 |\xi|^2$

сокращаются и условие устойчивости принимает вид

$$\delta w = -\frac{1}{2} \int \xi^* F_1 d\tau \geq 0, \quad (2.15)$$

где $F_1(\xi)$ отличается от $F(\xi)$ заменой члена $\rho|(\nabla \xi)|^2$ на $\rho((\nabla \xi)_A)^2$.

Рассмотрим сначала случай цилиндрически симметричного течения.

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПЛАЗМЕННАЯ СТРУЯ

При условии цилиндрической симметрии потока достаточно рассмотреть устойчивость по отношению к отдельной гармонике возмущения $\xi = \xi_A(r)e^{im\varphi + ikz}$. Минимизируем подинтегральное выражение $-\xi^* F_1$ в критерии (2.15) по параметрам α и β . Соберем сначала члены, содержащие α , тогда получим

$$-\xi^* F_1^\alpha = \gamma p \left| \operatorname{div} \xi - \frac{\rho a \xi_v}{\gamma p} \right|^2 - \frac{\rho^2 a^2}{\gamma p} |\xi_v|^2. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\rho a \xi_v}{\gamma p} = -\frac{\rho v_\phi^2}{\gamma p r} \xi_r. \quad (3.2)$$

Члены, содержащие β , приводятся к выражению

$$-\xi^* F_1^\beta = |\mathbf{Q} + [\mathbf{j} \xi_v]|^2, \quad (3.3)$$

и минимизация по β дает

$$\beta |\mathbf{b}| = B_z \xi_\varphi - B_\varphi \xi_z = i \frac{2krB_\varphi \xi_r + (mB_z - krB_\varphi)(r\xi_r)'}{m^2 + k^2 r^2}, \quad (3.4)$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Таким образом, выражение (2.15) для δw в случае цилиндрической симметрии течения можно представить в виде

$$\delta w = \pi \int r dr \left\{ \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left[\frac{mB_\varphi - krB_z}{r} (r\xi_r)' - \frac{2mB_\varphi}{r} \xi_r \right]^2 + \left[r \left(\frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right)' - \frac{(r^2 B_\varphi^2)'}{r^3} - \frac{\rho v_\phi^4}{\gamma p r^2} \right] \xi_r^2 \right\}. \quad (3.5)$$

Оно содержит только азимутальную составляющую скорости v_ϕ и не содержит продольной составляющей v_z .

Из (3.5) легко получить достаточное условие локальной устойчивости. Пусть возмущения локализованы в тонком цилиндрическом слое в окрестности $r = r_0$, тогда производная ξ_r' велика и $\delta w > 0$, за исключением случая, когда возмущение в рассматриваемом слое ориентировано вдоль магнитной силовой линии:

$$mB_\varphi + krB_z = 0. \quad (3.6)$$

Разлагая подинтегральное выражение (3.5) в окрестности $r = r_0$ по степеням

$x = r - r_0$, получим

$$\delta w = \pi \int dx \left\{ \frac{r B_z^2 \mu'^2}{B^2} x^2 f'^2 - \left[\frac{B_\phi^2}{r^2 B^2} \left((B_z^2)' + \frac{(r^2 B_\phi^2)'}{r^2} \right) - \left(\frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right)' + \frac{\rho^2 v_\phi^4}{\gamma p r^3} \right] f^2 \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь $r = r_0$, $\mu = B_\phi / (r B_z)$, $f = r \xi_r$ и интегрирование производится по тонкому слою δr , вне которого ξ обращается в нуль. Замечая, что $\int f^2 dx = -2 \int x f f' dx$, и воспользовавшись неравенством Шварца

$$\int x^2 f'^2 dx \int f^2 dx \geq \left(\int x f f' dx \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\int f^2 dx \right)^2, \quad (3.8)$$

получим достаточное условие локальной устойчивости:

$$\frac{B_z^2 \mu'^2}{B^2} \frac{1}{4} - \frac{B_\phi^2}{r^3 B^2} \left\{ (B_z^2)' + \frac{(r^2 B_\phi^2)'}{r^2} \right\} + \frac{1}{r} \left(\frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right)' - \frac{\rho^2 v_\phi^4}{\gamma p r^4} \geq 0. \quad (3.9)$$

При учете уравнения баланса давлений в невозмущенном состоянии

$$p' + \frac{1}{2} \left\{ (B_z^2)' + \frac{(r^2 B_\phi^2)'}{r^2} \right\} - \frac{\rho v_\phi^2}{r} = 0 \quad (3.10)$$

условие (3.9) можно переписать в виде

$$\frac{B_z^2}{B^2} \left\{ \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu^2}{r} \left(p' - \frac{\rho v_\phi^2}{r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \left(\frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right)' - \frac{\rho^2 v_\phi^4}{\gamma p r^4} \geq 0. \quad (3.11)$$

В отсутствие вращения $v_\phi = 0$ это условие переходит в необходимый критерий устойчивости Сайдема [8]. Необходимое условие локальной устойчивости при $v \parallel \mathbf{B}$ для случая несжимаемой среды, когда $c_T^2 = \gamma p / \rho \rightarrow \infty$, рассматривалось в [9].

4. УСЛОВИЯ КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Здесь мы рассмотрим устойчивость относительно возмущений, локализованных в тонком слое между соседними магнитными поверхностями и в некотором смысле постоянных вдоль магнитных силовых линий. Предположим, кроме того, что конфигурация близка к цилиндрически симметричной, и будем отбрасывать члены, содержащие v^2 , которые обращаются в нуль при условии цилиндрической симметрии. Полагая, что

$$\mathbf{B} \nabla \alpha = 0, \quad \mathbf{B} \nabla \beta = 0, \quad (4.1)$$

получим следующее выражение для величины δw , определенной в (2.15):

$$\begin{aligned} \delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 + ((\mathbf{B} \nabla) \xi_v - (\xi_v \nabla) \mathbf{B} + [\mathbf{j} \xi_v] - \mathbf{B} \operatorname{div} \xi)^2 - \right. \\ \left. - [\mathbf{j} \xi_v] ((\mathbf{B} \nabla) \xi_v - (\xi_v \nabla) \mathbf{B} + [\mathbf{j} \xi_v]) - \rho v^2 ((\mathbf{v} \nabla) \mathbf{b})^2 - \right. \\ \left. - 2 \rho \alpha \xi_v \operatorname{div} \xi - \xi_v (\xi_v \nabla) \rho \alpha \right\} d\tau. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Заметим, что достаточное условие устойчивости $\delta w \geq 0$ совпадает с достаточным условием устойчивости (2.15) относительно смещений ξ , имеющих только одну компоненту $\xi_v = vb$, при $v \nabla v = 0$.

А. Полагая сначала

$$B \nabla v = 0, \quad (4.3)$$

получим подинтегральное выражение (4.2) в виде квадратичной формы от v и $\text{div } \xi = \text{div } vb$. Обозначая угловыми скобками усреднение по бесконечно тонкому слою между соседними магнитными поверхностями, получим условие конвективной устойчивости:

$$\langle \gamma p + B^2 \rangle \langle (b \nabla) B - (B \nabla) b \rangle \langle (b \nabla) B - (B \nabla) b - [j b] \rangle - \rho \langle (v \nabla) b \rangle^2 - b \langle (b \nabla) \rho a \rangle - \langle B \langle (b \nabla) B - (B \nabla) b - [j b] \rangle + \rho a b \rangle^2 \geq 0. \quad (4.4)$$

Б. Рассмотрим теперь случай, когда токи текут по магнитным поверхностям. При этом можно ввести такую "натуральную" систему координат θ, ζ, V [10], в которой детерминант метрического тензора $g = 1$, а контравариантные компоненты векторов j и B выражаются через производные от соответствующих потоков по объему V :

$$j^i = \{I', J', 0\}, \quad B^i = \{\chi', \Phi', 0\}. \quad (4.5)$$

Введем обозначение

$$P' = I' \Phi' - J' \chi' \quad (4.6)$$

для величины, совпадающей с p' в случае $v = 0$. Тогда $b = P' \nabla V$, а вектор ξ_v выразится через контравариантную компоненту ξ_v в виде $\xi_v = \xi_v \nabla V / |\nabla V|^2$. Если ограничиться для простоты случаем квазиоднородного магнитного поля [6], то можно использовать приближенное равенство

$$e \approx \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2}, \quad (4.7)$$

где $e^i = \{0, 0, 1\}$. Отсюда следует, что

$$\xi_v = vb = \xi_v \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2} \approx \xi_v e. \quad (4.8)$$

При выводе критерия конвективной устойчивости в рассматриваемом случае положим

$$B \nabla \xi_v = 0. \quad (4.9)$$

Входящая в (4.2) разность выражается через поверхностные величины $\Omega(V)$ и $S(V)$:

$$(e \nabla) B - (B \nabla) e = \frac{B \Omega - j S}{P'}. \quad (4.10)$$

Соответственно, выражение для δw примет вид

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\gamma p + B^2) (\text{div } \xi)^2 + 2 \xi_v \text{div } \xi \left(B \frac{B \Omega - j S}{P'} - B \frac{[j \nabla V]}{|\nabla V|^2} + \rho \frac{a \nabla V}{|\nabla V|^2} \right) + \left(\frac{(B \Omega - j S)^2}{P'^2} + \Omega - \rho \frac{((v \nabla) \nabla V)^2}{|\nabla V|^4} - \frac{\nabla V (\nabla V \nabla) \rho a}{|\nabla V|^4} \right) \xi_v^2 \right\} d\tau. \quad (4.11)$$

Из (4.11) вытекает следующее условие конвективной устойчивости:

$$-\left\langle \mathbf{B} \frac{\mathbf{B}\Omega - \mathbf{j}S}{P'} + P' + \rho \frac{\mathbf{a}\nabla V}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 + \langle \gamma P + B^2 \rangle \left\langle \frac{(\mathbf{B}\Omega - \mathbf{j}S)^2}{P'^2} + \Omega - \right. \\ \left. - \rho \frac{((\mathbf{v}\nabla)\nabla V)^2}{|\nabla V|^4} + \frac{\nabla V(\nabla V\nabla)\rho\mathbf{a}}{|\nabla V|^4} \right\rangle \geq 0. \quad (4.12)$$

При $\mathbf{v} = 0$ оно переходит в необходимое условие устойчивости (1.3). Если, кроме того, $S = 0$, то из (4.12) получается необходимое условие устойчивости, выведенное в работе Кадомцева [11] для конфигураций с замкнутыми магнитными силовыми линиями.

Для течения, обладающего цилиндрической симметрией, критерии (4.4) и (4.12) приводят к одинаковому условию

$$r^3 \left(\frac{\rho v_\phi^2 - B_\phi^2}{r^2} \right)' - \frac{(2B_\phi^2 - \rho v_\phi^2)^2}{\gamma P + B^2} \geq 0, \quad (4.13)$$

где штрихом обозначена производная по r . Отметим, что необходимое условие устойчивости [9, 12] для случая $B = B_\phi$ отличается от (4.13) наличием положительного слагаемого $4\rho v_\phi^2$ в левой части неравенства.

5. УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

При выводе условия локальной устойчивости мы также будем использовать выражение (2.15), предполагая, что конфигурация близка к цилиндрически симметричной, и отбрасывая члены, содержащие v^2 , которые обращаются в нуль при условии цилиндрической симметрии. Предположим, кроме того, что магнитное поле квазиоднородно, и будем иметь в виду следующие порядки малости величин: $\mathbf{v} \sim \mathbf{j} \sim (\nabla V\nabla)\mathbf{B} \sim \varepsilon \ll 1$.

Минимизация δw по α приводит к соотношению

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\rho \mathbf{a} \xi_v}{\gamma P}, \quad (5.1)$$

при учете которого получаем

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ (\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi_v])^2 + \left[\left((\mathbf{b}\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{b} - [\mathbf{j}\mathbf{b}] \right) [\mathbf{j}\mathbf{b}] - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \left((\mathbf{v}\nabla)\mathbf{b} \right)^2 - \mathbf{b}(\mathbf{b}\nabla)\rho\mathbf{a} - \frac{\rho^2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2}{\gamma P} \right] v^2 \right\} d\tau. \quad (5.2)$$

Ограничиваясь случаем $\mathbf{j}\nabla V = 0$ и записывая подынтегральное выражение в натуральной системе координат, имеем

$$\delta w = \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\mathbf{Q} + \xi_v \frac{[\mathbf{j}\nabla V]}{|\nabla V|^2} \right)^2 - \left(\Omega + \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} + \frac{\rho^2 \mathbf{a}^2}{\gamma P |\nabla V|^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho((\mathbf{v}\nabla)\nabla V)^2}{|\nabla V|^4} + \frac{\nabla V(\nabla V\nabla)\rho\mathbf{a}}{|\nabla V|^4} \right) \xi_v^2 \right\} d\tau. \quad (5.3)$$

Минимизация выражения (5.3) по β производится полностью аналогично тому, как это сделано в работе [6]. В результате получим достаточное условие локальной устойчивости

$$\left\langle \frac{S}{2} + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \Omega + \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} + \frac{\rho^2 a^2}{\gamma \rho |\nabla V|^2} + \frac{\rho((\mathbf{v}\nabla)\nabla V)^2}{|\nabla V|^4} + \frac{\nabla V(\nabla V\nabla)\rho a}{|\nabla V|^4} \right\rangle \geq 0, \quad (5.4)$$

где угловые скобки означают усреднение по замкнутым силовым линиям (см. введение). При $\mathbf{v} = 0$ (5.4) переходит в необходимое условие устойчивости (1.1).

В окрестности магнитной оси s критерий (5.4) можно, аналогично [6], преобразовать к виду

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\chi''}{V'} \right)^2 + \left\langle \frac{B_s^2}{|\nabla\Phi|^2} \right\rangle \left\langle P' \frac{V''}{V'} - \frac{P'^2}{B_s^2} - \frac{B_s^2}{|\nabla\Phi|^2} \left(r \frac{\partial j_s}{\partial r} \right)^2 - \frac{\rho^2 a^2}{\gamma \rho |\nabla\Phi|^2} - \frac{\rho((\mathbf{v}\nabla)\nabla\Phi)^2}{|\nabla\Phi|^4} - \frac{\nabla\Phi(\nabla\Phi\nabla)\rho a}{|\nabla\Phi|^4} \right\rangle \geq 0, \quad (5.5)$$

где r – расстояние от оси s , j_s и B_s – компоненты \mathbf{j} и \mathbf{B} вдоль оси s , а штрихи означают дифференцирование по продольному потоку Φ .

Для аксиально-симметричных тороидальных конфигураций, если ограничиться случаем круговых нормальных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси s , $\Phi \approx B_s \pi r^2$, $V \approx 2\pi^2 R r^2$, и из (5.5) следует

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\chi''}{V'} \right)^2 + \left\langle \frac{1}{|\nabla\Phi|^2} \right\rangle \left\langle B_s^2 P' \frac{V''}{V'} - P'^2 \left(1 + \frac{2}{\chi'^2} \right) - \frac{B_s^2}{|\nabla\Phi|^2} \left(\frac{\rho^2 v_\phi^4}{\gamma \rho r^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right) \right\rangle \geq 0, \quad (5.6)$$

где v_ϕ – азимутальная скорость вращения вокруг магнитной оси, R – радиус кривизны магнитной оси.

Считая продольное магнитное поле B_s квазиоднородным, так что $j_\phi \approx 0$, и пренебрегая в (5.6) малым членом $(\chi''/(2V'))^2$, характеризующим стабилизацию скосом, получим

$$\frac{j_s^2}{4B_s^2} \left(\frac{4B_s^2}{R^2} - j_s^2 \right) + \frac{\rho^2 v_\phi^4}{\gamma \rho r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \geq 0. \quad (5.7)$$

Если r и j_s почти постоянны, а плазма вращается как целое, так что $v_\phi \sim r$, то при $\rho v_\phi^2 / r^2 \ll j_s^2$ давление $p \approx r_\Sigma^2 j_s^2 / 4$, где r_Σ – радиус плазменного шнура, и из (5.7) вытекает следующее ограничение на скорость вращения v_ϕ :

$$\frac{\rho v_\phi^2 R^4}{B_s^2 r_\Sigma^4} \leq 4\gamma \left(\frac{R^2 j_s^2}{4B_s^2} \right) \left(1 - \frac{R^2 j_s^2}{4B_s^2} \right). \quad (5.8)$$

Здесь максимальное значение правой части $16\gamma/27 \approx 1$, и поэтому максимальная допустимая скорость вращения $v_\phi \approx B_s r_\Sigma^2 / (\sqrt{\rho} R^2)$.

Если плазменный шнур вращается со скоростью v_ϕ , в n раз превышающей дрейфовую скорость $v_{др} = cT / (e\sqrt{4\pi}B_s r_\Sigma)$, то условие устойчивости (5.8) можно переписать в виде

$$R^2 j_s^2 / (4B_s^2) \leq 1 - n^2 / (4\gamma\Pi), \quad (5.9)$$

где $\Pi = 4\pi e N r_\Sigma^2 / (Mc^2)$ – так называемый погонный протон. Полученное условие, вообще говоря, более жесткое, чем условие устойчивости $Rj_s/B_s \leq 2$ для невращающегося плазменного шнура.

Автор весьма признателен акад. М.А. Леонтовичу, Э.Л. Бурштейну и В.Д. Шафранову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
2. Bineau M. // Ibid. P. 35.
3. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510.
4. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
5. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
6. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 1284.
7. Frieman E., Rotenberg M. // Rev. Mod. Phys. 1960. Vol. 12. P. 898.
8. Сайдем В. Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.
9. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 3. С. 265.
10. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
11. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 380.
12. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Успехи физ. наук. 1961. Т. 73. С. 4.

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ*

В настоящей работе рассматривается равновесие и устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем в аксиально-симметричных системах типа токамак. Рассмотрение проводится в рамках магнитогидродинамического приближения для идеально проводящей плазмы. При этом равновесная магнитная конфигурация представляет собой систему вложенных тороидальных магнитных поверхностей, окружающих круговую магнитную ось $r = R$. В качестве исследуемых равновесных конфигураций взяты магнитные конфигурации с заданной внешней магнитной поверхностью Σ . Рассмотрены три случая, когда поверхность Σ является тороидальной поверхностью эллиптического, полуэллиптического и прямоугольного поперечного сечения. В таких системах гидромагнитная устойчивость плазмы оказывается существенно зависящей от эллиптичности ϵ сечений магнитных поверхностей в окрестности

* Совместно с Н.М. Зуевой // Атом. энергия. 1968. Т. 24. С. 453–459.

магнитной оси и относительного изменения продольного магнитного поля $\delta B/B_0$ по сечению плазмы.

При рассмотрении равновесных плазменных конфигураций используется метод функций потока [1], существование которых обусловлено наличием аксиальной симметрии задачи. При исследовании устойчивости применяется необходимый критерий локальной устойчивости [2–5] для произвольной геометрии плазмы, который, как показано в работе [6], является необходимым и достаточным при условии квазиоднородности магнитного поля. В настоящей работе изучается влияние тороидальности и формы поперечного сечения плазменного тора на его равновесие и устойчивость. Рассматривается случай, когда "меридиональные" сечения плазменного тора симметричны относительно "экваториальной" плоскости $z = 0$, так что нормальные сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси представляют собой в общем случае эллипсы, которые ориентированы вдоль или поперек оси симметрии z .

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Равновесие. Равновесные плазменные конфигурации, определяемые уравнениями

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

(p – давление плазмы, \mathbf{j} – плотность тока, \mathbf{B} – напряженность магнитного поля), при условии аксиальной симметрии задачи удобно описывать в цилиндрической системе координат r, φ, z с помощью функций $\psi = rA_\varphi$ (A_φ – компонента векторного потенциала), $I_A(\psi) = rB_\varphi$ и $p(\psi)$. Компоненты векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} при этом равны [1]:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{I_A}{r}, \quad (2)$$

$$j_z = \frac{I'_A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{I'_A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad j_\varphi = rp' + \frac{I_A I'_A}{r}, \quad (3)$$

где штрих означает дифференцирование по ψ . Функция потока $\psi(r, z)$ удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r^2 p' - I_A I'_A. \quad (4)$$

При заданных функциях $p' \equiv -a(\psi)$ и $I_A I'_A \equiv -R^2 b(\psi)$ решение уравнения (4) определяет систему магнитных поверхностей равновесной конфигурации $\psi(r, z) = \text{const}$. Представим $p(\psi)$ и $I_A^2(\psi)$ в виде разложений по степени ψ в окрестности магнитной оси $r = R, z = 0$:

$$p = p_0 + p'(\psi - \psi_0) + \dots, \\ I_A^2 = I_{A0}^2 + 2I_A I'_A(\psi - \psi_0) + \dots, \quad (5)$$

где $\psi_0 = \psi(R, 0)$. Пусть давление $p(\psi)$ обращается в нуль на некоторой магнитной поверхности ψ_σ , тогда согласно выражениям (2) и (5)

$$\frac{b}{a} = -\frac{I_{A\sigma}^2 - I_{A0}^2}{2p_0 R^2} = -\frac{B_\sigma^2 - B_0^2}{2p_0}. \quad (6)$$

Таким образом, отношение b/a является характеристикой диамагнетизма плазмы.

Введем обозначения

$$\beta_0 = \frac{2p_0}{B_0^2}, \quad \delta B^2 = B_\sigma^2 - B_0^2, \quad N = \frac{j_0 R}{B_0} \quad (7)$$

(индекс нуль означает, что данная величина берется на магнитной оси), тогда из уравнений (3), (6) получим

$$\frac{b}{a} \beta_0 = -\frac{\delta B^2}{B_0^2}; \quad (8)$$

$$\frac{b}{a} \left(\frac{\Psi_\sigma - \Psi_0}{aR^4} \right) N^2 + \left(1 + \frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta B^2}{2B_0^2} = 0. \quad (9)$$

Исключив из этих уравнений отношения b/a , при известном $\Psi(r, z)$ получим уравнение равновесия, связывающее величины β_0 , N^2 и $\delta B^2/B_0^2$.

Решение уравнения (4) с точностью до кубических по z и $r - R$ членов не зависит от производных функций $a(\psi)$ и $b(\psi)$ и определяется выражением

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{a+b}{1+\varepsilon^2} \left[\frac{R^2}{2} \left(1+c \frac{r^2-R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{\varepsilon^2}{8} (r^2-R^2)^2 - \right. \\ \left. - \frac{(1+\varepsilon^2)b - (1-c)(a+b)}{24R^2(a+b)} (r^2-R^2)^3 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси $r = R, z = 0$ имеют вид эллипса с отношением полуосей $l_z/l_r = \varepsilon$. Для нахождения параметров ε и c необходимо решить уравнение (4) с заданной формой граничной магнитной поверхности Ψ_Σ , после чего ε и c можно определить через производные ψ на магнитной оси $r = R$:

$$\varepsilon^2 = \frac{\partial^2 \psi / \partial r^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}, \quad c = \frac{R}{2} \frac{\partial^3 \psi / \partial z \partial r^2}{\partial^2 \psi / \partial z^2}. \quad (11)$$

При этом положение магнитной оси определяется равенствами $\partial \psi / \partial r = 0, \partial \psi / \partial z = 0$.

Устойчивость. Для исследования устойчивости используем критерий локальной устойчивости [2-4], который можно представить в виде [5]

$$\left\langle \frac{S}{2} + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \Omega + \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \geq 0. \quad (12)$$

Как показано в работе [6], критерий (12) является необходимым и достаточным условием гидромагнитной устойчивости для плазменных конфигураций, удерживаемых квазиоднородным магнитным полем¹. Входящие в выражение (12) величины Ω и S , как и p , зависят только от текущего объема V системы вложенных магнитных поверхностей и определяются формулами

$$\dot{p} = \dot{I}\dot{\phi} - J\dot{\chi}, \quad \Omega = \dot{I}\ddot{\phi} - J\ddot{\chi}, \quad S = \dot{\chi}\ddot{\phi} - \dot{\phi}\ddot{\chi}, \quad (13)$$

где ϕ и χ – продольный и поперечный магнитные потоки соответственно, J и I – продольный и поперечный токи внутри магнитной поверхности, ограничивающей

¹ При отброшенном члене $S^{2/4}$ критерий (12) является достаточным для устойчивости плазмы низкого давления.

объем V , точкой обозначено дифференцирование по V , а угловыми скобками – усреднение по замкнутой силовой линии $\langle f \rangle = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}$. Для аксиально-симметричных систем это усреднение эквивалентно усреднению по объему слоя между соседними магнитными поверхностями.

В окрестности магнитной оси $r = R$ аксиально-симметричных плазменных конфигураций условие устойчивости (12) определяется выражением [6]

$$B_0^2 p' \frac{V''}{V'} - p'^2 \left\{ 1 + \frac{16\pi^2 B_0^2}{\chi'^2} \left\langle \frac{(r-R)^2}{|\nabla\phi|^2} \right\rangle \right\} \geq 0, \quad (14)$$

где штрихи означают производные по ϕ . Если воспользоваться разложением (10), то неравенство (14) после вычисления соответствующих интегралов можно преобразовать к виду [5]

$$N^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \left[\frac{2}{1+\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1-b/a}{1+b/a} - \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} (1+2c) \right]. \quad (15)$$

Отметим, что полученное условие устойчивости в случае круглых приосевых сечений магнитных поверхностей ($\varepsilon = 1$) не зависит от параметров a , b и c и имеет универсальную форму $N = \frac{Rj_0}{B_0} < 2$.

Если давление плазмы обращается в нуль на магнитной поверхности ψ_0 , минимальное расстояние которой от оси z равно R_1 , то согласно выражению (15) можно записать следующее ограничение на β_0 :

$$\beta_0 \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \frac{1-R_1^2/R^2}{1+b/a} \left[1 + \frac{1-R_1^2/R^2}{3\varepsilon^2} \left(c - \frac{1-\varepsilon^2 b/a}{1+b/a} \right) \right] N^2. \quad (16)$$

Отметим, что поверхностные функции ϕ , χ , J и I связаны с ψ и $I_A(\psi)$ соотношениями [5]

$$\chi = -2\pi\psi, \quad I = -2\pi I_A, \quad (17)$$

$$2\pi d\phi = I_A dU, \quad 2\pi dJ = p' dV + I_A I_A' dU, \quad (18)$$

где V и U определяются интегралами по поперечному сечению магнитной поверхности:

$$V = 2\pi \int r dr dz; \quad U = 2\pi \int r^{-1} dr dz. \quad (19)$$

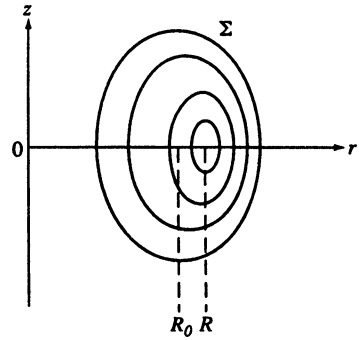
Рассмотрим равновесие и устойчивость плазмы при некоторых заданных формах внешней магнитной поверхности ψ_Σ .

ПЛАЗМА В ТОРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Пусть внешняя магнитная поверхность ψ_Σ имеет эллиптическое поперечное сечение $z^2 + \varepsilon_0^2 (r - R_0)^2 = \varepsilon_0^2 \rho^2$ с центром при $r = R_0$ и с отношением полуосей ε_0 (рис. 1). Решение уравнения равновесия

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = ar^2 + bR^2 + (a'r^2 + b'R^2)\psi + \dots \quad (20)$$

Рис. 1. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе эллиптического сечения



будем искать в виде ряда по степеням малых параметров z/R_0 и $(r - R_0)/R_0$. Приняв $x = r - R_0$ и обозначив через ρ полуширину эллиптического сечения граничной магнитной поверхности $\psi = 0$, запишем

$$\psi = (A + Bx + Cx^2 + Dz^2 + E\rho^2 + \dots)(z^2 + \varepsilon_0^2 x^2 - \varepsilon_0^2 \rho^2). \quad (21)$$

Подставив в уравнение (20) и приравняв члены при одинаковых степенях x , z и ρ^2 , получим значения коэффициентов разложения (21):

$$A = \frac{1}{2} \frac{aR_0^2 + bR^2}{1 + \varepsilon_0^2}, \quad B = \frac{1}{2R_0} \frac{(2 + 3\varepsilon_0^2)aR_0^2 + \varepsilon_0^2 bR^2}{(1 + \varepsilon_0^2)(1 + 3\varepsilon_0^2)}, \quad (22)$$

$$C = \frac{B}{2R_0} - \frac{A\varepsilon_0^2}{4R_0^2} \frac{6 + \varepsilon_0^2 - (5 + \varepsilon_0^2)(a'R_0^2 + b'R^2)R_0^2/3}{1 + 6\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^4},$$

$$D = \frac{A}{4R_0^2} \frac{\varepsilon_0^2 + (1 + 5\varepsilon_0^2)(a'R_0^2 + b'R^2)R_0^2/3}{1 + 6\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^4}, \quad (23)$$

$$E = -\frac{5 + \varepsilon_0^2}{1 + \varepsilon_0^2} \varepsilon_0^2 D. \quad (24)$$

При достаточно малой тороидальности, ограничиваясь в ψ членами $\sim \rho^3 / R_0^3$, можно записать

$$\psi = (A + Bx)(z^2 + \varepsilon_0^2 x^2 - \varepsilon_0^2 \rho^2), \quad (25)$$

где

$$A = \frac{R_0^2}{2} \frac{a + b}{1 + \varepsilon_0^2}, \quad B = \frac{R_0}{2} \frac{(2 + 3\varepsilon_0^2)a + \varepsilon_0^2 b}{(1 + \varepsilon_0^2)(1 + 3\varepsilon_0^2)}. \quad (26)$$

Приравняв к нулю производные ψ по x и z , найдем смещение магнитной оси $x_0 = R - R_0$ от центра сечения $r = R_0$:

$$\frac{x_0}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{2 + 3\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0^2 b/a}{(1 + b/a)(1 + 3\varepsilon_0^2)} \frac{\rho^2}{R_0^2}. \quad (27)$$

При вычислении с той же точностью отношения полуосей эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси $r = R$ получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + 2 \frac{x_0^2}{\rho^2} \right). \quad (28)$$

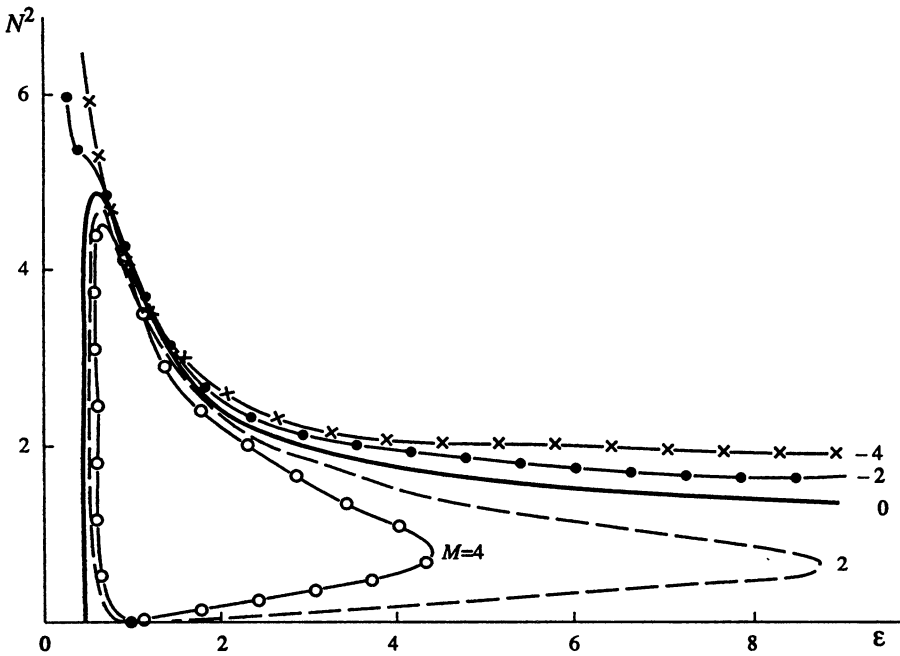


Рис. 2. Области устойчивости плазмы для различных значений параметра $M = 4\delta B^2 R^2 / (B_0^2 \rho^2)$
Области устойчивости находятся внутри замкнутых или под незамкнутыми кривыми

Отсюда видно, что относительные отличия R от R_0 и ϵ от ϵ_0 малы ($\sim \rho^2/R^2$).

Отметим, что при $b/a < 0$ может возникнуть вторая магнитная ось и внутри тороида Ψ_{Σ} образуются два семейства вложенных магнитных поверхностей, разделенных "перегородкой" $r - R_0 = -A/B$.

Пренебрегая членами $\sim \rho^2/R^2$, находим величину c , входящую в условие устойчивости (15):

$$c = \frac{1}{2} \frac{2 + 3\epsilon^2 + \epsilon^2 b/a}{(1 + b/a)(1 + 3\epsilon^2)}. \quad (29)$$

Отношение b/a можно определить из уравнения (9), приняв $\psi_{\sigma} = 0$:

$$\frac{b}{a} = - \frac{\frac{\delta B^2}{B_0^2}}{\frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \frac{\rho^2}{R^2} N^2}. \quad (30)$$

Подставив (30) в выражение (8), получим уравнение равновесия:

$$\beta_0 = \frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \frac{\rho^2}{R^2} N^2. \quad (31)$$

Теперь условие устойчивости (15) можно записать в виде

$$N^4 - \frac{(1 + \epsilon^2)(3\epsilon^4 + 15\epsilon^3 - 7\epsilon^2 + 9\epsilon - 4)}{\epsilon^3(1 + \epsilon)(1 + 3\epsilon^2)} N^2 + \frac{4(1 - \epsilon)^2(1 + \epsilon^2)^3}{\epsilon^5(1 + \epsilon)(1 + 3\epsilon^2)} \frac{\delta B^2}{B_0^2} \frac{R^2}{\rho^2} \leq 0. \quad (32)$$

Соответствующие области устойчивости показаны на рис. 2.

В случае, когда внешняя магнитная поверхность ψ_{Σ} имеет круглое поперечное сечение ($\epsilon_0 = 1$), величина ϵ приближенно определяется из выражения

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{32} \left(\frac{5+b/a}{1+b/a} \right)^2 \frac{\rho^2}{R^2} = 1 + \left(\frac{\frac{5}{4} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \frac{R^2}{\rho^2}}{N^2} \right)^2 \frac{\rho^2}{2R^2} \quad (33)$$

и условие устойчивости (32) имеет вид

$$N^4 - 4N^2 + \left(\frac{\frac{5}{4} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \frac{R^2}{\rho^2}}{N^2} \right)^4 \frac{\delta B^2}{B_0^2} \frac{\rho^2}{R^2} \leq 0. \quad (34)$$

Согласно выражению (34) при $\delta B^2 > 0$ плазма становится неустойчивой при малых токах.

ПЛАЗМА В ТОРЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

При постоянных a и b существует простое точное решение уравнения равновесия (4), удовлетворяющее граничному условию $\psi = 0$ на поверхности эллипсоида вращения, отношение полуосей которого ϵ_{Σ} :

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{ar^2}{1+4\epsilon_{\Sigma}^2} + bR^2 \right) (z^2 + \epsilon_{\Sigma}^2 r^2 - \epsilon_{\Sigma}^2 R_{\Sigma}^2), \quad (35)$$

где R_{Σ} – максимальный радиус граничной поверхности ψ_{Σ} . Магнитные поверхности равновесной конфигурации (35) показаны на рис. 3. Радиус магнитной оси R и отношение полуосей эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности

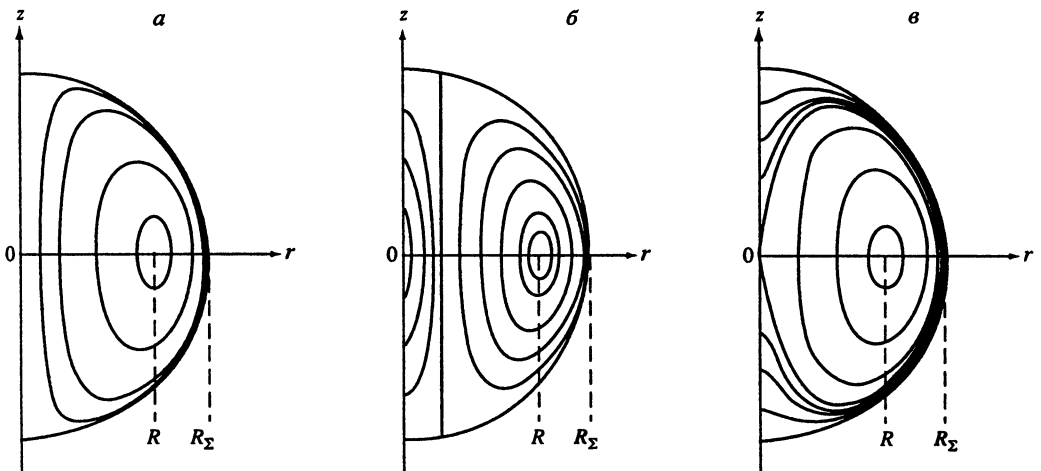


Рис. 3. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе полуэллиптического сечения
 $a - b = 0$; $b - R^2 b/a = -0,008$; $v - R^2 b/a = 0,008$

магнитной оси ϵ связаны с R_{Σ} и ϵ_{Σ} соотношениями

$$R^2 = \frac{R_{\Sigma}^2}{2 + (1 + 4\epsilon_{\Sigma}^2)b/a}, \quad (36)$$

$$\epsilon^2 = \frac{4\epsilon_{\Sigma}^2}{1 + (1 + 4\epsilon_{\Sigma}^2)b/a}. \quad (37)$$

Значение ψ на магнитной оси $r = R$ равно

$$\psi_0 = -\frac{aR^4}{8} \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \frac{(1 + b/a)^3}{(1 - \epsilon^2 b/a)^2}. \quad (38)$$

Предположим, что максимальное расстояние поверхности плазмы от оси z есть R_2 , тогда согласно выражению (9) найдем

$$\frac{b}{a} = -\frac{\delta B^2/B_0^2}{\frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2 N^2}{1 + \epsilon^2} \left(\frac{R_2^2 - R^2}{2R^2} \right)^2}. \quad (39)$$

Подставив это выражение в (8), получим уравнение равновесия:

$$\beta_0 = \frac{\delta B^2}{B_0^2} + \frac{\epsilon^2 N^2}{1 + \epsilon^2} \left(\frac{R_2^2 - R^2}{2R^2} \right)^2. \quad (40)$$

Величина c , входящая в критерий устойчивости (15), для рассматриваемой равновесной конфигурации определяется выражением

$$c = \frac{1 - \epsilon^2 b/a}{1 + b/a}. \quad (41)$$

Полученные соотношения позволяют выразить критерий устойчивости (15) аналогично (32) в виде

$$N^4 - 2 \frac{1 + \epsilon^2}{\epsilon^3} \frac{\epsilon^2 + 3\epsilon - 2}{1 + \epsilon} N^2 + \frac{2\delta B^2}{B_0^2} \left(\frac{2R^2}{R_2^2 - R^2} \right)^2 \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^5} \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} (1 + \epsilon^2)^3 \leq 0. \quad (42)$$

Соответствующие области устойчивости приведены на рис. 4.

Рассмотрим более подробно случай $\delta B^2/B_0^2 = 0$, когда $b = 0$ и продольное магнитное поле $B_{\phi} = I_A/r$ спадает как $1/r$. При этом согласно выражениям (17), (18)

$$p' = \frac{2\pi J}{V}, \quad N = \frac{4\pi^2 J R^3}{IV}, \quad (43)$$

где J – продольный ток в плазме, V – объем плазмы, I – полный ток, который течет в соленоиде, создающем продольное магнитное поле.

При малой тороидальности плазменного тора ($V \approx 2\pi^2 \rho^2 R \epsilon$) равновесное значение β_0 совпадает с уравнением (31):

$$\beta_0 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \frac{\rho^2}{R^2} N^2 = \frac{4}{1 + \epsilon^2} \frac{R^2}{\rho^2} \frac{J^2}{I^2}, \quad (44)$$

а условие устойчивости сводится к ограничению на отношение токов J/J :

$$\frac{J^2}{I^2} \leq \frac{\rho^4}{R^4} \frac{1 + \epsilon^2}{2\epsilon} \frac{\epsilon^2 + 3\epsilon - 2}{1 + \epsilon}. \quad (45)$$

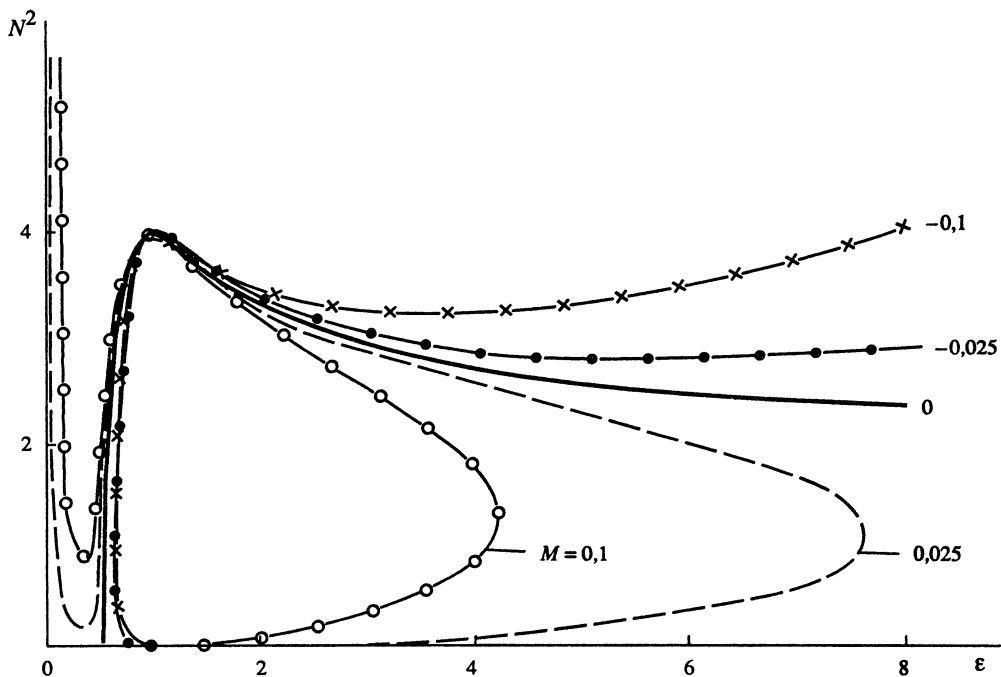


Рис. 4. Области устойчивости плазмы для различных значений $M = 2\delta B^2 [2R^2 / (R_2^2 - R^2)]^2 / B_0^2$

При предельно большой тороидальности, когда плазменный тор занимает почти весь объем ($V_\Sigma = 4\pi\epsilon_\Sigma R_\Sigma^3 / 3$) внутри граничного эллипсоида вращения $z^2 + \epsilon_\Sigma^2 r^2 = \epsilon_\Sigma^2 R_\Sigma^2$,

$$\beta_0 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \frac{N^2}{4} = \frac{1}{8} \frac{9\pi^2}{1 + \epsilon^2} \frac{J^2}{I^2}, \quad (46)$$

а условие устойчивости (43) принимает вид

$$\frac{J^2}{I^2} \leq \frac{8}{9\pi^2} \frac{1 + \epsilon^2}{2\epsilon} \frac{\epsilon^2 + 3\epsilon - 2}{1 + \epsilon}. \quad (47)$$

Здесь максимальное значение β_0 соответствует $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$, а при $\epsilon \approx 9/16$ правая часть неравенства (47) обращается в нуль.

Таким образом, если реализуется случай квазиоднородного продольного магнитного поля ($b = 0$), то в случае предельно большой тороидальности условие гидромагнитной устойчивости приводит к возможности получения достаточно больших токов в плазме. Например, при $\epsilon \approx 1$ критерий устойчивости допускает $\beta_0 \approx 1/2$, $J/I \approx 1/3$.

ПЛАЗМА В ТОРЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Ограничимся случаем $p' = -a = \text{const}$, $R^2 b = -I_A I'_A = \text{const}$ и будем искать решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $\psi = 0$ на поверхности тора Σ прямоугольного сечения (рис. 5). В качестве частного решения неоднородного уравнения (4)

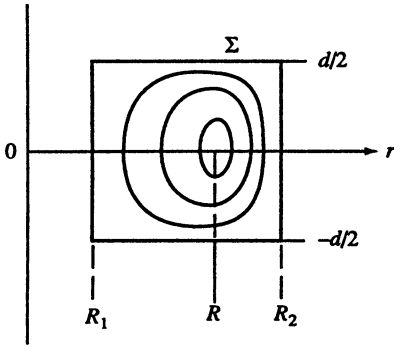


Рис. 5. Магнитные поверхности равновесной плазмы в торе прямоугольного сечения

выберем функцию

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(ar^2 + bR^2)(z^2 - d^2/4), \quad (48)$$

тогда общее решение (4) можно представить в виде

$$\psi = r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n I_1\left(\frac{n\pi z}{d}\right) + \beta_n K_1\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \psi_1. \quad (49)$$

Разлагая функцию

$$f(z) = \begin{cases} z^2 - \frac{d^2}{4} & \text{при } 0 < z < \frac{d}{2}, \\ -\left[(z-d)^2 - \frac{d^2}{4}\right] & \text{при } \frac{d}{2} < z < d \end{cases} \quad (50)$$

в ряд Фурье на двойном интервале $(-d, d)$, находим

$$f(z) = -\frac{8d^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{d}. \quad (51)$$

Коэффициенты α_n и β_n определяются граничными условиями $\psi(R_1, z) = 0$, $\psi(R_2, z) = 0$. В результате получаем

$$\psi = \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3 D_n(R_1, R_2)} \left[\left(aR_2 + \frac{bR^2}{R_2} \right) D_n(R_1, r) - \left(aR_1 + \frac{bR^2}{R_1} \right) D_n(R_2, r) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \frac{r}{2} \left(ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right), \quad (52)$$

где $D_n(x, y)$ выражается через модифицированные бesselовы функции I_1 и K_1 :

$$D_n(x, y) = K_1\left(\frac{n\pi x}{d}\right) I_1\left(\frac{n\pi y}{d}\right) - I_2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) K_1\left(\frac{n\pi y}{d}\right). \quad (53)$$

При достаточно малой тороидальности, когда $\frac{\pi R_1}{d} \gg 1$, используя асимптотику

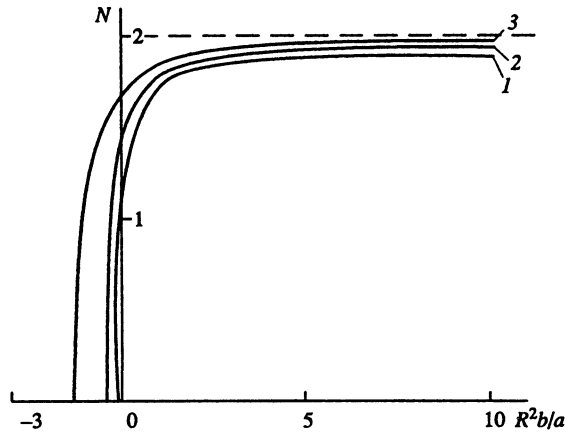


Рис. 6. Области устойчивости плазмы в торе квадратного сечения при $R_1/d = 0,1$ (кривая 1), 0,5 (2) и 1 (3)

бесселевых функций, получаем

$$\Psi = \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (R_2 - R_1)} \left[\left(aR_2 + \frac{bR^2}{R^2} \right) \sqrt{\frac{R^2}{r}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (r - R_1) + \right. \\ \left. + \left(aR_1 + \frac{bR^2}{R_1} \right) \sqrt{\frac{R_1}{r}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{d} (R_2 - r) \right] \cos \frac{n\pi z}{d} + \frac{r}{2} \left(ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right). \quad (54)$$

В противоположном предельном случае большой тороидальности (при $R_1 \rightarrow 0$) функция потока Ψ принимает вид

$$\Psi = \frac{4d^2}{\pi^3} r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3} \left\{ \left(aR_2 + \frac{bR^2}{R_2} \left[1 - \frac{n\pi R_2}{d} K_1 \left(\frac{n\pi R_2}{d} \right) \right] \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{I_1 \left(\frac{n\pi r}{d} \right)}{I_1 \left(\frac{n\pi R_2}{d} \right)} - \frac{bR^2 n\pi}{d} K_1 \left(\frac{n\pi r}{d} \right) \right\} \cos \frac{n\pi z}{d} + \frac{r}{2} \left(ar + \frac{bR^2}{r} \right) \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right). \quad (55)$$

Как показал численный расчет, в случае тора прямоугольного сечения, так же как и в рассмотренном выше случае тора эллиптического сечения, при $b/a < 0$ возможно появление второй магнитной оси.

Область устойчивости рассчитывалась по общей формуле (15), причем значения входящих в нее параметров ϵ и c определялись выражениями (11). Полученные результаты приведены на рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае круговых нормальных сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси ($\epsilon = 1$) условие устойчивости сводится к ограничению на отношение плотности тока к магнитному полю на магнитной оси $j_0 R/B_0 < 2$. В предположении об однородности продольного тока это условие эквивалентно критерию устойчивости Шафранова–Крускала $\frac{RB_\theta(a)}{aB_\phi(a)} < \frac{1}{m}$ для первой моды колебаний $m = 1$. Если при

удалении от магнитной оси плотность тока спадает, то условие устойчивости, представленное в форме критерия Шафранова–Крускала, будет соответствовать $m > 1$. Например, для параболического распределения плотности тока $j_\varphi = j_0(1 - \rho^2/a^2)$ получается $m = 2$.

Для исследования влияния эллиптичности сечений магнитных поверхностей были рассмотрены два случая, когда внешняя магнитная поверхность Σ имеет эллиптическое и полуэллиптическое сечения. Как видно из рис. 2 и 4, предельное значение j_0R/B_0 резко падает при уменьшении отношения полуосей $\epsilon = l_z/l_r$ эллиптических сечений магнитных поверхностей и более плавно падает, когда ϵ становится больше единицы.

В случае предельно большой тороидальности, когда внешняя граница плазмы имеет полуэллиптическое сечение с отношением полуосей $\epsilon_\Sigma = 1/2$ (что соответствует $\epsilon = 1$), предельное значение отношения продольного тока в плазме к току в обмотках соленоида, создающего продольное магнитное поле, составляет $J/I \approx 1/3$, что соответствует отношению давления плазмы к магнитному давлению $\beta \approx 1/2$.

Для исследования влияния тороидальности на устойчивость был рассмотрен также случай плазменного тора, внешняя магнитная поверхность которого имеет прямоугольное поперечное сечение. Как видно из рис. 6, в случае, когда продольное магнитное поле при удалении от магнитной оси спадает ($b/a > 0$), предельное значение отношения $N = j_0R/B_0$ немного уменьшается с ростом тороидальности, причем это уменьшение N связано с соответствующим увеличением ϵ .

Таким образом, с точки зрения условий гидромагнитной устойчивости при заданном магнитном поле увеличение тороидальности должно приводить к увеличению предельного тока и давления плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 33. С. 710.
2. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510.
3. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
4. Vineau M. // Ibid. P. 35.
5. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
6. Соловьев Л.С. // Там же. С. 2063.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Состояние теории гидромагнитной устойчивости плазмы в приближении бесконечной проводимости в настоящее время позволяет произвести детальный анализ особенностей замкнутых систем для удержания плазмы. Мы будем иметь в виду системы, не содержащие проводников с током внутри плазмы, т.е. системы типа стелларатора и токамака, но не левитрона и окуптоля. При этом мы ограничимся рассмотрением однородных конфигураций, у которых магнитное поле на оси постоянно, а сечения магнитных поверхностей вблизи оси представляют собой эллипсы с постоянным отношением полуосей. Общей основой для рассмотрения таких систем может служить предложенный Мерсье [1] метод разложения по расстоянию от магнитной оси.

Как известно, равновесие и устойчивость плазмы зависят от числа вращения силовых линий $\mu = d\chi/d\Phi$, от производной $\mu' = d\mu/d\Phi$, характеризующей перекрещенность силовых линий (шир), и от производной $V'' = d^2V/d\Phi^2$, характеризующей крутизну усредненной магнитной ямы (при $V'' < 0$) или магнитного бугра ($V'' > 0$). Здесь через χ и Φ обозначены поперечный и продольный потоки магнитного поля, а через V – объем, ограниченный магнитной поверхностью, через которую проходит поток Φ . Все упомянутые величины, вообще говоря, не постоянны. Расчеты систем, обладающих симметрией, показывают, что значения μ , μ' , V'' на крайних магнитных поверхностях вблизи сепаратрисы могут сильно отличаться от значений этих величин в центральной части системы (в окрестности магнитной оси). Однако в реальных системах, не обладающих строгой симметрией, магнитные поверхности на периферии, как раз в той области, где μ , μ' , V'' изменяются круто, оказываются разрушенными. Пригодной для удержания плазмы является лишь центральная часть системы. Это обстоятельство и оправдывает применение к расчету тороидальных систем с достаточно плавной магнитной осью метода разложения в окрестности магнитной оси. Независимо от способов создания системы для удержания плазмы ее свойства в основном зависят от значений μ , μ' , V'' в окрестности магнитной оси.

Для определения μ и V'' в окрестности оси достаточно задания шести геометрических параметров, зависящих от длины дуги s , отсчитываемой вдоль магнитной оси:

$$k(s), \quad \kappa(s), \quad \varepsilon(s), \quad \delta(s), \quad q_1(s), \quad q_2(s).$$

Здесь k и κ – кривизна и кручение магнитной оси; ε – параметр эллиптичности, связанный с отношением полуосей l_1, l_2 эллиптического сечения магнитных поверхностей вблизи магнитной оси:

$$\varepsilon = (l_1^2 - l_2^2)/(l_1^2 + l_2^2). \quad (1)$$

* Совместно с В.Д. Шафрановым, Э.И. Юрченко // Proc. III Intern. Conf. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Research. Vienna: IAEA, 1969. P. 175–197.

Наряду с ϵ удобно использовать также параметр η , связанный с ϵ соотношением

$$e^n = \sqrt{(1 + \epsilon)/(1 - \epsilon)}. \quad (2)$$

$\delta(s)$ – угол между главной нормалью к оси и малой полуосью эллипса, так что $\delta(L)/(2\pi) = n$ определяет число оборотов, которое совершает сечение магнитной поверхности при прохождении вдоль замкнутой системы с длиной оси L ; параметры $q_1(s)$, $q_2(s)$ характеризуют асимметрию сечения магнитных поверхностей (третью гармонику), которая наиболее заметно проявляется при удалении от оси.

Производная μ' при $\epsilon \neq 0$ требует для своего определения знания еще двух параметров, характеризующих четвертую гармонику магнитных поверхностей. Однако в критерий устойчивости μ' входит в более высоком приближении разложения по отклонению от оси. Поэтому для описания равновесия и устойчивости плазмы в окрестности магнитной оси достаточно задания шести указанных выше параметров. В методе разложения по степеням расстояния ρ от магнитной оси это соответствует ограничению третьим приближением разложения.

При расчете устойчивости плазмы в замкнутых системах необходимо принимать во внимание искажение магнитных поверхностей, связанное с наличием плазмы. При конечном давлении плазменный шнур подобно накачанному баллону стремится расширяться. При этом внутренние магнитные поверхности оказываются смещенными наружу относительно внешних поверхностей в сторону более слабого тороидального магнитного поля. Благодаря этому возникает углубление магнитной ямы. Этого углубления достаточно для компенсации существенной доли эффекта баллонной неустойчивости замкнутого плазменного шнура. Такая самостабилизация плазмы в замкнутой системе весьма существенно повышает критическое отношение давления плазмы к давлению магнитного поля $\beta = 2p/B^2$, при котором плазма устойчива (в приближении идеальной гидродинамики) благодаря наличию вакуумной магнитной ямы.

Для расчета искажений магнитных поверхностей под влиянием плазмы необходимо задавать внешние граничные условия. В условиях большинства существующих экспериментальных тороидальных систем в качестве граничных условий необходимо задание внешнего магнитного поля. Однако решение задачи с таким условием требует расчета магнитного поля вне области, занятой плазмой, что при некруглой форме сечения магнитных поверхностей представляет собой достаточно сложную задачу. Более проста для решения задача с другим условием, соответствующим наличию идеально проводящего кожуха профилированного сечения, фиксирующего форму крайней внешней магнитной поверхности. Мы ограничимся здесь именно этой постановкой задачи.

В третьем приближении разложения по расстоянию ρ от магнитной оси, достаточном для описания основных характеристик равновесной конфигурации и параметров, влияющих на устойчивость, уравнение семейства магнитных поверхностей имеет вид

$$\psi = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \left[\rho^2 (1 + \epsilon \cos 2u) + \rho^3 (\alpha_1 \cos u + \alpha_2 \sin u + \alpha_3 \cos 3u + \alpha_4 \sin 3u) \right] = \text{const}. \quad (3)$$

Здесь B_0 – магнитное поле на магнитной оси, взятой за координатную ось, u – фаза эллиптического сечения вблизи оси

$$u = \theta + \delta, \quad (4)$$

θ – азимутальный угол, отсчитываемый от главной нормали к магнитной оси; α_1 , α_2 , α_3 , α_4 – параметры третьего приближения магнитных поверхностей. Эти параметры связаны двумя соотношениями, так что независимыми являются только два из них [2].

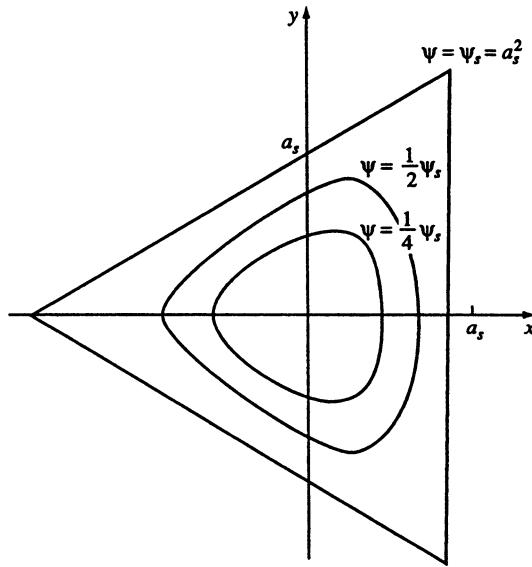


Рис. 1. Семейство возможных сечений кожуха с заданным параметром $q_1 = e^{\eta/2} / (3\sqrt{3}a_s)$ в "скругленной" системе координат

Сечения $s = \text{const}$ магнитных поверхностей представляют собой семейство несимметричных замкнутых кривых. Целесообразно ввести понятие геометрической оси заданной магнитной поверхности. Определим ее так, чтобы в системе координат, связанной с геометрической осью и деформированной так, чтобы эллипсы вблизи оси превратились в "окружности" $\rho_0 = \text{const}$, уравнение магнитной поверхности в третьем приближении не содержало бы гармоник $\cos u$, $\sin u$:

$$\psi = \rho_0^2 + 2(q_1 e^{-\eta/2} \cos 3u + q_2 e^{\eta/2} \sin 3u) \rho_0^3 = \text{const} = a^2. \quad (5)$$

В недеформированной системе координат, связанной с геометрической осью, это уравнение имеет тогда вид

$$\psi = \frac{B_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ (1 + \varepsilon \cos 2\tilde{u}) \tilde{\rho}^2 + q_1 [(2 - \varepsilon) \cos 3\tilde{u} + 3\varepsilon \cos \tilde{u}] \tilde{\rho}^3 + q_2 [(2 + \varepsilon) \sin 3\tilde{u} + 3\varepsilon \sin \tilde{u}] \tilde{\rho}^3 \right\} = B_0 a_k^2, \quad (6)$$

где $\tilde{\rho}$ – расстояние от оси и \tilde{u} – фаза сечения магнитной поверхности в новой системе координат.

Одну из этих поверхностей примем за поверхность идеально проводящего кожуха

$$\psi(\tilde{\rho}, \tilde{u}, s) = B_0 a_k^2. \quad (7)$$

Задав кожух, мы тем самым фиксируем параметры ε , q_1 , q_2 . Заданным значениям этих параметров соответствует семейство кожухов, сечения которых изображены на рис. 1. (при переходе к нормальной системе координат следует ось y растянуть, а ось x сжать в $\sqrt[4]{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}$ раз). Значение ψ на сепаратрисе при $q_2 = 0$ равно

$$\psi_s = B_0 a_s^2 = B_0 e^{\eta/2} / (27 q_1^2). \quad (8)$$

Для определения магнитных поверхностей $\psi = B_0 a^2$ при заданном кожухе достаточно

знать смещения $\Delta_1 = \xi_1 a^2$, $\Delta_2 = \xi_2 a^2$ их геометрических осей по нормали и бинормали к магнитной оси. Эти смещения однозначно выражаются через заданные параметры ε , q_1 , q_2 с помощью уравнений равновесия [3]. Параметры q_1 , q_2 , ξ_1 , ξ_2 связаны с α_1 , α_2 , α_3 , α_4 соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 3\varepsilon q_1 - (2 + \varepsilon)e^{\eta/2}\xi_1, & \alpha_2 &= 3\varepsilon q_2 - (2 - \varepsilon)e^{-\eta/2}\xi_2, \\ \alpha_3 &= (2 - \varepsilon)q_1 - \varepsilon e^{\eta/2}\xi_1, & \alpha_4 &= (2 + \varepsilon)q_2 - \varepsilon e^{-\eta/2}\xi_2.\end{aligned}\quad (9)$$

Заметим, что в выражение для V'' параметры α_1 , α_2 , α_3 , α_4 входят в комбинациях $(2 - \varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3$, $(2 + \varepsilon)\alpha_2 - 3\varepsilon\alpha_4$. Как видно из формул (7) первая из них равна $-4(1 - \varepsilon)e^{\eta/2}\xi_1$, а вторая $-4(1 + \varepsilon)e^{\eta/2}\xi_2$. Таким образом, магнитная яма в соответствии с качественными соображениями зависит непосредственно от смещения магнитных поверхностей. Поскольку в смещении есть часть, зависящая от давления плазмы, то и в магнитной яме можно выделить чисто геометрическую часть и часть, связанную с давлением плазмы:

$$V'' = V_0'' + V_p''. \quad (10)$$

В свою очередь геометрическая часть магнитной ямы состоит из вакуумной магнитной ямы и ямы, созданной током, текущим по плазме.

Общий критерий гидромагнитной устойчивости плазмы относительно локальных возмущений [4–7] состоит в основном из четырех членов [8, 9]:

$$S + C + B + W \geq 0. \quad (11)$$

Первый член $S \sim \mu'^2$ характеризует стабилизирующую роль шара, второй $C \sim p' -$ перестановочную неустойчивость, связанную с продольным током, третий $B \sim p'^2 k^2 -$ баллонную моду неустойчивости, связанную с непостоянством кривизны силовых линий, четвертый $W \sim p' V'' -$ стабилизирующую роль магнитной ямы. В окрестности оси слагаемое S выпадает, так как оно более высокого порядка малости по ρ , чем остальные слагаемые. В соответствии с разделением магнитной ямы на две части можно написать

$$W = W_0 + W_p. \quad (12)$$

Расчет показывает, что при $\varepsilon = 0$ углубление магнитной ямы, связанное с давлением плазмы, полностью компенсирует баллонную неустойчивость ($W_p = -B$). В общем случае ($\varepsilon \neq 0$)

$$W_p + B \sim -\varepsilon^2 p'^2. \quad (13)$$

Таким образом, роль баллонной моды неустойчивости уменьшается с уменьшением ε . Однако в ряде систем для удержания плазмы глубина вакуумной магнитной ямы также падает с уменьшением ε . Поэтому существуют оптимальные значения параметра ε , дающие максимальное критическое значение β по устойчивости в конкретных тороидальных ловушках.

2. СИСТЕМЫ С КРУГЛЫМ СЕЧЕНИЕМ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим сначала системы, в которых внешнее магнитное поле есть поле соленоида, ось которого представляет собой замкнутую кривую с кривизной $k(s)$ и кручением $\kappa(s)$. При $\kappa = 0$ для обеспечения равновесия в таких системах необходим ток. При $\kappa \neq 0$ равновесие возможно и без продольного тока, однако при этом плазма неустойчива. Продольный ток приводит к смещению магнитных поверхностей в область ослабленного тороидального магнитного поля и созданию усредненной "ваку-

умной" ямы ($V_0'' < 0$), обеспечивающей гидромагнитную устойчивость плазмы. Критерий устойчивости плазмы в таких системах при однородной плотности тока и параболическом распределении давления получен и исследован в работах Мерсье [1]. Возможно обобщение этого критерия на случай произвольных распределений давления и тока по радиусу плазменного шнура. Соответствующий критерий выглядит как обобщение критерия Сайдема на случай замкнутого плазменного шнура [8]:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p'}{rB_s^2} \frac{\mu_J^2}{\mu^2} (1-F) \geq 0. \quad (14)$$

Здесь $\mu = \mu_J + \mu_0$, μ_J – число вращения, обусловленное током:

$$\mu_J = \frac{B_\theta L}{B_s 2\pi r} \equiv \frac{1}{q}, \quad (15)$$

а μ_0 – число вращения, связанное с кручением магнитной оси:

$$\mu_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa ds \equiv -\frac{\kappa_0 L}{2\pi}. \quad (16)$$

Функция F связана с вакуумной магнитной ямой:

$$F = -\frac{B_0^2 L}{4\pi\mu_J^2} V_0'' = \frac{1}{\mu_J^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_J - \mu_0 - n}{\mu_J + \mu_0 + n} |k_n|^2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2. \quad (17)$$

В этой формуле k_n – фурье-компоненты относительной кривизны:

$$K(s) = k(s) \exp \left[-i \left(\kappa_0 s - \int_0^s \kappa ds \right) \right]. \quad (18)$$

Заметим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |k_n|^2 = \bar{k}^2 = \frac{1}{L} \int_0^L k^2 ds. \quad (19)$$

При $J = 0$ критерий (14) принимает вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p'}{rB_s^2} \frac{\bar{k}^2}{\mu^2} \geq 0. \quad (20)$$

Устойчивость при $p' < 0$ возможна только за счет шира ($\mu' \neq 0$).

При $J \neq 0$ коэффициент F может превышать единицу, так что критерий устойчивости выполнится даже при $\mu' = 0$. В частности, для плазменного шнура с круговой магнитной осью (токамак), когда $k_n L / (2\pi) = \delta_{n_0}$, $\mu_0 = 0$, коэффициент $F = 1/\mu_J^2$, и условие устойчивости выполняется в области достаточно малых токов [1]

$$\mu_J^2 < 1. \quad (21)$$

В системах типа рейстрека эта область устойчивости сужается и исчезает, когда длина прямолинейных участков сравнивается с длиной закруглений, но зато появляются дополнительные области устойчивости (щели Мерсье). Диаграмма устойчивости в рейстреке приведена на рис. 2.

На рис. 3 приведена диаграмма устойчивости в восьмерке Спитцера, составленной из дуг одинакового радиуса. Характерным здесь является то, что попасть в область устойчивости при нарушении тока нельзя, не проходя области неустойчивости. Этим восьмерка с током принципиально отличается от системы токамак.

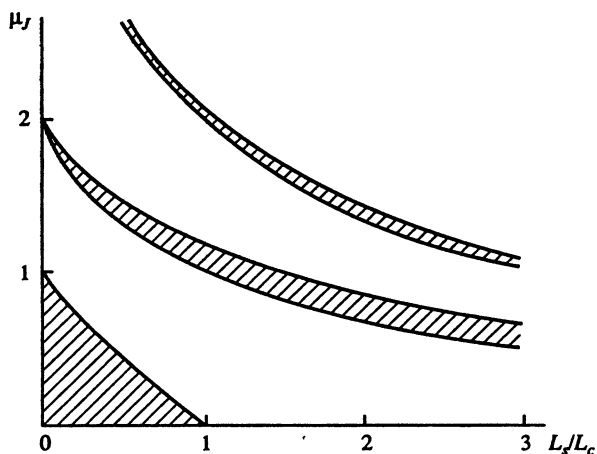


Рис. 2. Диаграмма устойчивости плазм в токамаке, имеющем форму рейстрэка
 L_s, L_c – длины прямого и закругленного участков соответственно, $\mu_J = 1/q = LB_0 / (2\pi a B_0)$

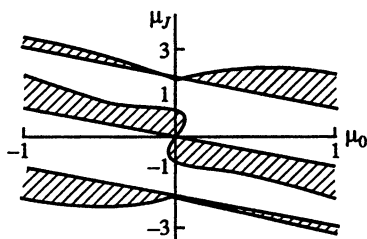


Рис. 3. Диаграмма устойчивости плазмы в восьмерке Спитцера при наличии продольного тока

На рис. 3 μ_0 – поделенный на 2π собственный угол вращательного преобразования, связанный с геометрическим углом восьмерки α соотношением $\mu_0 = 1 - 2\alpha/\pi$; $\mu_J = LB_0 / (2\pi a B_0)$. Из рисунка видно, что центральная область устойчивости соответствует примерно условию $-1 < \mu < 0$ при $\mu_J < 0$ и условию $0 < \mu < 1$ при $\mu_J > 0$ ($\mu = \mu_0 + \mu_J$).

3. СИСТЕМЫ С НЕКРУГЛЫМ СЕЧЕНИЕМ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В системах с некруглым сечением магнитных поверхностей расчет устойчивости нетрудно произвести в предположении, соответствующем примерно однородному распределению тока и параболическому распределению давления плазмы [1, 7]. Системы с принципиально некруглым сечением – это системы стеллараторного типа, в которых вращательное преобразование создается поперечным мультипольным магнитным полем. Однако и в тех системах, где вращательное преобразование создается за счет тока или кручения оси, деформация сечений магнитных поверхностей может способствовать углублению ямы и тем самым повышению устойчивости плазмы.

Сначала мы рассмотрим именно такие системы, так как они могут обладать осевой и винтовой симметрией.

3.1. Токамак с некруглым сечением кожуха

Условие устойчивости плазмы в осесимметричном токамаке может быть записано в виде [3, 7]

$$\mu_J^2 < f_1(\epsilon) + q_1 f_2(\epsilon) - \beta_J f_3(\epsilon), \quad (22)$$

где

$$f_1 = 1 - \frac{3\epsilon}{2} \frac{1+\epsilon}{2+\epsilon}, \quad f_2 = 12\epsilon \frac{1-\epsilon}{2+\epsilon}, \quad (23)$$

$$f_3 = \frac{4\epsilon^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{(1+\epsilon)(2+\epsilon)^2 \left[1 + \sqrt{1-\epsilon^2} - \epsilon^2 / (2+\epsilon) \right]}. \quad (24)$$

$$\mu_J = \frac{j_0 R}{2B_0} \sqrt{1-\epsilon^2}, \quad \beta_J = \frac{2\langle p \rangle}{[J/(2\pi a)]^2}.$$

Последнее слагаемое в (22) характеризует роль баллонной моды неустойчивости.

Из критерия устойчивости видно, что если при $\epsilon = 0$ (круглое сечение) плотность тока ограничена условием

$$j_0^2 R^2 / (4B_0^2) < 1, \quad (25)$$

то при $\epsilon \neq 0$, $q_1 \neq 0$ предел тока может стать выше (особенно при $\epsilon < 0$, $q_1 < 0$, что соответствует сплюснутому в направлении оси симметрии сечению с заострением, направленным внутрь тора). Например, при $\epsilon = 0,8$, $q_1 R = 0,5$

$$j_0^2 R^2 / (4B_0^2) < 1,56 - 0,2\beta_J, \quad (26)$$

а при $\epsilon = -0,8$, $q_1 R = -0,5$

$$j_0^2 R^2 / (4B_0^2) < 23,4 - 14\beta_J. \quad (27)$$

Для нагрева плазмы выгодно иметь большое j^2 , однако если при этом сечение сильно сплюснуто, то возникают большие градиенты температуры и сильные потери тепла, зависящие от $\nabla^2 T$. При фиксированной тороидальности кожуха (т.е. при заданном отношении горизонтальной полуоси l_r к радиусу R) $\nabla^2 T \sim T(1 + l_r^2 / l_z^2) / l_r^2 = 2T / [l_r^2(1 + \epsilon)]$. Таким образом, температура будет тем выше, чем больше $j^2(1 + \epsilon)$. Оптимальным с точки зрения нагрева плазмы будет условие, при котором максимальна безразмерная функция

$$Q = \frac{R^2 j^2}{4B_0^2} (1 + \epsilon) = \frac{\mu_J^2}{1 - \epsilon} = \frac{f_1}{1 - \epsilon} + \frac{12\epsilon}{2 + \epsilon} q_1 - \beta_J \frac{f_3}{1 - \epsilon}. \quad (28)$$

Для круглого сечения кожуха ($\epsilon = 0$) $Q = 1$. Графики зависимости функций $f_1 / (1 - \epsilon)$ и $f_3 / (1 - \epsilon)$ показаны на рис. 4. На рис. 5 (кривая 1) представлена функция Q при чисто эллиптическом сечении кожуха ($q_\perp = 0$) с $\beta_J = 1$. Как видно из этого рисунка, Q имеет максимальное значение при круглом сечении ($\epsilon = 0$). В случае несимметричных сечений величина Q изменяется на $12\epsilon q_1 / (2 + \epsilon)$. С ростом $|q_1|$ уменьшается средний радиус сепаратрисы семейства кожухов с заданным значением q_1 и, соответственно, отношение поперечного размера плазменного шнура к его длине. Поэтому следует выбрать q_1 не слишком большим. На том же рис. 5 (кривые 2, 3) показана функция $Q(\epsilon)$ для достаточно крутого тора с $q_1 R = 0,5$ и $q_1 R = -0,5$. Здесь имеется два максимума при $\epsilon = \pm 0,7$. Значение Q в этих максимумах в два с небольшим раза превышает значение Q при $\epsilon = 0$. Форма сечения кожухов с $q_1 R = 0,5$, $\epsilon = 0,7$ и

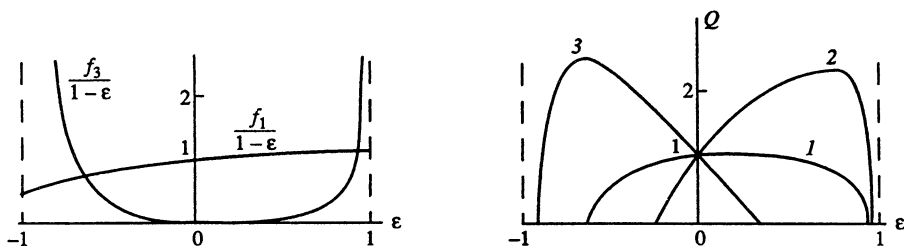


Рис. 4. Зависимость функций $f_1/(1-\epsilon)$ и $f_3/(1-\epsilon)$ от ϵ , характеризующих магнитную яму в токамаке чисто эллиптического сечения и роль баллонной моды соответственно

Рис. 5. Зависимость функции Q , характеризующей влияние формы кожуха на нагрев плазмы в токамаке, от ϵ при $\beta_j = 1$ и разных значениях параметра асимметрии сечения q_1 ($1 - q_1R = 0$; $2 - q_1R = 0,5$; $3 - q_1R = -0,5$)

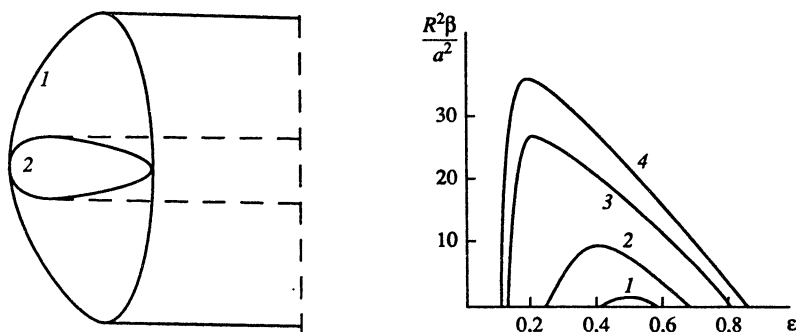


Рис. 6. Возможная форма кожуха в токамаке, соответствующая кривым 2 и 3 на рис. 5

Рис. 7. Зависимость критического по устойчивости давления плазмы от ϵ и q_1 в винтовом плазменном шнуре ($1 - q_1R = 0,3$; $2 - 0,5$; $3 - 1,0$; $4 - 1,2$)

$q_1R = -0,5$, $\epsilon = -0,7$ показана на рис. 6. Действительный же выигрыш, связанный с изменением формы кожуха, зависит от закона, по которому реальный коэффициент теплопроводности связан с температурой плазмы, и не может быть оценен в рамках данной работы.

3.2. Пространственная система с магнитной ямой

Пространственной системой мы для краткости будем называть систему, ось которой представляет собой пространственную кривую, обладающую кривизной k и кручением κ . Пространственные системы с круглым сечением магнитных поверхностей, как следует из разд. 2, имеют магнитную яму только при наличии продольного тока конечной величины. Добавление второй и третьей гармоник магнитного поля позволяет создать пространственную систему, обладающую магнитной ямой и в отсутствие тока [2]. Простейшей пространственной системой является система с винтовой симметрией, имеющая вид винтового соленоида. Если винтовой соленоид обвивает тор, кривизна которого мала по сравнению с кривизной винта, то мы получаем замкнутую систему, мало отличающуюся от системы с винтовой симметрией.

Условие устойчивости плазмы в системе с винтовой симметрией выглядит так ($R = L/(2\pi) = 1/\sqrt{k^2 + \kappa^2}$):

$$\frac{R^2}{a^2} \beta < \frac{\mu^2(1+e^n)}{2(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})} \left[\frac{\mu_J - \mu_0}{\mu_J + \mu_0} + \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{(2+\varepsilon)(\mu_J^2 + \varepsilon^2 \kappa^2 R^2)}{2(1-\varepsilon)k^2 R^2} + 6\varepsilon \frac{q_1}{k} \right]. \quad (29)$$

В отсутствие продольного тока ($\mu_J = 0$) стабилизация возможна, если $\varepsilon q_1/k$ превышает некоторое критическое значение. На рис. 7 показана зависимость $R^2\beta/a^2$ от ε при фиксированном значении q_1 для винтового плазменного шнура с углом подъема 45° ($k = \kappa$). Следует иметь в виду, что средний радиус сечения плазменного шнура можно считать независимым от q_1 и равным среднему радиусу сечения кожуха $a = a_\kappa$ лишь при $q_1 a_\kappa < e^{n/2}/(3\sqrt{3})$, когда размер сепаратрисы семейства магнитных поверхностей с данным q_1 больше размера кожуха. При фиксированных размерах системы при увеличении q_1 сепаратриса попадает внутрь камеры. В этом случае максимальный размер шнура ограничен размером сепаратрисы $a_{\max} = e^{n/2}/(3\sqrt{3}q_1)$.

Поэтому, несмотря на то что функция $R^2\beta/a^2$ растет с увеличением q_1 , граничное значение β в данной системе сначала растет с q_1 , достигает максимума при $q_1 \approx e^{n/2}/(3\sqrt{3}a_\kappa)$ и затем падает. Зависимость β_{\max} от q_1 при фиксированной тороидальности R/a_κ представлена на рис. 8. Как видно из этого рисунка, при соответствующем выборе параметров системы ограничения на давление плазмы с точки зрения гидромагнитной устойчивости практически нет ($\beta_{\max} \sim 1$). Заметим, что глубина ямы при этом невелика ($\sim 4\%$).

В системе с вакуумной магнитной ямой можно пропускать ток, не нарушая равновесия и устойчивости плазмы. Если ток имеет такое направление, что числа вращений μ_J и μ_0 одного знака, то он оказывает стабилизирующее действие. Малый обратный ток ($|\mu_J| < |\mu_0|$, $\mu_J \mu_0 < 0$) оказывает дестабилизирующее действие. Его максимально допустимая величина зависит от глубины вакуумной магнитной ямы. Достаточно сильный обратный ток, при котором изменяется знак суммарного вращательного преобразования ($|\mu_J| > |\mu_0|$), оказывает также стабилизирующее действие.

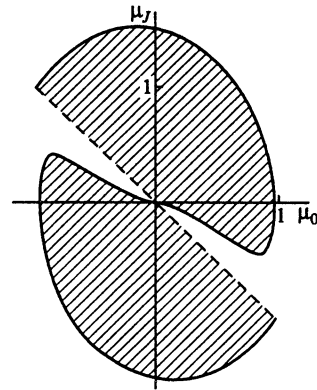
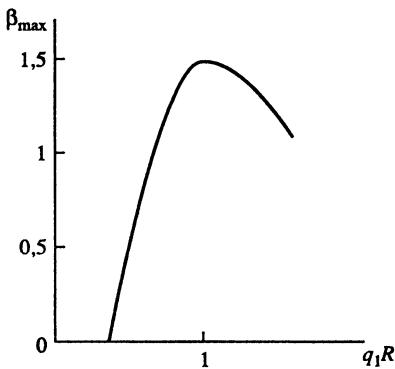


Рис. 8. Зависимость критического давления от q_1 при оптимальном значении ε в винтовой системе с фиксированной тороидальностью $R/a_\kappa = 4$

Рис. 9. Диаграмма устойчивости винтового плазменного шнура с максимальной вакуумной магнитной ямой ($\varepsilon \approx 0,3$; $q_1 R \approx 1$) при наличии продольного тока ($\mu_J \neq 0$)

Диаграмма устойчивости винтового плазменного шнура с максимальной вакуумной ямой ($\varepsilon \approx 0,3$; $q_1 R \approx 1$) представлена на рис. 9. Как видно из рисунка, по плазме можно пропускать также и переменный ток, не выходя из области устойчивости.

Рассмотренная пространственная система с винтовой симметрией может служить грубой моделью замкнутых систем типа пространственных восьмерок.

3.3. Двухзаходный стелларатор

Под двухзаходным стелларатором обычно подразумевается система, в которой поперечное магнитное поле изменяется по закону $\exp [2i(\theta + \eta\zeta)]$, где $\zeta = 2\pi s/L$. Благодаря эффекту кривизны, которая входит с множителем $\exp (\pm i\theta)$, к любому двухзаходному стелларатору всегда подмешиваются гармоники поля $\exp [i(\theta + 2n\zeta)]$ и $\exp [i(3\theta + 2n\zeta)]$. При этом параметры q_1, q_2 магнитных поверхностей имеют вид

$$q_1 = q_{10} \cos n\zeta, \quad q_2 = q_{20} \sin n\zeta. \quad (30)$$

Оказывается, что примесные гармоники даже при малой амплитуде довольно сильно влияют на форму магнитной оси и на крутизну магнитной ямы. Искусственным добавлением примесных гармоник можно существенно расширить возможности двухзаходного стелларатора. Поэтому будем считать амплитуды q_{10}, q_{20} произвольными.

Чувствительность магнитной ямы к полю третьей гармоники усложняет применение критерия устойчивости к конкретным установкам. Поэтому мы ограничимся здесь выяснением принципиального вопроса о возможностях двухзаходного стелларатора, полагая, что магнитная ось при наличии плазмы является окружностью радиуса R . Так как оптимальные условия устойчивости достигаются при малой эллиптичности, то мы запишем критерий устойчивости двухзаходного стелларатора, полагая $\varepsilon^2 \ll 1$:

$$\frac{R^2}{a^2} \beta < \frac{n^2 \varepsilon^2}{2} \left[\frac{3}{2} - n^2 \varepsilon^2 + \frac{4(q_{10} + q_{20})R}{\varepsilon} \right]. \quad (31)$$

Из этого условия следует, что в случае чисто эллиптических сечений магнитных поверхностей ($q_{10} = q_{20} = 0$) плазма устойчива лишь при $\varepsilon^3 < 3/(2n^2)$. При этом максимальное критическое давление равно $\beta_{\max} = 9a^2/(32R^2)$ и достигается оно при $\varepsilon^2 = 3/(4n^2)$.

Добавление третьей гармоники существенно изменяет условие устойчивости. На рис. 10 приведены графики функции $R^2\beta/a^2$ для стелларатора с $n = 7$ при $q_{10} = q_{20} = 0$. На рис. 11 изображена зависимость β_{\max} от параметра третьей гармоники при фиксированной тороидальности кожуха $R/a_k = 6$. Эта кривая построена аналогично кривой рис. 8 для винтового плазменного шнура с той разницей, что размер шнура принимается равным половине размера сепаратрисы, поскольку в системах, не обладающих симметрией, магнитные поверхности вблизи сепаратрисы разрушены. Как и в случае винтового шнура, в двухзаходном стеллараторе при соответствующем выборе его параметров нет ограничения по давлению плазмы. Однако определенным практическим недостатком его является отмечавшаяся выше чувствительность к весьма малым изменениям формы равновесной конфигурации.

3.4. Резонансный характер трехзаходного стелларатора

Трехзаходный стелларатор выпадает из общей схемы рассмотрения, использованной в настоящей работе, из-за равенства нулю угла прокручивания на магнитной оси ($\mu(0) = 0$). Случай $\mu = 0$ относится к числу резонансных. Малое поперечное однородное магнитное поле B_{\perp} приводит к существенному искажению конфигурации в окрестности магнитной оси. Характер этого искажения легко уяснить, рассмотрев задачу о влиянии поперечного поля $B_y = B_{\perp}$ на семейство круглых магнитных поверхностей $r^2 = x^2 + y^2 = \text{const}$.

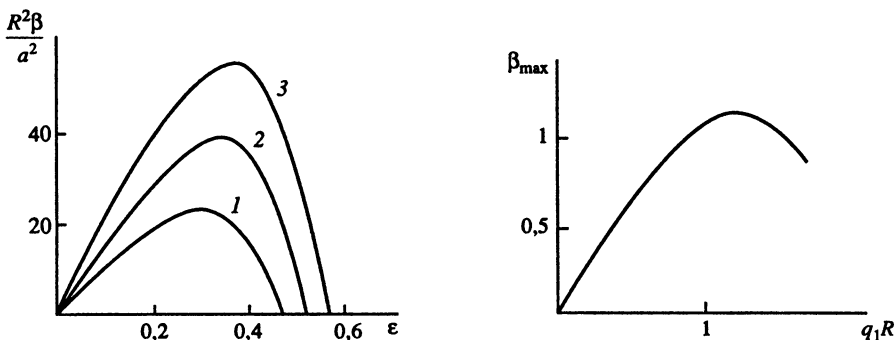


Рис. 10. Зависимость критического по устойчивости давления плазмы от ϵ и q_1 в двухзаходном стеллараторе с $n = 7$ ($1 - q_1 R = 0,5$; $2 - 0,75$; $3 - 1,0$)

Рис. 11. Зависимость критического давления от q_1 при оптимальном значении ϵ в двухзаходном стеллараторе с $n = 7$, $R/a_k = 6$

Для m -заходного стелларатора $\mu = \mu_1 r^{2(m-2)}$. В этом случае, как нетрудно показать, возмущенные магнитные поверхности описываются уравнением

$$\psi = \int \mu dr^2 + \frac{2B_{\perp}}{B_0} R x = \frac{\mu_1}{m-1} \left[r^{2(m-1)} + \frac{2(m-1)RB_{\perp}}{\mu_1 B_0} x \right] = \text{const.}$$

Магнитная ось этого семейства имеет координаты $x = x_0, y = 0$, где

$$x_0^{2m-3} = - \frac{RB_{\perp}}{\mu_1 B_0}.$$

Из-за корневой зависимости смещения от возмущающего поля ($x_0 \sim B_{\perp}^{1/(2m-3)}$) величина смещения даже при малом возмущении оказывается достаточно большой. Вблизи оси сечения эллиптические, причем параметр эллиптичности и отношение полуосей равны соответственно

$$\epsilon = \frac{m-2}{m-1}, \quad \frac{l_y}{l_x} = \sqrt{2m-3}.$$

Искажение начальной формы магнитных поверхностей перестает сказываться лишь при значительном удалении от оси ($r \gg |x_0|$).

В трехзаходном стеллараторе ($m = 3$) отношение полуосей эллипсов вблизи оси равно $l_y/l_x = \sqrt{3}$. На рис. 12 показана форма магнитных поверхностей при $\mu = 400 r^2/R^2$, $B_{\perp}/B_0 = 10^{-4}$. Как видно, уже простая модель показывает очень большую чувствительность приосевой области к возмущающему однородному полю. Численные расчеты магнитных поверхностей в трехзаходном стеллараторе [10, 11] подтверждают эти заключения. Более детальные расчеты показывают, что отношение полуосей не постоянно. По мере продвижения вдоль магнитной оси оно слегка меняется. При этом сам эллипс слегка покачивается, но не проворачивается вокруг оси полностью.

Путем тщательного регулирования можно добиться обращения однородного поперечного магнитного поля на оси в нуль. Однако уже незначительные изменения параметров плазмы (например, давления) вновь приводят к искажению приосевой

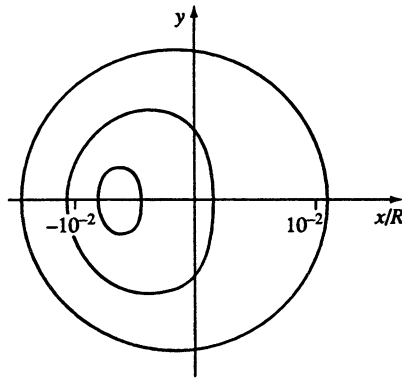


Рис. 12. Иллюстрация неустойчивости приосевой области трехзаконного стелларатора на модели цилиндрически-симметричной конфигурации с $\mu = \mu_1 r^2$

Принято $\mu_1 = 400 / R^2$, где R – радиус воображаемого тора. Возмущающее поперечное поле составляет 10^{-2} % от продольного ($B_{\perp} / B_0 = 10^{-4}$)

области. В случае трехзаконного стелларатора поперечное поле связано с давлением соотношением $B_{\perp} \sim \beta B_0 / \mu_{\max}$.

Это резонансное свойство трехзаконного стелларатора требует специального подхода к расчету критического давления плазмы с точки зрения гидромагнитной устойчивости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работах [4–6] был получен общегеометрический необходимый критерий устойчивости равновесной идеально проводящей плазмы относительно локальных возмущений. При этом под локальными возмущениями понимаются малые смещения плазмы относительно положения равновесия, имеющие произвольную форму на рассматриваемой магнитной поверхности и малую протяженность в направлении нормали к магнитной поверхности.

Для равновесной плазмы, описываемой уравнениями

$$\nabla p = [j\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{П.1})$$

соответствующий критерий устойчивости можно представить в виде [7]

$$\frac{1}{4} S^2 + F - G \geq 0, \quad (\text{П.2})$$

где

$$F = -\Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + S \left\langle \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle, \quad (\text{П.3})$$

$$G = \left\langle \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2. \quad (\text{П.4})$$

Величины Ω и S , так же как и давление p , являются поверхностными функциями, зависящими только от текущего объема V , заключенного внутри рассматриваемой магнитной поверхности. Они выражаются через производные по объему V от продольного и азимутального магнитных потоков Φ и χ и продольного и азимутального токов J и I :

$$p' = I'\Phi' - J'\chi', \quad \Omega = I'\Phi'' - J'\chi'', \quad S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi''. \quad (\text{П.5})$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по объему, заключенному между двумя соседними магнитными поверхностями, или, что эквивалентно, усреднение по замкнутой магнитной силовой линии, лежащей на рациональной магнитной поверхности:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f d\tau = \oint f \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}. \quad (\text{П.6})$$

Член $S^2/4$ характеризует стабилизацию широм, величина F описывает стабилизирующее действие магнитной ямы ($\min \bar{B}$), а величина G описывает дестабилизацию, связанную с конечным давлением плазмы.

Как показано в работе [9], критерий (П.2) без члена $S^2/4$ является достаточным условием устойчивости для плазмы, удерживаемой квазиоднородным магнитным полем. При этом условие квазиоднородности предполагает малость магнитного поля, создаваемого токами в плазме, по сравнению с внешним магнитным полем.

В окрестности магнитной оси s плазменной конфигурации критерий (П.2) без члена $S^2/4$ можно преобразовать к виду [9]

$$p' \frac{V''}{V'} - \left\langle \frac{p'^2}{B_s^2} \right\rangle - \left\langle \frac{B_s^2 \left(\rho \frac{\partial j_s}{\partial \rho} \frac{1}{B_s} \right)^2}{|\nabla \Phi|^2} \right\rangle \geq 0, \quad (\text{П.7})$$

где ρ – расстояние от магнитной оси, а штрихами обозначены производные по продольному потоку Φ . Здесь характеристикой магнитной ямы является V'' , а остальные члены описывают дестабилизацию, связанную с наличием токов в плазме. Для устойчивости при спадающем давлении $p'(V) < 0$ необходимо $V'' < 0$.

Величину V'' в окрестности магнитной оси можно представить в виде контурного интеграла по магнитной оси:

$$V'' = -\frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2} \left\{ \left[\frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) - \varepsilon^2 (\delta' - \varkappa)^2 - \frac{\eta'^2}{4} - \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} + \frac{\varepsilon \eta' B_0'}{B_0} \right] \text{ch } \eta - \right. \\ \left. - \frac{\pi p'}{B_0} - \frac{j_0^2}{4B_0^2 \text{ch } \eta} - 2kB_0^{1/2} (\alpha_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \alpha_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\}, \quad (\text{П.8})$$

где $k(s)$ и $\varkappa(s)$ – соответственно кривизна и кручение магнитной оси, $\varepsilon(s) = \text{th } \eta$ – параметр эллиптичности приосевых нормальных сечений магнитных поверхностей, $\delta(s)$ – угол малой полуоси эллипса с нормалью к магнитной оси, $B_0(s)$ и $j_0(s)$ – поле и плотность тока на магнитной оси, $p' = p'(\Phi)$, $\alpha_1(s)$ и $\alpha_2(s)$ – параметры магнитных поверхностей, уравнение которых в скругляющей системе координат r, ϑ, s , проворачивающейся вокруг магнитной оси s вместе с приосевыми сечениями магнитных поверхностей, имеет вид

$$\psi = r^2 + r^3 (\alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \sin \vartheta + \alpha_3 \cos 3\vartheta + \alpha_4 \sin 3\vartheta) + \dots = \text{const}. \quad (\text{П.9})$$

Член в выражении (П.8), пропорциональный p' , в общем случае сокращается при подстановке V'' и $V' = \oint \frac{ds}{B_0}$ в критерий устойчивости (П.7), который в результате также может быть представлен в виде контурного интеграла на магнитной оси s :

$$-p' \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ \left[\frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) - \varepsilon^2 (\delta' - \varkappa)^2 - \frac{\eta'^2}{4} - \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} + \frac{\varepsilon \eta' B_0'}{B_0} \right] \text{ch } \eta - \right. \\ \left. - \frac{j_0^2}{4B_0^2 \text{ch } \eta} - 2kB_0^{1/2} (\alpha_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \alpha_2 e^{\eta/2} \sin \delta) + \pi p' B_0' V'^2 \left(\frac{\gamma_1^2}{1 + e^{-\eta}} + \frac{\gamma_2^2}{1 + e^{\eta}} \right) \right\} \geq 0. \quad (\text{П.10})$$

Входящие сюда параметры γ_1 и γ_2 определяются стандартной системой уравнений

$$\begin{aligned}\gamma_1' + \nu' \gamma_2 &= -\frac{2ke^{-\eta/2}}{V'B_0^{3/2}} \cos \delta, \\ \gamma_2' - \nu' \gamma_1 &= -\frac{2ke^{-\eta/2}}{V'B_0^{3/2}} \sin \delta,\end{aligned}\tag{П.11}$$

где

$$\nu' = \frac{1}{\operatorname{ch} \eta} \left(\delta' - \kappa + \frac{j_0}{2B_0} \right) = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(\delta' - \kappa + \frac{j_0}{2B_0} \right)\tag{П.12}$$

– угол прокручивания магнитных силовых линий в окрестности магнитной оси.

Уравнения для параметров α_1 и α_2 имеют такой же вид, как и (П.11), однако в правые части этих уравнений входят также параметры γ_1 и γ_2 . Поэтому целесообразно представить α_1 и α_2 в виде сумм

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_2\tag{П.13}$$

таким образом, чтобы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1' + \nu' \tilde{\alpha}_2 &= \frac{2\pi p' V'}{e^\eta + 3e^{-\eta}} \gamma_1, \\ \tilde{\alpha}_2' - \nu' \tilde{\alpha}_1 &= \frac{2\pi p' V'}{e^{-\eta} + 3e^\eta} \gamma_2.\end{aligned}\tag{П.14}$$

При этом критерий устойчивости (П.10) можно преобразовать так, чтобы в него не входили $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$:

$$\begin{aligned}-p' \oint \left\{ \left[\frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) - (\delta' - \kappa)^2 \varepsilon^2 - \frac{\eta'^2}{4} - \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} + \frac{\varepsilon B_0' \eta'}{B_0} \right] \frac{\operatorname{ch} \eta}{B_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{j_0^2}{4B_0^2 \operatorname{ch} \eta} - 2kB_0^{-3/2} (\bar{\alpha}_1 e^{-\eta/2} \cos \delta + \bar{\alpha}_2 e^{\eta/2} \sin \delta) \right\} + \\ + 2\pi p' V'^2 \frac{\operatorname{sh}^2 \eta/2}{\operatorname{ch} \eta/2} \left(\frac{\gamma_1^2 e^{3\eta/2}}{3 + e^{2\eta}} + \frac{\gamma_2^2 e^{-3\eta/2}}{3 + e^{-2\eta}} \right) \Bigg\} ds \geq 0.\end{aligned}\tag{П.15}$$

Как показывает выражение (П.15), условие устойчивости конфигураций с круглыми приосевыми сечениями магнитных поверхностей, когда $\varepsilon = 0$, сводится при $p' < 0$ к требованию $V'' \leq 0$, где в выражении V'' отброшен член, пропорциональный p' .

Для получения уравнений для параметров магнитных поверхностей $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ ограничимся решением граничной задачи при заданной форме нормального сечения внешней магнитной поверхности Σ . В общем виде семейство магнитных поверхностей, каждую из которых можно принять за внешнюю поверхность Σ , можно в рассматриваемом приближении записать в смещенной системе координат

$$x_1 = \eta \cos \vartheta_1 = x_0 + x, \quad y_1 = \eta \sin \vartheta_1 = y_0 + y\tag{П.16}$$

в виде

$$\eta_1^2 + \eta_1^3 (\sigma_1 \cos \vartheta_1 + \sigma_2 \sin \vartheta_1 + \sigma_3 \cos 3\vartheta_1 + \sigma_4 \sin 3\vartheta_1) = a^2,\tag{П.17}$$

где $a = \text{const}$, а $\sigma_i(s)$ – заданные функции. При этом функция магнитных поверхностей

представляется в виде

$$\Psi = \left[1 + \eta_1 (\Delta_1 \cos \vartheta_1 + \Delta_2 \sin \vartheta_1) \right] \times \left[r_1^2 + r_1^3 (\sigma_1 \cos \vartheta_1 + \sigma_2 \sin \vartheta_1 + \sigma_3 \cos 3\vartheta_1 + \sigma_4 \sin 3\vartheta_1) - a^2 \right] + a^2. \quad (\text{П.18})$$

Сравнивая это выражение с выражением (П.9) для функции Ψ в координатах $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, получим при малых Δ_1 и Δ_2

$$\Delta_1 = 2x_0/a^2, \quad \Delta_2 = 2y_0/a^2, \quad (\text{П.19})$$

$$\alpha_1 = \Delta_1 + \sigma_1, \quad \alpha_2 = \Delta_2 + \sigma_2, \quad \alpha_3 = \sigma_3, \quad \alpha_4 = \sigma_4. \quad (\text{П.20})$$

Функции $\sigma_i(s)$ могут быть заданы произвольно, при этом только следует иметь в виду, что семейство (П.17) имеет сепаратрису, размеры которой зависят от σ_i . Если ограничиться случаем симметричных относительно оси y профилей сечений магнитных поверхностей, то $\Delta_2 = \sigma_2 = \sigma_4 = 0$, и остаются два произвольных параметра несимметричности сечений σ_1 и σ_3 . В тексте доклада мы ограничились случаем $\sigma_1 = 0$. В общем случае параметры $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$, входящие в критерий устойчивости (П.15), удовлетворяют стандартной системе уравнений

$$\bar{\alpha}'_1 + \nu' \bar{\alpha}_2 = \frac{g_1(\sigma'_3 + 3\nu' \sigma_4) - P_1}{2g_0 + g_1}, \quad (\text{П.21})$$

$$\bar{\alpha}'_2 - \nu' \bar{\alpha}_1 = \frac{g_1(\sigma'_4 - 3\nu' \sigma_3) - P_2}{2g_0 - g_1}.$$

Здесь P_1 и P_2 соответственно равны

$$2P_1 = -(3g_0 + g_1)(c'_1 - \nu' c_2) + (g'_0 - g'_1) c_1 - \left(\frac{6u'}{B_0} + \frac{j_0}{B_0^2} \right) c_2, \quad (\text{П.22})$$

$$2P_2 = -(3g_0 - g_1)(c'_2 + \nu' c_1) + (g'_0 + g'_1) c_2 + \left(\frac{6u'}{B_0} + \frac{j_0}{B_0^2} \right) c_1$$

и введены следующие обозначения:

$$u' = \delta' - \kappa, \quad g_0 = \frac{\text{ch } \eta}{B_0}, \quad g_1 = -\frac{\text{sh } \eta}{B_0}, \quad (\text{П.23})$$

$$c_1 = kB_0^{-1/2} e^{-\eta/2} \cos \delta, \quad c_2 = kB_0^{-1/2} e^{\eta/2} \sin \delta. \quad (\text{П.24})$$

Таким образом, входящие в критерий устойчивости параметры $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ и γ_1 , γ_2 определяются системами уравнений (П.21) и (П.11) с известными правыми частями. Решения этих уравнений можно представить в виде рядов Фурье, что в основном и использовалось в тексте доклада. Однако в ряде случаев представляется более удобным использовать интегральное решение [1], которое для стандартной системы уравнений

$$z'_1 + \nu' z_2 = f_1, \quad z'_2 - \nu' z_1 = f_2 \quad (\text{П.25})$$

может быть записано в виде

$$z = \frac{ie^{i\nu(L)/2} e^{i\nu}}{2\sin(\nu(L)/2)} \int_0^L e^{-i\nu} f ds + e^{i\nu} \int_0^s e^{-i\nu} f ds, \quad (\text{П.26})$$

где $z = z_1 + iz_2$, $f = f_1 + if_2$, L – длина магнитной оси конфигурации, $\nu = \nu(s) = \int_0^s \nu ds$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Nucl. Fusion. 1963. Vol. 3. P. 89.
2. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1967. Т. 5. С. 245.
3. Shafranov V., Yurchenko E. // Nucl. Fusion. 1968. Vol. 4. P. 3.
4. Mercier C. // Proc. Int. Conf. Plasma Phys. and Control Nucl. Fusion. Salzburg. 1961. P. 95.
5. Bineau M. // Ibid. P. 35.
6. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510.
7. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
8. Shafranov V.D. // Nucl. Fusion. 1968. Vol. 4. P. 15.
9. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 2063.
10. Green J.M., Johnson J.L. // Phys. Fluids. 1961. Vol. 4. P. 875.
11. Vuillemin M., Gourdon C. // Association CEA Fur-CEA-Fc. 1966. P. 393.

ГИДРОМАГНИТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИММЕТРИЧНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ*

ОБЩЕГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Необходимое условие локальной устойчивости [1–3] произвольных равновесных плазменных конфигураций, когда

$$\nabla p = [\mathbf{jB}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где p – давление, j – плотность тока, B – магнитное поле, можно записать в виде [4]

$$\frac{1}{4} S^2 + F - G \geq 0. \quad (2)$$

Здесь

$$F = -\Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + S \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V \mathbf{B}|^2} \right\rangle, \quad (3)$$

$$G = \left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V \mathbf{B}|^2} \right\rangle^2, \quad (4)$$

V – текущий объем системы вложенных магнитных поверхностей, отсчитываемый от магнитной оси, Φ , χ и J , I – продольный и поперечный потоки \mathbf{B} и \mathbf{j} соответственно, величины Ω и S , так же как и давление p , являются инвариантными функциями потоков и зависят только от V :

$$p' = I'\Phi' - J'\chi', \quad \Omega = I'\Phi'' - J'\chi'', \quad S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi''; \quad (5)$$

штрихи означают дифференцирование по V , а угловые скобки – усреднение по бесконечно тонкому слою между соседними магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f \, d\tau. \quad (6)$$

Первый член в выражении (2) описывает стабилизацию вследствие перекрещенности

* Совместно с Н.М. Зуевой // Атом. энергия. 1969. Т. 26. С. 35–43.

силовых линий (shear), второй – стабилизацию из-за наличия магнитной ямы ($\min \bar{B}$), а третий член, всегда отрицательный в силу неравенства Шварца, связан с дестабилизирующим действием конечного давления плазмы.

Как показано в работе [5], для гидромагнитной устойчивости плазменных конфигураций, удерживаемых квазиоднородным магнитным полем, достаточно критерия (2) без члена $S^2/4$, причем условие квазиоднородности \mathbf{B} соответствует ограничению случаем плазмы низкого давления $2p/B^2 \ll 1$.

В работе [5] рассматривалась устойчивость плазменных конфигураций при неподвижной границе плазмы. Можно показать, что учет смещений свободной границы плазмы в отсутствие поверхностных токов приводит к дополнительному условию устойчивости:

$$S \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle \geq 0. \quad (7)$$

Это условие налагает некоторое ограничение на распределение плотности тока по сечению плазмы. Для плазменного цилиндра выражение (7) можно записать через компоненты \mathbf{B} в цилиндрической системе координат r, φ, z в виде

$$\left(\frac{B_\varphi}{rB_z} \right)' \left(\frac{rB_\varphi}{B_z} \right)' \geq 0, \quad (8)$$

где штрихами обозначены производные по r . Если продольное магнитное поле B_z принять однородным, а плотность продольного тока j_z распределенной по закону

$$j_z = j_0 \left(1 - \lambda r^{2n} / r_\Sigma^{2n} \right), \quad n > 0, \quad (9)$$

то согласно (8) получим

$$\lambda \geq 0. \quad (10)$$

Таким образом, плотность тока должна спадать по радиусу.

Устойчивость плазменной конфигурации существенно зависит от кривизны k и кручения κ магнитной оси и от формы поперечного сечения плазменного шнура. Простейшей моделью плазменной конфигурации с отличными от нуля k и κ является плазменный шнур с винтовой магнитной осью. При этом k и κ постоянны, а наличие пространственной симметрии делает задачу двумерной. Предельными случаями винтовых конфигураций являются трансляционно симметричные конфигурации с прямой магнитной осью и аксиально-симметричные конфигурации с круговой магнитной осью.

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПЛАЗМЫ ПРИ ВИНТОВОЙ СИММЕТРИИ

Условие винтовой симметрии заключается в том, что магнитное поле зависит только от двух переменных: r и $\theta = \varphi - \alpha z$, где $\alpha = 2\pi/L$, а $L = \text{const}$ – шаг винта, отсчитываемый вдоль оси z цилиндрической системы координат r, φ, z .

При рассмотрении винтовых равновесных конфигураций в качестве основных поверхностных функций, которые зависят только от V , удобно использовать $\psi = A_z + \alpha r A_\varphi$ (A_z, A_φ – компоненты векторного потенциала), $I_B(\psi) = B_z + \alpha r B_\varphi$ и $p(\psi)$. При этом компоненты \mathbf{B} и \mathbf{j} выражаются через ψ, I_B и p формулами [6]

$$rB_r = \partial\psi / \partial\theta, \quad B_\varphi - \alpha r B_z = -\partial\psi / \partial r, \quad B_z + \alpha r B_\varphi = I_B, \quad (11)$$

$$j_r = \partial I_B / \partial\theta, \quad j_\varphi - \alpha r j_z = -\partial I_B / \partial r, \quad j_z + \alpha r j_\varphi = \beta p' + I_B I_B'. \quad (12)$$

Здесь штрихами отмечены производные по ψ , а β обозначена часто встречающаяся в формулах винтового равновесия величина

$$\beta = 1 + \alpha^2 r^2. \quad (13)$$

Функция $\psi(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{2\alpha I_B}{\beta^2} - p' - \frac{I_B I_B'}{\beta}, \quad (14)$$

в котором $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ – произвольные функции, определяющие распределение магнитного поля и плотности тока по сечению плазмы. По найденной функции $\psi(r, \theta)$ можно определить поля и токи в конфигурации, а также уравнения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$, обладающих винтовой симметрией. Такие магнитные поверхности можно представить себе состоящими из винтовых линий $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ с постоянным шагом $L = 2\pi/\alpha$. Тангенс угла наклона произвольной винтовой линии к оси z равен αr . Соответственно компоненты \mathbf{B} и \mathbf{j} , параллельные винтовой линии и перпендикулярные к ней и к радиусу-вектору r , равны

$$B_{\parallel} = I_B / \sqrt{\beta}, \quad B_{\perp} = (\partial \psi / \partial r) / \sqrt{\beta}, \quad (15)$$

$$j_{\parallel} = (\beta p' + I_B I_B') / \sqrt{\beta}, \quad j_{\perp} = (\partial I_B / \partial r) / \sqrt{\beta}. \quad (16)$$

Поперечные потоки векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} связаны с функциями ψ и I_B соотношениями [7]

$$\chi = \Phi - L\psi, \quad I = J - LI_B. \quad (17)$$

Продольные потоки \mathbf{B} и \mathbf{j} можно получить интегрированием B_{\parallel} и j_{\parallel} по площади поперечного сечения магнитной конфигурации в плоскости r, z . Используя выражения (11) и (12), найдем

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (\alpha r I_B - \partial \psi / \partial r) \beta^{-1} dr dz, \\ J &= \int [\alpha r (\beta p' + I_B I_B') - I_B' \partial \psi / \partial r] \beta^{-1} dr dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Если наряду с текущим объемом V системы вложенных магнитных поверхностей ввести две новые поверхностные функции U и U_1 , так чтобы

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int r dr dz, \quad U = 2\pi \int \beta^{-1} r dr dz, \\ U_1 &= 2\pi \alpha^{-1} \int (\partial \psi / \partial r) \beta^{-1} dr dz, \end{aligned} \quad (19)$$

то дифференциалы функций Φ и J выразятся через дифференциалы V, U и U_1 :

$$\begin{aligned} 2\pi d\Phi &= \alpha (I_B dU - dU_1), \\ 2\pi dJ &= \alpha [p' dV + I_B' (I_B dU - dU_1)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, для нахождения всех потоков Φ, χ, J, I и их производных при заданных функциях $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ достаточно вычислить функции V, U и U_1 , определенные интегралами (19). В частности, для функций S и Ω получим выражения

$$V'^3 S = -2\pi \Phi'' / \alpha = (U_1' - I_B U')', \quad (21)$$

$$V'^3 \Omega = -2\pi I_B' \Phi'' / \alpha - p' V'' = I_B' (U_1' - I_B U')' - p' V''. \quad (22)$$

Более просто находятся не сами функции V, U и U_1 , а их производные по ψ . Интегрируя по площади, заключенной между двумя бесконечно близкими магнитными

поверхностями в плоскости r, z , и учитывая, что $d\psi = dr \partial\psi/\partial r$, получаем

$$V' = 2\pi \int \frac{r dz}{d\psi/\partial r}, \quad U' = 2\pi p \int \frac{r dz}{\beta \partial\psi/\partial r}, \quad U'_1 = \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{dz}{\beta}. \quad (23)$$

Аналогично вычисляются средние значения по слою:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} 2\pi \int f r dr dz = \frac{2\pi}{V'} \int f \frac{r dz}{\partial\psi/\partial r}. \quad (24)$$

Отсюда, в частности, вытекает:

$$\langle \beta^{-1} \rangle = U' / V'. \quad (25)$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде ряда по степеням отклонения от винтовой магнитной оси $r = R, \theta = 0$. При этом функции $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$ можно разложить в ряды по степеням ψ :

$$p = p_0 + p'_0 \psi + \dots, \quad I_B = I_{B0} + I'_{B0} \psi + \dots$$

Если ограничиться случаем, когда сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси симметричны относительно поверхности $\theta = 0$, то с точностью до кубичных по $r^2 - R^2$ и θ членов получим

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\beta_0}{2} \frac{a}{1+\varepsilon^2} \left\{ \left(1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) \frac{R^2 \theta^2}{\beta_0} + \frac{\varepsilon^2}{4R^2} (r^2 - R^2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{12R^2} \left[(1+\varepsilon^2) \frac{b}{a} + 1 - c - \frac{2\varepsilon^2}{\beta_0} \right] (r^2 - R^2)^3 \right\}, \quad \beta_0 = 1 + \alpha^2 R^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь ε – отношение полуосей нормальных эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси, c – постоянная, характеризующая несимметричность сечений магнитных поверхностей, a и b обозначают следующие величины:

$$\begin{aligned} a = 2\alpha\beta_0^{-1} I_B - p' - \beta_0^{-1} I_B I'_B, \\ b = \alpha^2 R^2 \beta_0^{-2} (I_B I'_B - 4\alpha\beta_0^{-1} I_B), \end{aligned} \quad (27)$$

которые берутся на магнитной оси $r = R, \theta = 0$.

Таким образом, с точностью до кубичных членов по отклонению от магнитной оси равновесная конфигурация не зависит от вторых производных функций $p(\psi)$ и $I_B(\psi)$.

В отличие от случая аксиально-симметричных тороидальных конфигураций магнитные поверхности, окружающие винтовую магнитную ось, существуют и в отсутствие токов в плазме, когда $p' = 0$ и $I'_B = 0$. Возможность существования таких замкнутых вакуумных магнитных поверхностей связана с отличием от нуля кручения магнитной оси.

Выражение (26) для функции ψ с принятой точностью записывается в виде

$$\psi = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 xz^2 + \lambda_4 x^3 + \dots, \quad (28)$$

где

$$x = r - R, \quad z = -\theta/\alpha,$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^2 R^2}{2} \frac{a}{1+\varepsilon^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_0}{2} \frac{a\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}; \quad (29)$$

$$\lambda_3 = \alpha^2 R \frac{ac}{1+\varepsilon^2}, \quad \lambda_4 = \frac{\beta_0 a}{3R} \left[\frac{\beta}{a} + \frac{1-c}{1+\varepsilon^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\beta_0} \right) \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \right]. \quad (30)$$

Постоянная c может быть определена, если мы зададим профиль поперечного сечения граничной магнитной поверхности Σ .

Пусть нормальное сечение границы Σ в системе координат $z, \xi = x - x_0$, смещенной относительно магнитной оси на расстояние x_0 , описывается уравнением

$$\frac{\alpha^2 R^2}{\epsilon^2 \beta_0} z^2 + \xi^2 - \frac{\delta}{R} \xi^3 = \rho^2. \quad (31)$$

Рассматриваемый профиль поперечного сечения при $\delta \neq 0$ имеет грушевидную форму, причем при $\delta > 0$ заострение направлено вдоль радиуса-вектора r , а при $\delta < 0$ – против r . В случае $\delta = 0$ нормальное сечение плазменной трубки эллиптическое с отношением полуосей $l_z / l_r = \epsilon$, причем $l_r = \rho$.

Выражение для функции ψ , обращающейся в нуль на границе (31), имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 R^2 a}{1 + \epsilon^2} (1 + \Delta \xi) \left[z^2 + \frac{\beta_0 \epsilon^2}{\alpha^2 R^2} \left(\xi^2 - \frac{\delta}{R} \xi^3 - \rho^2 \right) \right]. \quad (32)$$

Сравнивая выражения (32) и (28) и считая при этом, что смещение магнитной оси x_0 является малой величиной порядка ρ^2 , получаем

$$\Delta = 2c / R, \quad x_0 = -c\rho^2 / R, \quad (33)$$

$$c = \frac{1 + \epsilon^2}{1 + 3\epsilon^2} \left\{ \frac{b}{a} + \frac{1}{1 + \epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon^2}{2} \left(1 - \frac{4\alpha^2 R^2}{\beta_0} \right) + \frac{3\epsilon^2 \delta}{2} \right] \right\}. \quad (34)$$

Таким образом, постоянная c зависит от параметра грушевидности δ профиля поперечного сечения границы плазмы. Как мы увидим далее, устойчивость плазмы существенно зависит от параметров δ и ϵ , определяющих форму заданной внешней магнитной поверхности.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИНТОВЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Величины \mathbf{V}^2 , j^2 и $j\mathbf{V}$, входящие в критерий устойчивости (2), выражаются согласно (11), (12) формулами

$$\mathbf{V}^2 = \beta^{-1} \left[|\nabla\psi|^2 + I_B^2 \right], \quad (35)$$

$$j^2 = \beta^{-1} \left[I_B'^2 |\nabla\psi|^2 + (\beta p' + I_B I_B')^2 \right], \quad (36)$$

$$j\mathbf{V} = \beta^{-1} \left[I_B' |\nabla\psi|^2 + I_B (\beta p' + I_B I_B') \right], \quad (37)$$

где

$$|\nabla\psi|^2 = (\partial\psi / \partial r)^2 + (\partial\psi / \partial \theta)^2 \beta / r. \quad (38)$$

Подставив эти формулы в (3) и (4), получим следующие выражения для стабилизирующего фактора F и дестабилизирующего фактора G :

$$F = \frac{p'}{V'^5} \left\{ V'' \left\langle \frac{1}{\beta} + \frac{I_B^2}{\beta |\Delta\psi|^2} \right\rangle - \frac{2\pi I_B \Phi''}{\alpha} \left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle \right\}, \quad (39)$$

$$G = \frac{p'^2}{V'^4} \left\{ \left\langle \frac{1}{\beta} \right\rangle \left\langle \frac{\beta}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle + I_B^2 \left(\left\langle \frac{1}{\beta |\nabla\psi|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\beta}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle^2 \right) \right\}. \quad (40)$$

Если ввести обозначения

$$Q_1 = \left\langle \frac{V'}{|\nabla\Psi|^2} \right\rangle, \quad Q_2 = \left\langle \frac{V'}{\beta|\nabla\Psi|^2} \right\rangle, \quad Q_3 = \left\langle \frac{V'\beta}{|\nabla\Psi|^2} \right\rangle, \quad (41)$$

то критерий устойчивости (2) для случая винтовой симметрии задачи можно записать в виде

$$\frac{1}{4}(L\Phi'')^2 - p' [L\Phi'' I_B Q_1 - V''(I_B^2 Q_2 + U')] - p'^2 [U' Q_3 + I_B^2(Q_2 Q_3 - Q_1^2)] \geq 0. \quad (42)$$

Для удобства вычисления в окрестности магнитной оси полезно несколько преобразовать это выражение, представив функции V' и Q_i таким образом, чтобы были выделены их основная часть и поправки, которые легко вычисляются при известном разложении ψ по степеням удаления от магнитной оси $r = R$. Приняв

$$\begin{aligned} W' &= \beta_0 U' - V' = \alpha^2 V' \langle (R^2 - r^2) \beta^{-1} \rangle, \\ q_2 &= Q_1 - \beta_0 Q_2 = \alpha^2 V' \langle (r^2 - R^2) \beta^{-1} |\nabla\Psi|^{-2} \rangle, \\ q_3 &= Q_3 - \beta_0 Q_1 = \alpha^2 V' \langle (r^2 - R^2) |\nabla\Psi|^{-2} \rangle, \\ q &= q_3 - \beta_0 q_2 = \alpha^{-4} V' \langle (r^2 - R^2)^2 \beta^{-1} |\nabla\Psi|^{-2} \rangle, \end{aligned} \quad (43)$$

с учетом выражений (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(I_B U' - U_1')^2 - p' [(I_B \beta_0^{-1} W'' + I_B' U' - U_1') I_B Q_1 + (I_B^2 \beta_0^{-1} q_2 - U') V''] - \\ - p'^2 [(Q_1 q - q_2 q_3) I_B^2 \beta_0^{-1} + (\beta_0 Q_1 + q_3) U'] \geq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

В окрестности магнитной оси выражение (44) содержит большие члены, пропорциональные Q_1 . Таким образом, критерий устойчивости винтовой плазменной трубки в окрестности магнитной оси имеет вид

$$-p' I_B \left(\frac{I_B}{\beta_0} \frac{W''}{V'} + \frac{I_B'}{\beta_0} - \frac{U_1''}{V'} \right) - p'^2 \left(1 + \frac{I_B^2}{\beta_0} \frac{q}{V'} \right) > 0, \quad (45)$$

причем входящие сюда функции V' , W' , q и U_1' определяются интегралами

$$V' = 2\pi \int \frac{r dz}{\partial\Psi/\partial r}, \quad W' = 2\pi\alpha^2 \int \frac{R^2 - r^2}{\beta} \frac{r dz}{\partial\Psi/\partial r}, \quad (46)$$

$$q = 2\pi\alpha^4 \int \frac{(r^2 - R^2)^2}{\beta |\nabla\Psi|^2} \frac{r dz}{\partial\Psi/\partial r}, \quad U_1' = \frac{2\pi}{\alpha} \int \frac{dz}{\beta}. \quad (47)$$

Для вычисления этих интегралов введем циклическую переменную ϑ согласно соотношениям

$$z = \sqrt{\frac{\Psi}{\lambda_1}} \sin \vartheta, \quad x = \sqrt{\frac{\Psi}{\lambda_2}} \cos \vartheta - \frac{\Psi}{2\lambda_2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \sin^2 \vartheta + \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \quad (48)$$

В результате получим

$$V' = \frac{4\pi^2}{\alpha\beta_0^{1/2} a} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}, \quad q = \frac{16\pi^2 \alpha^3 R^2}{\beta_0^{7/2} a^3} \frac{(1 + \varepsilon^2)^3}{(1 + \varepsilon)\varepsilon^4}, \quad (49)$$

$$U_1'' = - \frac{8\pi^2}{\beta_0^{3/2} a} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon},$$

$$W'' = \frac{8\pi^2 \alpha (1 + \varepsilon^2)^2}{\beta_0^{3/2} a^2 \varepsilon^5} + \left[1 + 2\varepsilon^2 \frac{\beta_0 - 2}{\beta_0} + (1 + \varepsilon^2) \frac{b}{a} - (1 - \varepsilon^2)c \right]. \quad (50)$$

Обозначим через y безразмерный параметр, характеризующий отношение плотности тока j_0 к магнитному полю B_0 на магнитной оси:

$$y = - \frac{j_0 R \beta_0}{2B_0 \alpha R} = - \frac{j_0 R}{2B_0} \left(\alpha R + \frac{1}{\alpha R} \right) = - \frac{j_0 R}{2B_0} \left(t + \frac{1}{t} \right). \quad (51)$$

Подставив выражения (49), (50) в неравенство (45) и учитывая соотношения (11), (12) и (27), получим условие устойчивости плазмы в окрестности винтовой магнитной оси $r = R$, $\varphi = \alpha z$:

$$1 - y^2 - \frac{t^2 (1 + \varepsilon^2)^2}{\varepsilon^3} \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{1}{1 + y} + \frac{(1 + \varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^4} \left[\frac{\beta_0 - 2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} + \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\beta_0 b}{a} - \frac{2t^2 \varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right) - \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \beta_0 c \right] > 0. \quad (52)$$

Отсюда видно, что устойчивость плазмы в окрестности магнитной оси зависит от отношения $j_0 R / B_0$, параметра $t = \alpha R$, характеризующего угол наклона винтовой магнитной оси к оси z , эксцентриситета приосевых сечений магнитных поверхностей, отношения b/a , определяющегося распределением токов в плазме, и параметра несимметричности сечения плазменной трубки c .

В случае круглых нормальных приосевых сечений магнитных поверхностей ($\varepsilon = 1$) зависимость от параметров c и b/a пропадает и условие устойчивости (52) принимает вид [8]

$$-y^2 - t^2 \left(\frac{2}{1 + y} + 1 \right) > 0. \quad (53)$$

При $y = -1$ угол прокручивания силовых линий вокруг магнитной оси обращается в нуль вследствие компенсации прокручивания вакуумных силовых линий полем тока в плазме. Влияние поля тока в плазме на угол прокручивания силовых линий проявляется также в зависимости устойчивости плазмы от направления тока.

Уравнения (11), (12) и (27) позволяют выразить параметр b/a через давление плазмы:

$$\frac{b}{a} = - \frac{t^2}{\beta_0} \left[1 + \frac{1}{1 + y} - \frac{\kappa}{(1 + y)^2} \right], \quad (54)$$

где

$$\kappa = - \frac{\pi^2 p'(V) \beta_0^{5/2}}{\alpha^3 B_0^2} \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}. \quad (55)$$

В случае параболического распределения давления $p = p_0(1 - V/V_\Sigma)$

$$\kappa = \frac{\beta_0^2}{t^2} \frac{1 + \varepsilon^2}{4\varepsilon^2} \gamma, \quad \gamma = \frac{2p_0}{B_0^2} \frac{R^2}{\rho^2}. \quad (56)$$

Введенная выше величина ρ является шириной плазменной трубки, измеренной вдоль оси r .

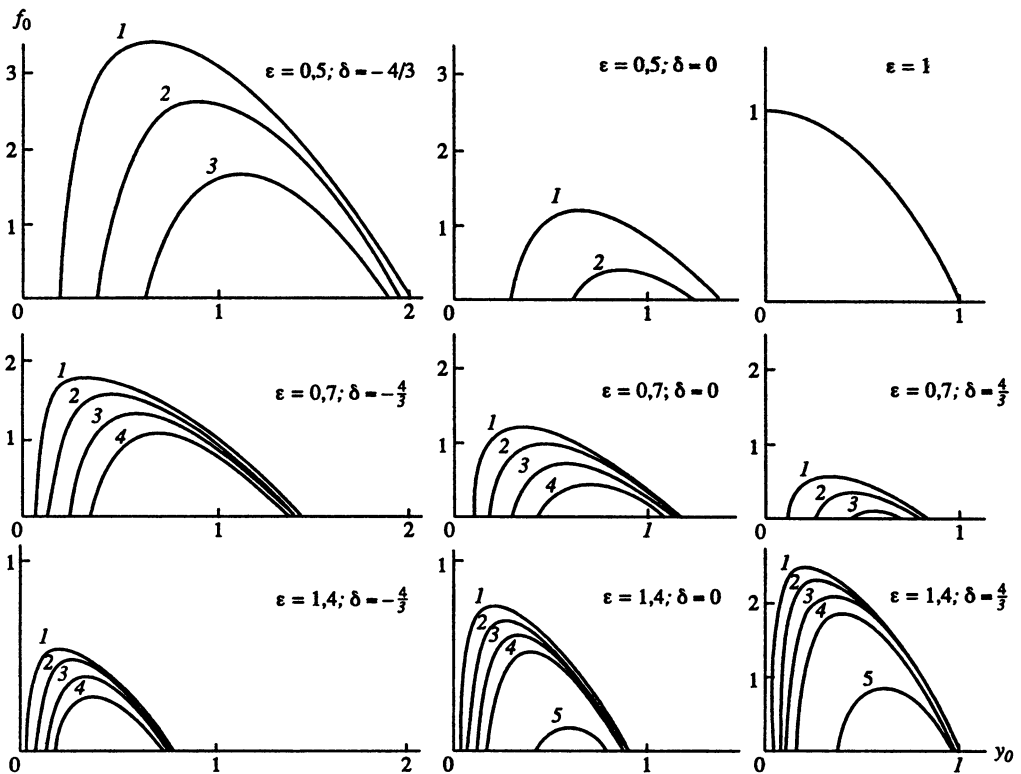


Рис. 1. Области устойчивости плазменного тора при различных профилях поперечного сечения

Если подставить формулы (34) и (54) в условие (52), получим критерий устойчивости плазмы, выраженный через параметр грушевидности сечения внешней магнитной поверхности δ :

$$f = -y^2 - \frac{t^2}{\epsilon^2} \frac{(1+\epsilon^2)^2}{1+3\epsilon^2} \left[\frac{2}{1+y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{(1-\epsilon)^2}{1+\epsilon} \frac{\kappa}{(1+y)^2} \right] + \frac{1+\epsilon^2}{4\epsilon^2} \frac{1+7\epsilon^2}{1+3\epsilon^2} \left\{ t^2 + \frac{1-\epsilon^2}{1+7\epsilon^2} \left[\frac{5+\epsilon^2}{1+\epsilon^2} - 3\delta(1+t^2) \right] \right\} > 0. \quad (57)$$

Отсюда следует, что область устойчивых значений плотности продольного тока j_0 и давления плазмы p_0 существенно зависит от эллиптичности и несимметричности сечения граничной магнитной поверхности, характеризуемых соответственно параметрами ϵ и δ .

Согласно выражению (57) конфигурации с прямой магнитной осью $t \rightarrow 0$ являются неустойчивыми.

Аксиально-симметричные тороидальные плазменные конфигурации можно получить предельным переходом $t \rightarrow \infty$. Из условия (57) следует, что критерий устойчивости конфигурации с круговой магнитной осью $r = R$, профиль поперечного сечения границы плазмы в которой описывается уравнением

$$z^2 / \epsilon^2 + (r - R_0)^2 - (r - R_0)^3 \delta / R_0 = \rho^2, \quad (58)$$

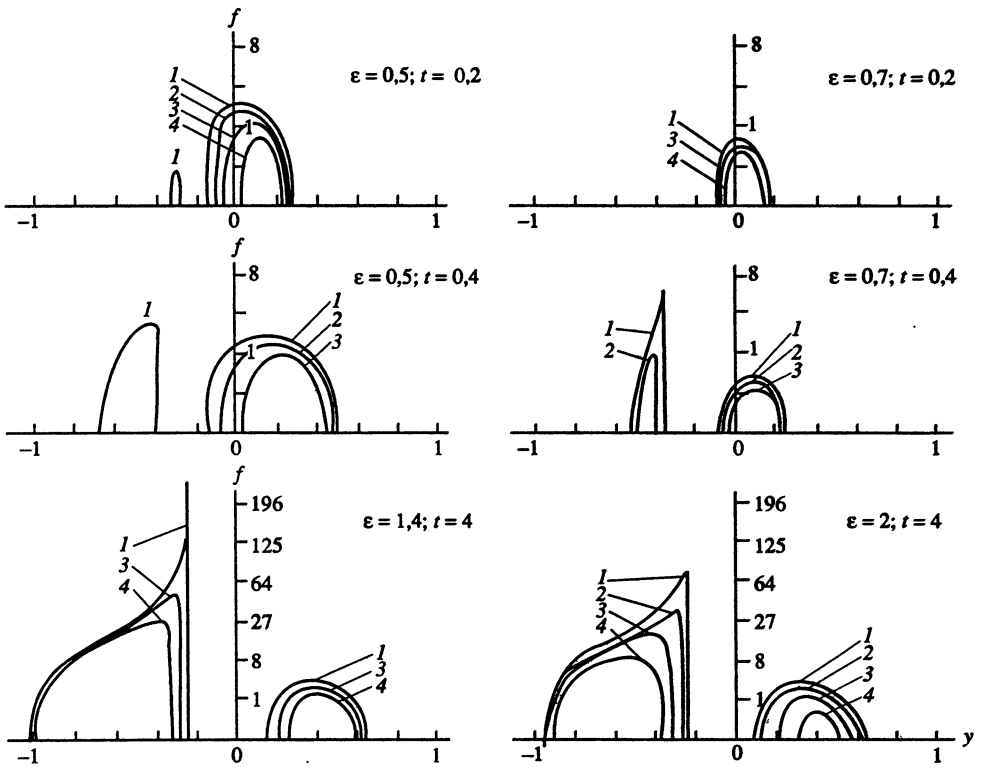


Рис. 2. Области устойчивости спиральной плазменной трубки эллиптического поперечного сечения при $\delta = 0$

в предположении о малости смещения магнитной оси $R - R_0 \ll \rho$ имеет вид

$$f_0 = -y_0^2 + \frac{1}{4\epsilon^2} \frac{(1+\epsilon^2)^2}{1+3\epsilon^2} \left[\frac{1+7\epsilon^2}{1+\epsilon^2} - 3\delta \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon^2} - \frac{4(1-\epsilon)^2 \kappa_0}{(1+\epsilon)\epsilon y_0^2} \right] > 0, \quad (59)$$

где

$$y = \frac{j_0 B}{2B_0}, \quad \kappa_0 = -\frac{\pi^2 p'(V) R^3}{B_0^2} \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon} = \frac{1+\epsilon^2}{4\epsilon^2} \gamma. \quad (60)$$

Левые части неравенств (57) и (59) в функции от u и y_0 при различных значениях параметров ϵ , δ , $t = \alpha R$, $\gamma = \frac{2p_0 R^2}{B_0 \rho^2}$ представлены на рис. 1–4. Как показывает рас-

смотрение этих рисунков, с помощью подходящего выбора формы сечения плазменного шнура можно существенно улучшить его устойчивость по сравнению с плазменным шнуром круглого поперечного сечения. При этом винтовые плазменные трубки можно рассматривать как модель замкнутых плазменных конфигураций, магнитная ось которых представляет собой спираль, навитую на тор. Эллиптичность и грушевидность сечений магнитных поверхностей можно создать также и наложением двух- и трехзаходной токовых обмоток [9]. Соответствующая система может быть устойчивой и при переменном продольном токе в плазме.

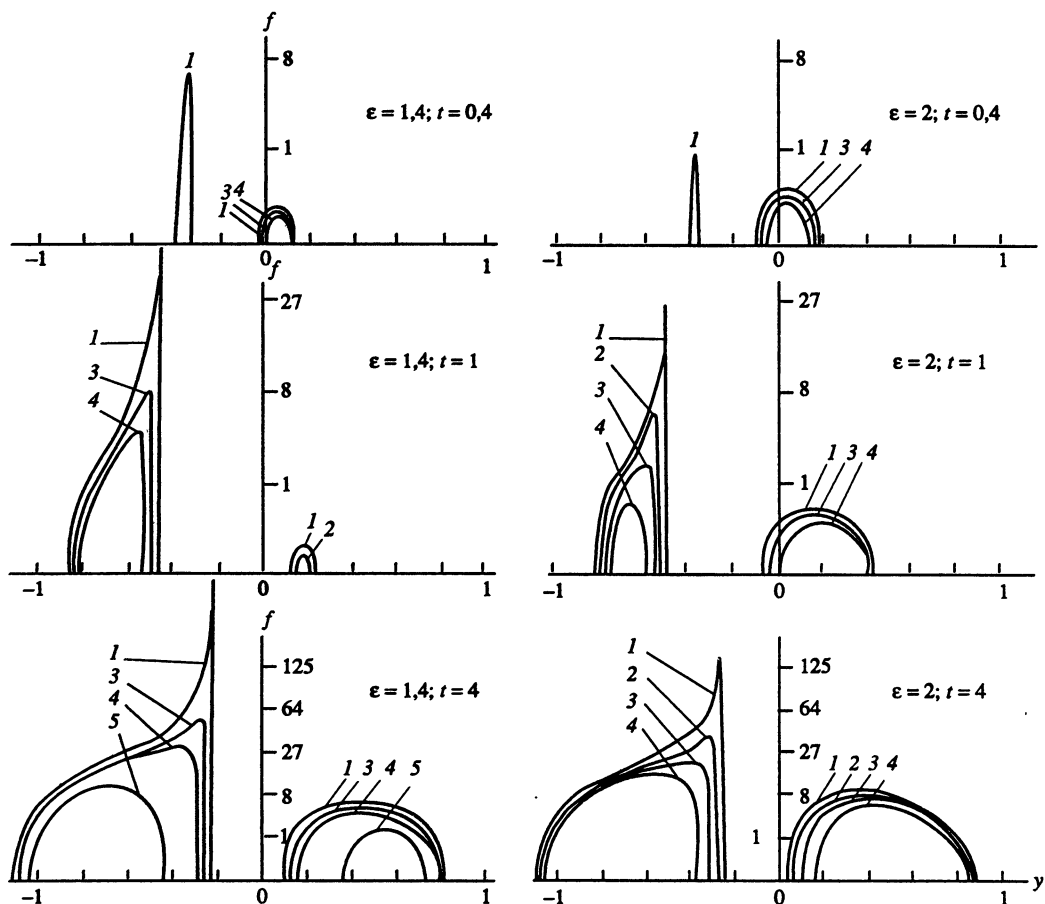


Рис. 3. Области устойчивости спиральной плазменной трубки грушевидного поперечного сечения при $\delta = 4/3$ (заострение в сторону нормали к магнитной оси)

На рис. 1 показаны области устойчивости для случая круговой магнитной оси в функции от y_0 при различных параметрах ϵ , δ и γ , причем кривые 1–5 соответствуют значениям γ , равным 0,1; 0,4; 1; 2; 10 (аналогично и для рис. 2–4). В отличие от случая круглого поперечного сечения $\epsilon = 1$ при наличии эллиптичности появляется зависимость предельной плотности тока от давления, характеризуемого параметром γ . При $\epsilon = 0,5$ и $\delta = -4/3$ предельная плотность тока увеличивается в два раза по сравнению со случаем $\epsilon = 1$.

На рис. 2 показаны области устойчивости для винтовой плазменной трубки эллиптического поперечного сечения ($\delta = 0$) при различных параметрах t , ϵ и γ . При указанных на рис. 2 параметрах t , равных 0,2 и 0,4, области устойчивости существуют только при $\epsilon \neq 1$. Устойчивость в отсутствие продольного тока имеется только для тех вариантов, когда кривая $f(y)$ пересекает ось ординат. На рис. 3 и 4 построены области устойчивости для случаев грушевидных поперечных сечений при $\delta = 4/3$ и $\delta = -4/3$.

Из приведенных рисунков следует, что заостренность профиля граничной поверхности существенно влияет на устойчивость плазмы, причем устойчивость улучшается, если $\epsilon > 1$, $\delta > 0$ или $\epsilon < 1$, $\delta < 0$. Графики при $y < 0$ соответствуют случаю,

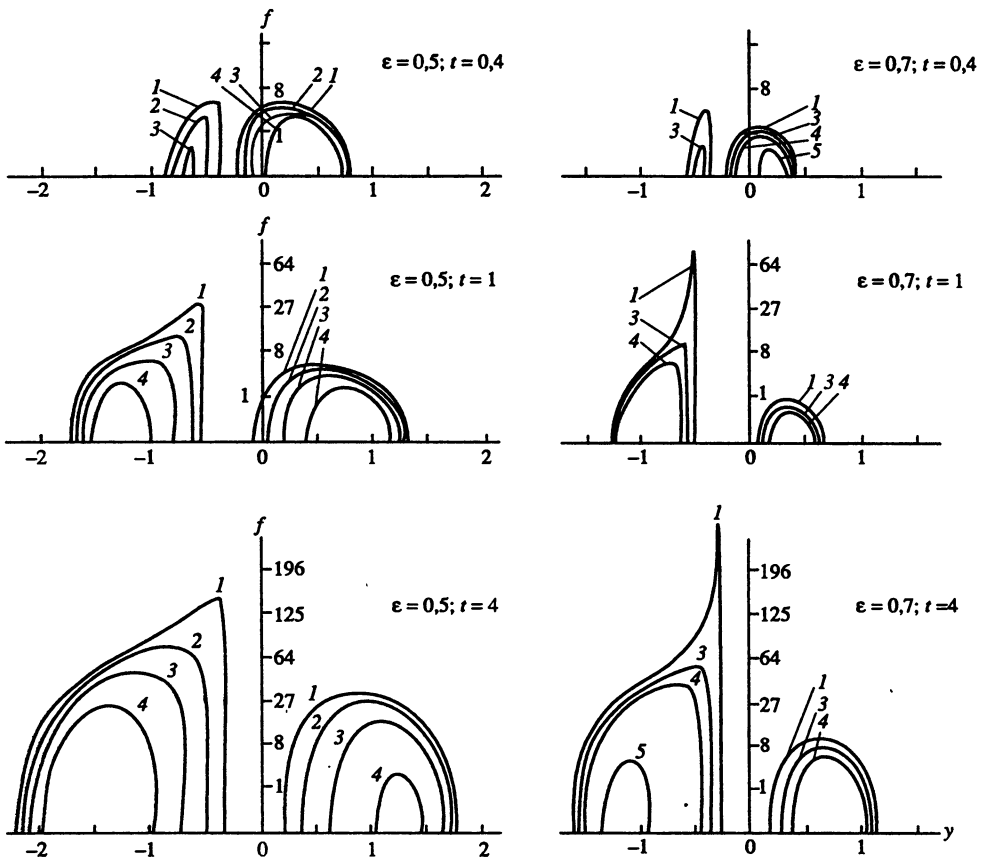


Рис. 4. Области устойчивости спиральной плазменной трубки грушевидного поперечного сечения при $\delta = -4/3$ (заострение против нормали к магнитной оси)

когда ток течет вдоль направления магнитного поля, а графики при $y > 0$ соответствуют случаю обратного направления продольного тока в плазме.

Авторы выражают благодарность акад. М.А. Леонтовичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
2. Bineau M. // Ibid. P. 35.
3. Green J., Johnson J. // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7. P. 401.
4. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
5. Соловьев Л.С. // Там же. С. 2063.
6. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 3. С. 245.
7. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Там же. Т. 2. С. 177.
8. Шафранов В.Д. // Ядер. синтез. 1968. Т. 5. С. 511.
9. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1967. Т. 5. С. 3.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ*

Винтовые волны в закрученных струях жидкостей и газов изучались в работах [1-4]. Этот вопрос представляет интерес еще и потому, что закрученные струи применяются в технических устройствах, где можно проводить некоторые эксперименты [5].

В нашей работе исследуется гидродинамическая неустойчивость цилиндрического потока идеальной жидкости. Если градиенты скорости v и плотности ρ жидкости достаточно велики, так что изменение v и ρ можно аппроксимировать разрывом, то решение задачи об устойчивости удастся выразить через точные решения уравнений колебаний.

В системе координат, движущейся вместе с волной, винтовые волны описываются функцией тока ψ [6]:

$$rv_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\phi - \alpha r v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_z + \alpha r v_\phi = I(\psi), \quad (1)$$

где r, ϕ, z – цилиндрические координаты.

Пусть $\psi = \psi(\xi)$, где

$$\xi = r^2/2 + f(r) \cos n\theta, \quad (2)$$

причем $\theta = \phi - \alpha z$, $L = 2\pi/\alpha$ – шаг винта. Тогда в линейном по f приближении возмущения компонент скорости v выразятся через $f(r)$:

$$\tilde{v}_r = -\frac{n}{\rho r} \psi' f(r) \sin n\theta, \quad (3)$$

$$\tilde{v}_\phi = \frac{1}{\beta} \left[\left(\alpha r I' + \frac{r}{\rho} \psi'' \right) f(r) - \frac{\psi'}{\rho} f'(r) \right] \cos n\theta, \quad (4)$$

$$\tilde{v}_z = \frac{1}{\beta} \left[\left(I' + \frac{\alpha r^2}{\rho} \psi'' \right) f(r) + \frac{\alpha r}{\rho} \psi' f'(r) \right] \cos n\theta. \quad (5)$$

Здесь $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, ψ' , ψ'' и I' – функции невозмущенного потока.

Функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению [6]

$$\left(\frac{r\rho\Omega^2}{1-q} \frac{f'}{\beta} \right)' - \left\{ \frac{n^2\rho\Omega^2}{r} - \frac{4\alpha^2\rho v_\phi^2}{r\beta} - \left(\frac{Q}{1-q} \right)' + \frac{q}{1-q} \frac{\beta Q^2}{r\rho\Omega^2} \right\} f = 0, \quad (6)$$

где введены обозначения

$$q = \frac{r^2\Omega^2}{\beta c^2}, \quad \Omega = \alpha(v_z - v_\phi) - \frac{v_\phi}{r}, \quad Q = \frac{2\rho\Omega v_\phi}{r\beta} + \frac{\rho v_\phi^2}{r^2}.$$

$c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ – скорость звука, $v_\phi = \omega/k$ – фазовая скорость волны, $k = \alpha l$.

* Совместно с Ю.Н. Явлинским // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. С. 309-311.

Если имеется разрыв на радиусе $r = a$, то, интегрируя уравнение (6), получим дисперсионное уравнение для определения частоты ω :

$$\frac{r}{\beta} \left[\left(\frac{\rho \Omega^2 f'}{1-q} \right)_i - \left(\frac{\rho \Omega^2 f'}{1-q} \right)_e \right] + \left(\frac{Q}{1-q} \right)_i - \left(\frac{Q}{1-q} \right)_e = 0, \quad (7)$$

где индексами i и e обозначены значения функций при $a - 0$ и $a + 0$, причем функция $f_i(r)$ удовлетворяет условию $f_i(0) = 0$, а $f_e(r)$ равно нулю на некоторой цилиндрической поверхности $r = b$.

Уравнение (6) имеет точное решение при $v_z = \text{const}$, $v_\varphi = 0$ в общем случае и при $v_z = \text{const}$, $v_\varphi / r = v_\varphi = \text{const}$ в случае несжимаемой жидкости, когда $c \rightarrow \infty$. Соответствующее решение выражается через бесселевы функции [6]:

$$f(r) = \varepsilon Z_n(\kappa r) - \bar{\alpha} \kappa r Z_n'(\kappa r), \quad \kappa^2 = \varepsilon^2 - \bar{\alpha}^2 n^2, \quad (8)$$

причем в случае сжимаемой жидкости

$$\bar{\alpha}^2 = \alpha^2 - \Omega^2 / c^2, \quad \varepsilon = 0, \quad (9)$$

а в случае несжимаемой жидкости

$$\bar{\alpha} = \alpha, \quad \varepsilon = 2\alpha v_\varphi / (r\Omega). \quad (10)$$

Поскольку частота ω входит в аргументы бесселевых функций, то в общем случае уравнение (7) является трансцендентным. Однако для несжимаемой жидкости при $v_\varphi = 0$ искомая частота ω определяется в явном виде. Рассмотрим этот случай более подробно.

Пусть при $r < a$ $v_z = v_i = \text{const}$, $\rho = \rho_i = \text{const}$, а при $r > a$ $v_z = v_e = \text{const}$, $\rho = \rho_e = \text{const}$ и $b \rightarrow \infty$, тогда

$$f_i(r) = C_i r I_n'(\alpha n r), \quad f_e(r) = C_e r K_n'(\alpha n r). \quad (11)$$

При этом решении дисперсионного уравнения (7) имеет вид

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho_i v_i f_i' / f_i - \rho_e v_e f_e' / f_e}{\rho_i f_i' / f_i - \rho_e f_e' / f_e} \pm \sqrt{\rho_i \rho_e \frac{f_i' f_e'}{f_i f_e} \frac{v_i - v_e}{\rho_i f_i' / f_i - \rho_e f_e' / f_e}}, \quad (12)$$

где $f_i = f_i(a)$, $f_e = f_e(a)$. В случае длинных волн ($ka \ll 1$) получаем $f_i' / f_i = n/a$, $f_e' / f_e = -n/a$,

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho_i v_i + \rho_e v_e}{\rho_i + \rho_e} \pm i \sqrt{\rho_i \rho_e} \frac{v_i - v_e}{\rho_i + \rho_e}. \quad (13)$$

Как показывают выражения (12), (13), рассматриваемый разрыв продольной скорости оказывается неустойчивым, причем инкремент развития этой неустойчивости при $ka \ll 1$, $\rho_i = \rho_e$ равен

$$\text{Im } \omega = 1/2 k (v_i - v_e).$$

Следует отметить, что при $v_z = \text{const}$, $v_\varphi / r = \text{const}$ полученные решения, описываемые линейными функциями $\psi = C_1 \xi$, $I = I_0 + C_2 \xi$, являются в случае несжимаемой жидкости точными решениями уравнений Эйлера, а линеаризация по возмущениям использована только при сшивании решений на разрыве. Для получения точного решения задачи следовало бы сшивать решения на возмущенной границе.

В рассматриваемом случае разрыва v_z возмущения компонент скорости имеют

вид

$$\begin{aligned}\tilde{v}_r &= -\frac{n\alpha}{r} v_z f(r) \sin n\theta e^{i\omega t}, \quad \tilde{v}_\varphi = -\frac{\alpha}{\beta} v_z f'(r) \cos n\theta e^{i\omega t}, \\ \tilde{v}_z &= \frac{\alpha^2 r}{\beta} v_z f'(r) \cos n\theta e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда видно, что в обоих предельных случаях аксиально-симметричных волн ($\alpha \rightarrow \infty$) и азимутальных волн ($\alpha \rightarrow 0$) имеем $\tilde{v}_\varphi = 0$, однако в случае винтовых волн неустойчивость разрыва продольной скорости v_z приводит к появлению азимутальной скорости \tilde{v}_φ . При этом течение при $r < a$ описывается функцией тока

$$\psi = \alpha r v_z \frac{r^2}{2} + A_n r I_n'(\alpha n r) \cos n\theta, \quad (15)$$

где $A_n = A_n^0 e^{i\omega t}$. Интересно отметить, что полученная функция ψ в точности совпадает с функцией потока для n -заходного винтового магнитного поля [7].

Картина течения, описываемая функцией тока, такова: линии тока лежат на винтовых поверхностях $\psi = \text{const}$ и в среднем прокручиваются вокруг оси z с угловой скоростью, пропорциональной квадрату возмущения. Усредненная угловая скорость прокручивания линий тока выражается при условии ее малости формулой [7]

$$\left\langle \frac{d\varphi}{dz} \right\rangle = \frac{A_n^2}{4\alpha \rho^2 v_z^2} \left(\frac{d}{rdr} \right)^2 I_n^2(\alpha n r). \quad (16)$$

При этом полный вращательный момент

$$M = \int_0^L \int_0^a \rho r v_\varphi dr dz,$$

как это и должно быть, сохраняется. Истинная линия тока представляет собой спираль с шагом $\lambda = L/n$ эллиптического сечения, навитую на ось, которая, в свою очередь, является винтовой линией с шагом $\Lambda = 2\pi / \langle d\varphi/dz \rangle$.

Рассмотренная здесь неустойчивость, по-видимому, может являться одним из механизмов образования вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, 1961.
2. Howard L.N., Gupta A.S. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 14, N 3.
3. Rayleigh J.W. // Proc. Roy. Soc. London A. 1961. Vol. 93. P. 148.
4. Линь Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
5. Гостинцев Ю.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 6. С. 56.
6. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245.
7. Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Там же. С. 3.

УСЛОВИЯ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Для гидромагнитной устойчивости плазменной конфигурации, удерживаемой в равновесии магнитным полем \mathbf{B} :

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

при условии идеальной проводимости необходимо и достаточно [1] положительности потенциальной энергии $\delta W = \delta W_i + \delta W_\Sigma + \delta W_e$ при произвольных смещениях ξ :

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \{(\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi])\mathbf{Q} + (\gamma p \text{ div } \xi + \xi \nabla p) \text{ div } \xi\} d\tau, \quad (2)$$

$$\delta W_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{n} - \mathbf{B}_e(\mathbf{B}_e\nabla)\mathbf{h}\}\xi_n^2 d\sigma, \quad (3)$$

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\text{rot } \delta \mathbf{A}_e)^2 d\tau; \quad \mathbf{Q} = \delta \mathbf{B} = \text{rot } [\xi \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Здесь p – давление плазмы, \mathbf{B} , \mathbf{B}_e – невозмущенные магнитные поля внутри и вне плазмы соответственно, $\delta \mathbf{B}$, $\delta \mathbf{B}_e = \text{rot } \delta \mathbf{A}_e$ – возмущающие магнитные поля внутри и вне плазмы соответственно, Σ – граница плазмы с вакуумом, \mathbf{n} – нормаль к поверхности Σ .

Поверхностный интеграл δW_Σ в отсутствие поверхностных токов, т.е. когда нет тангенциального разрыва \mathbf{B} , обращается в нуль, и, следовательно, для устойчивости плазмы достаточно положительности δW_i .

Если Φ и J – продольные, а χ и l – поперечные потоки векторов \mathbf{B} и \mathbf{j} , то в натуральной системе координат ($dr = \mathbf{e}_1 d\theta + \mathbf{e}_2 d\xi + \mathbf{e} dV$), связанной с системой вложенных магнитных поверхностей равновесной конфигурации [2], векторы \mathbf{B} и \mathbf{j} выражаются через производные от потоков по текущему объему V :

$$\mathbf{B} = \chi' \mathbf{e}_1 + \Phi' \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{j} = l' \mathbf{e}_1 + J' \mathbf{e}_2. \quad (5)$$

Используя инвариантные характеристики

$$p' = l' \Phi' - J' \chi', \quad \Omega = l' \Phi'' - J' \chi'', \quad S = \chi' \Phi'' - \Phi' \chi'', \quad (6)$$

можно представить выражение для δW_i (в натуральных координатах θ , ξ , V) в виде [3]

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \{(\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi])^2 + \gamma p (\text{div } \xi)^2 - (\Omega + [\mathbf{j}\xi])^2\} d\tau. \quad (7)$$

Коэффициенты разложения вектора \mathbf{e} по \mathbf{j} и \mathbf{B} :

$$\mathbf{e} = \nabla V / |\nabla V|^2 + (\nu \mathbf{j} - \lambda \mathbf{B}) / p' \quad (8)$$

удовлетворяют следующим "магнитным" дифференциальным уравнениям:

$$\mathbf{B}\nabla\nu = S - \mathbf{B}\mathbf{j}^* / |\nabla V|^2, \quad \mathbf{B}\nabla\lambda = \Omega - \mathbf{j}\mathbf{j}^* / |\nabla V|^2, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{j}^* = \mathbf{j} - 2[\nabla V, (\nabla V \nabla)\mathbf{B}] / |\nabla V|^2. \quad (10)$$

* Атом. энергия. 1971. Т. 30. С. 14–20.

Введем комбинации компонент смещения: $\eta = \Phi' \xi^1 - \chi' \xi^2$, $\vartheta = J' \xi^1 - I' \xi^2$. Получим $\text{div } \xi = \xi' + (j \nabla \eta - \mathbf{B} \nabla \vartheta) / p'$, где $\xi = \xi^3$, и соответственно δW_i запишется в виде

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ ([\nabla \eta \nabla V] - (\mathbf{B} \xi)') + (\mathbf{B} \nabla \xi) \mathbf{e} + [j \mathbf{e}] \xi \right\}^2 + \gamma p (\text{div } \xi)^2 - (\Omega + [j \mathbf{e}]^2) \xi^2 \right\} d\tau, \quad (11)$$

где вектор \mathbf{B}' определяется равенством

$$\mathbf{B}' = \chi'' \mathbf{e}_1 + \Phi'' \mathbf{e}_2 = (\mathbf{B} \Omega - j S) / p'; \quad (12)$$

штрихами обозначены производные по объему V .

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

Общие соотношения. Для исследования устойчивости плазменного цилиндра с отождествленными торцами при $z = 0$ и $z = L$ (модель тора) достаточно рассмотреть устойчивость каждой винтовой гармоники $\xi = \xi(r) e^{im(\varphi - \alpha z)}$, $\alpha = k/m$, $k = 2\pi n/L$, где m и n – целые числа. Из условий минимизации [4] следует, что $\text{div } \xi = 0$, т.е. наиболее опасными являются несжимаемые колебания. При этом

$$\delta W_i = \pi L \int_0^a \left\{ \frac{1}{\beta r} \left[y(r \xi)' - 2b_\varphi \xi \right]^2 + (m^2 y^2 - 2b_\varphi j_z) r \xi^2 \right\} dr. \quad (13)$$

Здесь $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, $b_\varphi = B_\varphi / r$, $y = \alpha B_z - b_\varphi$, $\xi = \xi_r$, штрих означает производную по r . Если ввести обозначения $j_{||} = j_z + \alpha r j_\varphi$, $j_\perp = j_\varphi - \alpha r j_z$ и вместо радиальной компоненты смещения использовать переменную $f = r y \xi$, то сумма $\delta W_i + \delta W_e = \delta W_V$ представится единым интегралом, распространенным как на область плазмы $0 < r < a$, так и по внешнему магнитному полю $a < r < b$, где b – радиус идеально проводящего экрана:

$$\delta W_V = \pi L \int_0^b \left\{ \frac{r}{\beta} \left(f' + \frac{j_{||} f}{r y} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{r} - \frac{2j_z b_\varphi}{r y^2} \right) f^2 \right\} dr, \quad (14)$$

при этом величина

$$\delta W_\Sigma = \pi L \left[\xi^2 (B_\varphi^2 - B_{\varphi e}^2) \right]_a. \quad (15)$$

При наличии разрывов плотности тока на радиусах r_k запишем

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_V}{\pi L} = & \int_0^b \left\{ \frac{r}{\beta} f'^2 + \left[\frac{m^2}{r} - \frac{1}{\beta y} \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_\perp + j'_{||} \right) + \frac{2\alpha^2 p'}{\beta y^2} \right] f^2 \right\} dr + \\ & + \sum_k \left[\frac{r^2 \xi^2}{\beta} (j'_{||} y_i - j''_{||} y_e) \right]_{r_k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если функция f удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\left(\frac{r}{\beta} f' \right)' - \left[\frac{m^2}{r} - \frac{1}{\beta y} \left(\frac{2\alpha}{\beta} j_\perp + j'_{||} \right) + \frac{2\alpha^2 p'}{\beta y^2} \right] f = 0 \quad (17)$$

в промежутках между разрывами, то δW_V можно представить в виде суммы по

разрывам:

$$\delta W_V = \pi L \sum_k \left[\frac{r^2 \xi^2}{\beta} \left(\frac{r f'_i}{f_i} y_i^2 - \frac{r f'_e}{f_e} y_e^2 + j_{\parallel i}^i y_i - j_{\parallel e}^e y_e \right) \right]_{r_k}. \quad (18)$$

Как показывает выражение (16), возможна неустойчивость плазмы, связанная с разрывами плотности тока. Однако эта неустойчивость не реализуется, если внутрь плазмы попадает особая точка r_s , в которой $y(r_s) = 0$, поскольку в этом случае смещение обращается в бесконечность [5]. Выражение для δW_V можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_V}{\pi L} = & \int_0^a \left\{ \frac{r^3 y^2}{\beta} \xi'^2 + \left[\left(m^2 - \frac{1}{\beta} \right) \frac{y^2}{r} + \frac{2\alpha^2 r}{\beta^2} (\alpha^2 B_z^2 - b_\phi^2) + \frac{2\alpha^2 p'}{\beta} \right] r^2 \xi^2 \right\} dr + \\ & + \left[\frac{r^2 \xi^2}{\beta} (\alpha^2 B_z^2 - b_\phi^2) \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{r}{\beta} f'^2 + \frac{m^2}{r} j^2 \right) dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Возможные неустойчивости можно разбить на два класса – внутренние; обусловленные отрицательной величиной объемного интеграла в выражении (16); и поверхностные или разрывные, которые связаны с отрицательными значениями поверхностных интегралов в выражениях (16) и (19). Внутренние неустойчивости, существующие и при закрепленной границе плазмы $\xi(a) = 0$, при малом отношении B_ϕ/B_z развиваются со сравнительно меньшими (в отношении B_z/B_ϕ) инкрементами.

Необходимым условием устойчивости плазмы при цилиндрической геометрии является критерий Сайдема [6]:

$$\mu'^2/4 + 2\mu^2 p'/(rB_z^2) > 0, \quad \mu = B_\phi/(rB_z), \quad (20)$$

полученный в предположении о локализованности возмущений в тонком цилиндрическом слое.

В случае плазмы низкого давления (при $B_\phi/B_z \ll 1$) уравнению Эйлера удовлетворяет решение $\xi = \text{const}$, и из выражения (18) вытекает необходимое условие отсутствия поверхностной неустойчивости для плазменного цилиндра без поверхностных токов [7]:

$$LB_\phi(a)/(2\pi a B_z(a)) < 1. \quad (21)$$

Достаточными условиями внутренней устойчивости согласно выражению (19) является совокупность двух требований:

$$LB_\phi(r)/(2\pi r B_z(r)) < 1, \quad (22)$$

$$r p' - \frac{2B_\phi^2}{m^2 - 1} \frac{B_\phi^2}{B_z^2} > 0 \quad (23)$$

соответственно для $m = 1$ и $m \geq 2$. При этом, если выполнено условие (22), при $B_\phi/B_z \ll 1$ к неустойчивости приводят лишь возмущения, почти постоянные вдоль магнитных силовых линий.

Необходимым и достаточным условием внутренней устойчивости является отсутствие нулей решения уравнения Эйлера для функции $\xi(r)$ в интервале $0 < r < a$ [4].

Плазменный цилиндр с поверхностными токами. В отсутствие распределенных токов, когда имеется лишь тангенциальный разрыв \mathbf{B} на границе плазмы, в случае $B_{zi} = B_{ze}$ для устойчивости достаточным является условие (21), а в случае $B_{ze} = 0$ – условие $B_{\phi e} < B_{zi}$ [8].

Плазменный цилиндр с однородным током. В случае $j_z = \text{const}$, $B_z = \text{const}$ уравнение Эйлера (17) имеет точное решение:

$$f = \varepsilon J_m(\kappa r) - \alpha \kappa r J'_m(\kappa r), \quad \kappa^2 = \varepsilon^2 - k^2, \quad (24)$$

где $\varepsilon = 2\alpha b\phi/y = \text{const}$. Рассматриваемая конфигурация неустойчива, поскольку не выполняется критерий Сайдема (20). Необходимым условием отсутствия разрывной неустойчивости является требование [9]

$$LB_\phi / (2\pi r B_z) < 1/m, \quad (25)$$

которое, однако, не может быть выполнено для больших m .

Бессилловая конфигурация. В случае $j = \varepsilon B$, $\varepsilon = \text{const}$, когда $B_z = B_0 J_0(\varepsilon r)$, $B_\phi = B_0 J_1(\varepsilon r)$, решением уравнения (17) также является функция (24). При этом для внутренней устойчивости m -й моды достаточно выполнения условия $ja/B < x_{m1}$ [10], где x_{m1} – первый корень $J_m(x)$.

При наличии же свободной границы возможна неустойчивость разрыва плотности тока. Для стабилизации этой неустойчивости необходимо, чтобы особая точка $r = r_s$, где $y = B_0[\alpha J_0(\varepsilon r) - J_1(\varepsilon r)/r] = 0$, попала внутрь плазмы. Следовательно, для устойчивости длинноволновых колебаний ($\alpha r \ll 1$) необходимо, чтобы $\varepsilon a > x_{11}$, причем при $\varepsilon a \approx x_{11}$ удовлетворяется также необходимое условие устойчивости (25). Таким образом, условия устойчивости плазмы со свободной границей выделяют бессилловую конфигурацию с $\varepsilon a \approx x_{11} \approx 3,8$, в которой B_z и j_z изменяют знак внутри плазмы при $r/a \approx x_{01}/x_{11} \approx 0,63$.

Внутренний разрыв плотности тока. Если $j = j_z = \text{const}$ при $0 < r < r_0$ и $j = 0$ при $r_0 < r < a$, то разрывная неустойчивость плазменного цилиндра со свободной границей при $b \rightarrow \infty$ стабилизируется при выполнении условия [7]

$$r_0^2 / a^2 < 1 - 1/m. \quad (26)$$

При этом для стабилизации моды $m = 1$ необходимо и достаточно выполнения неравенства (21).

Параболическое распределение плотности тока. В случае $j = j_z = j_0(1 - \varepsilon r^2 / a^2)$ необходимое условие отсутствия поверхностной неустойчивости плазменного цилиндра со свободной границей ($b \rightarrow \infty$), вытекающее из выражения (19) при $\xi = r^{m-1}$, имеет вид

$$\left| 1 - \frac{2m+1}{m+2} \frac{\varepsilon}{m+1} \right| < \sqrt{1 - \frac{1}{m} \frac{2m+1}{m+2}}. \quad (27)$$

Отсюда следует необходимость уменьшения плотности тока $\varepsilon > 0$. Для $m \geq 2$ рассматриваемые возмущения стабилизируются при $\varepsilon = 1$, когда $j(a) = 0$.

СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ПРОВОДЯЩИХ ТОРЦОВ

Если в выражении (11) для δW_i отбросить член $\gamma p (\text{div } \xi)^2$ и заменить вектор в первой скобке его проекцией на ∇V , то получим

$$\delta W_i \geq \frac{1}{2} \int \left\{ (\mathbf{B} \nabla \xi)^2 / |\nabla V|^2 - (\Omega + j^2 / |\nabla V|^2 - \mathbf{B} \nabla \lambda) \xi^2 \right\} d\tau. \quad (28)$$

При выводе критерия устойчивости для плазменной конфигурации, магнитные силовые линии которой можно считать замороженными в идеально проходящие стенки, необходимо потребовать обращения в нуль тангенциальной составляющей ξ

на торцах [4]. При интегрировании вдоль силовых линий $\mathbf{B}\nabla\xi = \Phi d\xi/d\zeta$. Учитывая условие $\xi = 0$ на торцах $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$, имеем $\int_0^1 (d\xi/d\zeta)^2 d\zeta \geq \pi^2 \int_0^1 \xi^2 d\zeta$. Отсюда, согласно выражению (28) получим достаточное условие устойчивости

$$\left\langle \frac{\pi}{|\nabla V|^2} \right\rangle \Phi'^2 - \frac{j^2}{|\nabla V|^2} - \Omega + \mathbf{B}\nabla\lambda > 0, \quad (29)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по объему слоя между соседними магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle = \frac{d}{dV} \int f d\tau. \quad (30)$$

В отличие от необходимого условия устойчивости, полученного Б.Б. Кадомцевым [4], критерий (29) содержит ограничение на продольный ток.

Для случая плазменного цилиндра с идеально проводящими торцами при $z = 0$ и $z = L$ имеем $V = \pi r^2 L$, $\mathbf{B}\nabla\lambda = 0$, при этом достаточное условие устойчивости (29) принимает вид

$$\pi^2 B_z^2 / L^2 - 2j_z B_\phi / r > 0. \quad (31)$$

Если $j = j_z = \text{const}$, то из выражения (31) вытекает ограничение на продольный ток:

$$j_z L / (\pi B_z) < 1.$$

При выводе необходимого условия устойчивости ограничимся случаем плазменного цилиндра с однородным током $j = j_z = \text{const}$ и выберем смещения в виде $\xi = \xi(r) \sin m(\varphi - \mu z) \sin kz$, $\eta = \eta(r) \cos m(\varphi - \mu z) \sin kz$, где $k = \pi/L$. При этом тангенциальные компоненты электрического поля $\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\xi \mathbf{B}]$ обратятся в нуль на торцах $z = 0$ и $z = L$. Минимизация δW_i по η для плазмы низкого давления приводит к выражению

$$\frac{\delta W_i}{\pi L} = B_z^2 \int_0^a \left\{ \frac{\alpha^2 [f'^2 + \mu^2 r^6 (f/r^2)'^2] - 4\mu^2 (\mu^2 + \alpha^2) f^2}{1 + (\mu^2 + \alpha^2) r^2} + \frac{k^2}{r^2} f^2 \right\} r dr, \quad (32)$$

где $f = r\xi$. При $\mu^2 a^2 \ll 1$ и $\alpha^2 a^2 \ll 1$ получаем

$$\delta W_i = \pi L B_z^2 \alpha^2 \int_0^a \left\{ f'^2 + (m^2 / r^2 + 4\mu^2 - 4\mu^4 / \alpha^2) f^2 \right\} r dr, \quad (33)$$

и соответствующее уравнение Эйлера имеет решение $f = J_m \left(2\mu r \sqrt{\mu^2 / \alpha^2 - 1} \right)$.

Отсюда следует, что наиболее жестким является необходимое условие внутренней устойчивости при $\xi(a) = 0$ для $m = 1$:

$$\mu a < \sqrt{\pi a x_{11} / (2L)} \approx \sqrt{2\pi a / L}, \quad (34)$$

которое приводит к ограничению на продольный ток $j_z a / B_z < \sqrt{8\pi a / L}$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Стабилизация низших мод. Достаточные условия стабилизации низших мод легко получить на основании выражения (28). Ограничимся для простоты конфигурацией с круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей и с малой кривизной

магнитной оси и, предполагая, что продольный ток спадает по радиусу, получим следующее достаточное условие устойчивости для моды m :

$$jL/(4\pi B) < 1/(m+2). \quad (35)$$

Аналогично выражению (25) это условие не удовлетворяется при больших m .

Потенциальная энергия винтовых гармоник. Рассмотрим δW_i для отдельной винтовой гармоники возмущения, приняв $\xi = \xi(V) \cos 2\pi(n\zeta - m\theta)$. Введем обозначения: $u = n\Phi' - m\chi'$, $v = nJ' - mI'$, $c = ne_1 + me_2 = (ju - vB)/p'$. Если ограничиться случаем аксиально-симметричных тороидальных конфигураций, то в результате минимизации выражения (11) по η получим

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\nabla V(u\xi)' - [c[\mathbf{je}]] \right)^2 + \left([ce]^2 \frac{u^2}{c^2} - \Omega - [\mathbf{je}]^2 \right) \xi^2 \right\} d\tau. \quad (36)$$

Пусть на границе плазмы ξ или $\mathbf{j}c$ обращаются в нуль, тогда, интегрируя по частям, находим

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int \left\{ \left\langle \frac{|\nabla V|^2}{c^2} \right\rangle (u\xi)'^2 + \left\langle \frac{[ce]^2}{c^2} u^2 + \left[\frac{v}{\chi'} \frac{I' + \mathbf{B}'e_2}{c^2} - \frac{nI'}{\chi'^2} \frac{p' + \mathbf{B}\mathbf{B}'}{c^2} - \left\langle \frac{\mathbf{j}c}{c^2} \right\rangle' \right] u + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n^2}{\chi'^2} \frac{S\mathbf{j}\mathbf{B} - \Omega\mathbf{B}^2 - p'^2}{c^2} \right\rangle \xi^2 \right\} d\tau. \quad (37)$$

Для случая цилиндрической геометрии это выражение переходит в (16) при отсутствии тангенциальных разрывов плотности тока. Существенно, что при переходе к тороидальной геометрии член $\sim p'(r)$, ответственный за внутреннюю неустойчивость плазменного цилиндра, заменяется согласно соотношению

$$\frac{b_\Phi^2 p'(r)}{\beta\pi L} \rightarrow S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{c^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{c^2} \right\rangle - \left\langle \frac{p'^2}{c^2} \right\rangle \quad (38)$$

величиной, которая при достаточно малых токах становится положительной при $p' < 0$. Отметим, что совокупность двух первых членов в правой части (38) характеризует стабилизирующее действие $\min \bar{B}$.

Достаточные условия устойчивости тороидальных конфигураций. Представим вектор \mathbf{B} в виде разложения по степеням V :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'_0 V + \mathbf{B}''_0 V^2 / 2 + \dots; \quad \mathbf{B}_0^{(n-1)} = \chi_0^{(n)} \mathbf{e}_1 + \Phi_0^{(n)} \mathbf{e}_2. \quad (39)$$

Заменив вектор в первой скобке выражения (11) его проекцией на $[\mathbf{B}_0\mathbf{e}]$ и воспользовавшись неравенством Шварца, получим

$$\delta W_i \geq \frac{1}{2} \int \left\{ \left(S(V\xi)' + [\mathbf{je}][\mathbf{B}_0\mathbf{e}]\xi \right)^2 \langle [\mathbf{B}_0\mathbf{e}]^2 \rangle^{-1} - \left(\Omega + [\mathbf{je}]^2 \right) \xi^2 \right\} d\tau. \quad (40)$$

Учитывая, что в случае малых токов опасные возмущения близки к постоянным вдоль магнитных силовых линий, так что $\xi \approx \xi_0$, где $\mathbf{B}_0 \nabla \xi_0 = 0$, с помощью интегрирования по частям по переменной V получаем условие положительности δW_i :

$$S \langle [\mathbf{je}][\mathbf{B}\mathbf{e}] \rangle - \Omega \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle - \left(\langle [\mathbf{je}]^2 \rangle \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle - \langle [\mathbf{je}][\mathbf{B}\mathbf{e}] \rangle^2 \right) > 0. \quad (41)$$

При выводе (41) принято, что плотность тока спадает при удалении от магнитной оси, и использованы граничные условия $\xi_\Sigma = 0$ или $j_\Sigma = 0$. Таким образом, неравенство (41) представляет собой достаточное условие внутренней устойчивости плазменной кон-

фигурации. Как это следует из проведенного выше анализа устойчивости плазменного цилиндра, при условии, что поверхностная неустойчивость для $m \geq 2$ стабилизирована, для устойчивости тороидальной конфигурации достаточно выполнения критерия (41) и дополнительного условия $|JL/(\Phi'V)|_{\Sigma} < 4\pi$ для первой винтовой моды возмущения.

Для определения вектора $\mathbf{e} = [\nabla\theta\nabla\zeta]$ можно использовать ортогональные координаты Мерсье [11] ρ, ω, s . Приняв $\theta = \omega/(2\pi) + \tilde{\theta}$, $\zeta = s/L + \tilde{\zeta}$, получим уравнения для $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\zeta}$:

$$B\nabla\tilde{\theta} = \chi' - B_{\omega}/(2\pi\rho), \quad B\nabla\tilde{\zeta} = \Phi' - B_s/(h_s L), \quad (42)$$

где $h_s = 1 + k\rho \cos\omega$ ($\omega = \int \kappa ds$); k и κ – кривизна и кручение магнитной оси s .

Для аксиально-симметричной конфигурации с круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей при условии квазиоднородности вектор \mathbf{e} приближенно определяется как

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla V}{|\nabla V|^2} - \frac{B_{\phi} \sin\omega}{\pi^2 R^2 \rho j} \mathbf{e}_{\phi}, \quad (43)$$

где R – радиус магнитной оси. При этом критерий (41) приводится к виду

$$-p' \left[\frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{\rho p'}{B_{\omega}^2} \right) - \mu^2 \right] > 0, \quad (44)$$

где $\mu = B_{\omega}/(\rho B_{\phi})$. Полученное условие (44) в точности совпадает с достаточным условием устойчивости, выведенным в работе [12] другим методом. Как показано в работе [13], необходимый критерий устойчивости Мерсье [14] для рассматриваемой конфигурации приводит к ограничению

$$\frac{\mu'^2}{4} - \frac{2p'}{\rho B_{\phi}^2} \left(\frac{1}{R^2} - \mu'^2 \right) > 0; \quad (45)$$

член $1/R^2$ в критериях (44) и (45) характеризует стабилизирующее действие магнитной ямы, которая возникает при сворачивании плазменного цилиндра в тор.

О МЕХАНИЗМАХ ГИДРОМАГНИТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Из теории гидромагнитной устойчивости плазменных конфигураций следует, что магнитная яма, возникающая лишь в конфигурациях достаточно сложной геометрии, дает весьма существенный стабилизирующий эффект. В связи с этим особый интерес представляют критерии устойчивости, не связанные с конкретной геометрией плазмы.

Понятие магнитной ямы было введено Розенблютом и Лонгмайром [15]. Полученное ими условие устойчивости сводится к требованию существования магнитной ямы $V''(\Phi) < 0$; для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями в наших обозначениях (6) оно имеет вид

$$-\Omega > 0. \quad (46)$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости для плазмы низкого давления в предположении о замкнутости силовых линий, полученное Б.Б. Кадомцевым [16], можно записать

$$-\Omega + \gamma p \Omega^2 / p'^2 > 0. \quad (47)$$

В работе [17] были получены необходимые условия устойчивости для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями в предположении, что рассматриваемые возмущения постоянны вдоль силовых линий. Соответствующие условия

$$-\Omega(\mathbf{B}^2) - p'^2 > 0, \quad \gamma p \Omega - p'^2 > 0, \quad (48)$$

и плазма неустойчива, если не выполняется ни одно из неравенств (48). Второе условие (48) может быть выполнено только для конфигураций без магнитной ямы: $\Omega > 0$. Следовательно, необходимым условием "конвективной" устойчивости конфигураций, обладающих магнитной ямой, является первое неравенство (48), которое можно представить в эквивалентной форме

$$-p' \left\langle \frac{\partial}{\partial V} \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \right\rangle > 0, \quad (48')$$

сводящейся при $p'(V) < 0$ к требованию положительности средней производной по V от "полного давления" $p + \mathbf{B}^2/2$.

В работах [14, 18, 19] был получен не зависящий от конкретной геометрии плазмы необходимый критерий устойчивости для возмущений, локализованных в тонком слое между соседними магнитными поверхностями. Как показано в работе [20], этот критерий можно представить в виде

$$\frac{S^2}{4} + S \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \Omega \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) > 0. \quad (49)$$

В работе [3] получен достаточный критерий устойчивости

$$-\Omega - [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 > 0 \quad (50)$$

при единственном предположении об отсутствии поверхностных токов. В той же работе [3] был получен достаточный критерий внутренней устойчивости плазмы в предположении о квазиоднородности рассматриваемых равновесных конфигураций:

$$S \langle [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}] \rangle - \Omega \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle - \left(\langle [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 \rangle \langle [\mathbf{B}\mathbf{e}]^2 \rangle - \langle [\mathbf{j}\mathbf{e}][\mathbf{B}\mathbf{e}] \rangle^2 \right) > 0. \quad (51)$$

В настоящей работе критерий (51) обобщается на случай спадающей плотности тока. При этом для устойчивости достаточно выполнения критерия (51) и дополнительного условия

$$|\mathbf{jL}/(\Phi'V)|_z < 4\pi. \quad (52)$$

Как показано в работе [3], достаточное условие внутренней устойчивости для квазиоднородных конфигураций совпадает с критерием (49) без члена $S^2/4$. Если предположить, что наиболее критичной областью является окрестность магнитной оси, то для устойчивости конфигураций со спадающей плотностью тока достаточно выполнения критерия (49), более мягкого, чем критерий (51).

Из выражения (7) следует, что дестабилизирующим фактором, вызывающим неустойчивость, является наличие токов в плазме. В тороидальных конфигурациях без продольного тока к дестабилизации приводит спадающее давление плазмы, а в системах с продольным током добавляется еще дестабилизирующее действие продольного тока. В связи с этим условия устойчивости сводятся к ограничениям на давление плазмы и продольный ток в плазме. В критериях (46)–(51) стабилизирующими факторами являются магнитная яма, характеризуемая величиной $-\Omega$ для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, или совокупность второго и третьего членов в выражении (49) для произвольных конфигураций, а также шир, характеризуемый членом $S^2/4$ в (49).

Для сравнения критериев (46)–(51) применим их к системе типа токамак при условии квазиоднородности магнитного поля и $p'(\rho^2) < 0$. При этом на основании критериев (46), (48), (49) и (51) получим соответственно

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} - \frac{2p'}{j^2 R^2} - \frac{p'}{B^2} > 0, \quad (53)$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} - \frac{2p'}{j^2 R^2} > 0, \quad (54)$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} > 0, \quad (55)$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{j^2}{4B^2} + \frac{2p'}{j^2 R^2} > 0. \quad (56)$$

В случае исчезающе малого давления плазмы критерии (53)–(56) сводятся к ограничению на продольный ток (55). Необходимые условия устойчивости (53) и (54) являются более мягкими, чем необходимое условие (55), поскольку в них недостаточно учтено дестабилизирующее действие конечного давления плазмы. Достаточное условие (56) содержит дополнительное ограничение на давление плазмы по сравнению с выражением (55).

Как показано в работе [21], в системах без продольного тока при достаточно малом $\beta_B = 2p/B^2$ может быть выполнено достаточное условие устойчивости (50), и, следовательно, для стабилизации гидромагнитной неустойчивости в таких конфигурациях достаточно механизма, обусловленного наличием магнитной ямы.

Достаточные условия внутренней устойчивости для конфигураций с продольным током наряду с критерием (51), в котором единственным стабилизирующим фактором является магнитная яма, содержат также ограничение (52) на длину системы. В случае свободной границы плазмы появляются дополнительные ограничения. При этом условие (52) становится необходимым условием стабилизации винтовой неустойчивости ($m = 1$), для которой роль стабилизирующего фактора играет конечная длина системы. Кроме того, возникают ограничения на распределение тока, в частности плотность тока должна достаточно быстро спадать при удалении от магнитной оси.

В конфигурациях с круговой магнитной осью и круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей типа токамак глубина магнитной ямы определяется кривизной магнитной оси. Согласно необходимому условию (49) в случае параболического распределения давления отличная от нуля область устойчивости появляется лишь при сворачивании плазменного цилиндра в тор. В более сложных конфигурациях глубина магнитной ямы зависит от формы поперечного сечения магнитных поверхностей, а также от кривизны и кручения магнитной оси [22–25].

В ограниченных конфигурациях плазмы с замороженными в проводящие торцы магнитными силовыми линиями возникает сильный стабилизирующий механизм, обусловленный натяжением магнитных силовых линий [4]. Как показывает достаточный критерий (31), плазменный цилиндр с замороженными торцами при достаточно малых продольных токах является гидромагнитоустойчивой конфигурацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernstein I. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
2. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
3. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 2063.
4. Кадомцев Б.Б. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132.
5. Newcomb W. // Ann. Phys. 1960. Vol. 10. P. 232.

6. *Сайдем В.* Устойчивость самосжатоого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термо-ядерные реакции. С. 89.
7. *Шафранов В.Д.* // Журн. техн. физики. 1970. Т. 40. С. 241.
8. *Шафранов В.Д.* // Атом. энергия. 1956. Т. 5. С. 38.
9. *Шафранов В.Д.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 61.
10. *Морозов А. И., Соловьев Л.С.* // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. С. 831.
11. *Mercier C.* // Nucl. Fusion. 1963. Vol. 3. P. 89.
12. *Ware A., Haas F.* // Phys. Fluids. 1966. Vol. 9. P. 956.
13. *Шафранов В.Д., Юрченко Э.И.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 1157.
14. *Mercier C.* // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
15. *Rozenbluth M., Longmire C.* // Ann. Phys. 1966. Vol. 1. P. 120.
16. *Кадо́мцев Б.Б.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 4. С. 16.
17. *Кадо́мцев Б.Б.* // Там же. С. 380.
18. *Binean M.* // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Control Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 35.
19. *Green J., Johnson J.* // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7. P. 401.
20. *Соловьев Л.С.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
21. *Shafranov V., Yurchenko E.* // Nucl. Fusion. 1969. Vol. 9. P. 285.
22. *Соловьев Л.С., Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1967. Т 5. С. 3.
23. *Соловьев Л.С.* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. С. 1052.
24. *Solov'ev L.S.* // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research: Proc. Conf., Novosibirsk, 1968. Vienna: IAEA, 1969. Vol. 1. P. 175.
25. *Зуева Н.М., Соловьев Л.С.* // Атом. энергия. 1969. Т. 26. С. 35.

О КОНФИГУРАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ*

Классическими объектами исследования современной теории гидродинамической устойчивости [1] являются одномерные задачи: течение Пуазейля и течение Куэтта, скорости в которых имеют соответственно продольную и азимутальную составляющие. Представляет, однако, существенный интерес выход за рамки одномерных задач. Необходимо учитывать, что реализуемые стационарные течения должны удовлетворять не только уравнениям движения, но и условиям устойчивости. В случае невыполнения условий устойчивости течение может существенно изменить свою конфигурацию таким образом, чтобы стать устойчивым. Устойчивость стационарных течений заданной конфигурации мы будем называть **конфигурационной устойчивостью**. К задачам конфигурационной устойчивости относятся, по-видимому, такие явления, как появление вращения в смерчах и водоворотах, а также возникновение циркуляции вокруг обтекаемых профилей вследствие неустойчивости продольных потоков без циркуляции.

В случае несжимаемой жидкости течение удовлетворяет уравнению Навье-Стокса

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p + G) - \nu \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, G – гравитационный потенциал, ν – коэффициент вязкости, а плотность ρ принята равной единице.

В отсутствие вязкости ($\nu = 0$), а также в случае $\nabla^2 \mathbf{j} = 0$, когда $\operatorname{rot} \mathbf{j} = \nabla \Delta$, уравнение (1) можно записать в форме уравнения Эйлера

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + [\mathbf{j} \mathbf{v}] = -\nabla P, \quad P = p + \frac{1}{2} v^2 + G + \nu \Delta. \quad (3)$$

Мы будем рассматривать устойчивость стационарных течений, удовлетворяющих уравнениям

$$[\mathbf{j} \mathbf{v}] = -\nabla P, \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

в пренебрежении вязкостью. При этом уравнения малых колебаний получаются путем линеаризации уравнений Эйлера (3).

В движущейся вместе с жидкостью локальной системе координат [2, 3]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} \nabla) \xi - (\xi \nabla) \mathbf{v} + \partial \xi / \partial t = \mathbf{v}_0 + \mathbf{Q} + \partial \xi / \partial t, \quad (5)$$

$$P = P_0 - \xi \nabla P, \quad \mathbf{Q} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{v}], \quad (6)$$

где ξ – смещение. Подставляя (5), (6) в уравнения (3) и предполагая зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, получим уравнения малых колебаний

$$-\omega^2 \xi - i\omega(\mathbf{Q} - [\xi \mathbf{j}] - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \xi]) + [\mathbf{j} \mathbf{Q}] - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] = -\nabla(\xi \nabla P). \quad (7)$$

* Совместно с Э.Л. Бурштейном // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. С. 1266–1269.

Умножение уравнения (7) на ξ^* и интегрирование по объему с использованием граничных условий $\xi_n = 0$ и условия $\text{div } \xi = 0$ дает

$$-\omega^2 \int |\xi|^2 d\tau + \omega \text{Im} \int (2\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi]) \xi^* d\tau - \int (|\mathbf{Q}|^2 + \text{Re} [\mathbf{j}\xi^*] \mathbf{Q}) d\tau = 0. \quad (8)$$

Заметим, что уравнения равновесия (4) в точности совпадают с уравнениями гидромагнитного равновесия [4], если заменить в последних $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{v}$, $p \rightarrow -P$, в то время как уравнение (8) отличается от вариационного принципа в магнитной гидродинамике [4] наличием линейного по ω члена и знаком перед ω^2 .

Достаточным условием устойчивости согласно (8) является неравенство

$$\frac{1}{4} \left(\text{Im} \int (2\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\xi]) \xi^* d\tau \right)^2 - \int |\xi|^2 d\tau \int (|\mathbf{Q}|^2 + \text{Re} [\mathbf{j}\xi^*] \mathbf{Q}) d\tau \geq 0 \quad (9)$$

для произвольных ξ . Это неравенство будет также и необходимым условием устойчивости, если выбранные смещения ξ удовлетворяют уравнениям малых колебаний (7).

Может показаться, что для безвихревого движения условие (9) свидетельствует о его неустойчивости. Однако легко видеть, что безвихревое течение находится в безразличном равновесии. Действительно, как это следует из уравнения Эйлера (3), линеаризованное уравнение для возмущения $\tilde{\mathbf{j}}$ в случае $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$ имеет вид

$$\partial \tilde{\mathbf{j}} / \partial t + \text{rot} [\tilde{\mathbf{j}} \mathbf{v}] = 0. \quad (10)$$

Его точным аналогом является уравнение в замороженности магнитных силовых линий в идеально проводящую жидкость, движущуюся со скоростью \mathbf{v} . Таким образом, вихри заморожены в невозмущенный поток и неустойчивость при $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ не развивается. Отсюда можно заключить, что при $\mathbf{j} = 0$ члены с \mathbf{Q} в неравенстве (9) взаимно компенсируются. Таким образом, причиной неустойчивости является наличие вихрей.

Как следует из уравнений равновесия (4), линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях $P = \text{const}$ и можно ввести натуральную систему координат [5] x^i , связанную с этими поверхностями. Если $x^3 = V$ — текущий объем, отсчитываемый от некоторой осевой линии тока, а $x^1 = \theta$ и $x^2 = \zeta$ — циклические координаты на поверхностях $P = \text{const}$ с периодами изменения, равными единице, то детерминант метрического тензора также равен единице, а векторы \mathbf{v} и \mathbf{j} имеют по две контравариантные компоненты, выражающиеся через производные по V от соответствующих потоков \mathbf{v} и \mathbf{j} :

$$\mathbf{v} = \chi' \mathbf{e}_1 + \Phi' \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{j} = I' \mathbf{e}_1 + J' \mathbf{e}_2. \quad (11)$$

Запишем уравнение равновесия через потоки, и введем функции Ω и S [6], зависящие, как и потоки, только от V :

$$-P' = I' \Phi' - J' \chi', \quad \Omega = I' \Phi'' - J' \chi'', \quad S = \chi' \Phi'' - \Phi' \chi''. \quad (12)$$

При этом неравенство (9) преобразуется к виду

$$\left(\text{Im} \int (\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi) \xi^* d\tau \right)^2 - \int |\xi|^2 d\tau \int \left\{ |\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi|^2 - (\Omega + [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2) |\xi|^2 \right\} d\tau \geq 0, \quad (13)$$

где $\xi = \xi^3 = \xi \nabla V$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$.

Поскольку два первых слагаемых, содержащих $\mathbf{Q} + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi$, могут дать в сумме только отрицательную величину, для выполнения неравенства (13) необходимо

$$\Omega + \langle [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2 |\xi|^2 \rangle / \langle |\xi|^2 \rangle \geq 0, \quad (14)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по объему бесконечно тонкого слоя между двумя поверхностями $P = \text{const}$. В случае существования возмущений с $\xi = \text{const}$ вдоль линий тока необходимым условием устойчивости будет неравенство

$$\Omega + \langle [j\mathbf{e}]^2 \rangle \geq 0. \quad (15)$$

Если ограничиться рассмотрением лишь локальных возмущений, отличных от нуля в тонком слое между соседними поверхностями $P = \text{const}$ и почти постоянных вдоль линий тока, то последний интеграл в (13) можно преобразовать к виду [6, 7] $\int M |\xi|^2 d\tau$ и условие $M < 0$ будет достаточным условием "локальной" устойчивости. Это условие имеет вид

$$-\frac{S^2}{4} - S \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{v}}{|\nabla V|^2} \right\rangle + \Omega \left\langle \frac{\mathbf{v}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{v}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{v}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \geq 0. \quad (16)$$

Условия устойчивости (15) и (16) имеют аналоги (отличающиеся знаком) в теории устойчивости магнитогидродинамических равновесных конфигураций [6–9]. Входящая в выражение (16) величина S характеризует перекрещенность линий тока. Как показывает рассмотрение устойчивости цилиндрической конфигурации методом малых колебаний, условие (16) оказывается необходимым лишь в случае "замкнутости" линий тока, когда $S = 0$.

Ограничиваясь случаем замкнутых линий тока, критерии (15) и (16) можно записать соответственно в виде

$$-P' \frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{1}{\Phi'^2} \langle [P'\mathbf{e}^2 + J'[\mathbf{v}\mathbf{e}]]^2 \rangle \geq 0, \quad (15')$$

$$-P' \frac{\Phi''}{\Phi'} \left\langle \frac{\mathbf{v}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle + P'^2 \left(\left\langle \frac{\mathbf{e}_1^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{e}_2^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) \geq 0. \quad (16')$$

В случае цилиндрической геометрии критерий (15) сводится к условию устойчивости Рэлея [1]

$$v_\phi (rv_\phi)' \geq 0. \quad (17)$$

Таким образом, из критерия (15) вытекают два известных результата об устойчивости течения Паузейля ($v_\phi = 0$) и Куэтта (17) в пределе исчезающей вязкости. Следует отметить, что поскольку идеальное течение Паузейля находится в безразличном равновесии, то на его устойчивость должны оказывать существенное влияние малые отклонения от идеальной модели, как, например, учет вязкости, вращения жидкости, искажения границы и т.д. Этим же обстоятельством объясняется парадоксальное дестабилизирующее действие вязкости, обнаруженное при исследовании плоского течения Паузейля [1].

Необходимое условие локальной устойчивости для цилиндрической геометрии, вытекающее из (16) при $S = 0$, имеет вид

$$v_\phi^2 P' = v_\phi^2 \left[v_z v_z' + \frac{v_\phi}{r} (rv_\phi)' \right] \geq 0. \quad (18)$$

Это условие более жесткое, чем (17). Из него следует существование неустойчивости при наличии малого вращения $v_\phi^2 \neq 0$ в случае спадающей продольной скорости ($v_z v_z' < 0$). Если $v_z = v_0(1 - r^2/a^2)$, $v_\phi/r = v_0(1 - r^2/R^2)$ (при этом существует такая движущаяся с постоянной скоростью система координат, в которой $S = 0$), то условие

устойчивости (18) выполняется в интервале $0 < r < a$, когда

$$v_0^2 a^2 / v_0^2 > (R^2 / a^2) (1 - 2a^2 / R^2)^{-1}. \quad (19)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае для устойчивости необходима конечная скорость вращения, которая минимальна при $R = 2a$ и равна $v_\phi(a) = (3/\sqrt{2})v_0$.

Рассмотрим в качестве следующего примера устойчивость течения в гофрированной трубе. Ограничиваясь рассмотрением окрестности оси трубы и полагая при написании критерия (15') $J' = 0$, получим вместо (15') и (16') одинаковые выражения

$$P'V_0''(\Phi) \geq 0, \quad V_0''(\Phi) = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ 3v_0'^2(z) + j_0^2 \right\} \frac{dz}{v_0^4}, \quad (20)$$

где интегрирование производится по периоду изменения скорости $v_0(z)$ на оси z ,

$$j_0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\phi) \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Поскольку $V_0''(\Phi) > 0$, из критерия (15') вытекает наличие области неустойчивости в отсутствие вращения жидкости при спадающей продольной скорости, когда $I'\Phi' > 0$ (см. (12)). Согласно же критерию (16') течение со спадающей скоростью может быть неустойчивым как при наличии вращения ($j_0 \neq 0$), так и при его отсутствии, когда $v_0'(z) \neq 0$, и область устойчивости появляется только при достаточно большой скорости вращения, когда выполняется неравенство $J''\chi' > I'\Phi'$, аналогичное (18).

Из обоих рассмотренных примеров видно, что при снятии вырождения продольное цилиндрическое течение со спадающим к периферии распределением скоростей является неустойчивым. Устойчивость появляется при достаточно больших скоростях вращения. Этим можно объяснить образование устойчивых конфигураций типа смерчей, водоворотов и т.п.

При рассмотрении конфигурационной устойчивости мы ограничиваемся случаем идеальной жидкости. При достаточно малой вязкости такое рассмотрение, evidentemente, позволяет судить об устойчивости течения за исключением вырожденных случаев, соответствующих безразличному равновесию. Только в этом случае (например, течение Пуазейля) и следует привлекать учет вязкости для ответа на вопрос об устойчивости. Однако введение какого-либо малого изменения равновесной конфигурации позволяет получить ответ на вопрос о конфигурационной устойчивости и без привлечения вязкости.

Предлагаемое рассмотрение вопроса об устойчивости в рамках идеальной гидродинамики позволяет в принципе объяснить качественную перестройку конфигурации течения от неустойчивой к устойчивой. Разумеется, сам процесс перестройки происходит при существенном влиянии вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во Иностран. лит., 1958.
2. Frieman E., Rotenberg M. // Rev. Mod. Phys. 1960. Vol. 12. P. 898.
3. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1968. Т. 54. С. 666.
4. Bernstein I.B. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
5. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
6. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
7. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
8. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 2063.
9. Соловьев Л.С. // Атом. энергия. 1971. Т. 30. С. 14.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ*

Из всего многообразия возможных гидродинамических течений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в действительности реализуются лишь устойчивые течения, причем при больших числах Рейнольдса условия устойчивости могут быть найдены в приближении идеальной жидкости. Некоторые общие черты таких устойчивых конфигураций могут быть выявлены на примере рассматриваемых ниже течений.

1. Устойчивость цилиндрического течения. В современной теории гидродинамической устойчивости принято считать, что имеются два основных прототипа неустойчивости, которые достаточно полно представлены двумя простейшими типами течения: продольным течением Пуазейля и азимутальным течением Куэтта [1]. Однако рассмотрение течения, имеющего одновременно как продольную, так и азимутальную составляющие скорости, в рамках цилиндрической геометрии приводит к качественно новым результатам.

Для исследования устойчивости течения при цилиндрической геометрии достаточно рассмотреть устойчивость относительно каждой отдельной винтовой гармоники смещения $\xi = \xi(r) \exp(ikz - im\phi - i\omega t)$ в цилиндрических координатах r, ϕ, z . При этом уравнения малых колебаний идеальной несжимаемой жидкости сводятся к одному уравнению [2] для функции $f(r) = r \xi_r / y$, где $y = \alpha v_z - v_\phi / r - \omega / m$, $\alpha = k/m$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, ρ – плотность:

$$\left(\frac{\rho r y^2}{\beta} f' \right)' - \left[\frac{\rho m^2 y^2}{r} - \frac{4\alpha^2 \rho v_\phi^2}{\beta r} - \left(\frac{2\rho y v_\phi}{\beta r} + \frac{\rho v_\phi^2}{r^2} \right)' \right] f = 0. \quad (1)$$

Отсюда для функции $F = r\xi_r$ при $\rho = \text{const}$ вытекает уравнение

$$\left(\frac{rF'}{\beta} \right)' - \left\{ \frac{m^2}{r} - \frac{1}{y} \left[\frac{(rv_\phi)' - \alpha r^2 v_z'}{\beta r} \right] - \frac{2\alpha v_\phi}{\beta r y^2} (v_z + \alpha r v_\phi)' \right\} F = 0. \quad (2)$$

Введение вихревого поля $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{v}$ при учете равенств $j_z = \frac{1}{r}(rv_\phi)'$, $j_\phi = -v_z'$ позволяет переписать уравнение (2) в эквивалентной форме

$$\left(\frac{r}{\beta} F' \right)' - \left[\frac{m^2}{r} - \frac{1}{y} \left(\frac{j_z + \alpha r j_\phi}{\beta} \right)' + \frac{2\alpha v_\phi}{\beta r y^2} (j_\phi - \alpha r j_z) \right] F = 0. \quad (3)$$

Течение будет неустойчивым, если существует решение уравнений (1)–(3), обращающееся в нуль при $r = 0$ и $r = a$, для которого собственное значение частоты ω имеет положительную мнимую часть. Как это следует из уравнения (3), для безвихревого равновесного течения $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$ построение таких решений невозможно. Это согласуется с общими выводами работы [3] об устойчивости безвихревых течений.

В случае, когда существует такая система координат, движущаяся с постоянной скоростью вдоль оси z , в которой линии тока не перекрещиваются ($v_\phi / (rv_z) = \text{const}$), можно выбрать шаг винта возмущения $L = 2\pi/\alpha = 2\pi r v_z / v_\phi$ совпадающим с шагом винта линий тока. При этом величина y становится равной $\omega/m = \text{const}$ и, как это следует из общей теории собственных значений [4], можно построить решение

* Совместно с Э.Л. Бурштейном // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. С. 56–59.

уравнения (2) с $\omega^2 < 0$, если не выполняется условие

$$v_\phi^2 \left[v_z v_z' + \frac{v_\phi}{r} (r v_\phi)' \right] > 0, \quad (4)$$

которое, таким образом, является необходимым условием устойчивости.

В соответствии с известными результатами отсюда вытекает, что в пределе исчезающей вязкости течение Пуазейля ($v_\phi = 0$) находится в безразличном равновесии, а течение Куэтта ($v_z = 0$) становится неустойчивым, если не соблюдается условие Рэлея $v_\phi (r v_\phi)' > 0$. Из уравнения (4) видно также, что добавление малого вращения приводит к неустойчивости течения Пуазейля при $v_z v_z' < 0$ и область устойчивости появляется вновь только при достаточно быстром вращении, когда выражение в квадратных скобках в (4) становится положительным. Необходимая движущаяся система координат, в которой $v_\phi / (r v_z) = \text{const}$, существует, например, в случае, когда v_z и v_ϕ / r имеют параболическое распределение:

$$v_z = v_0(1 - r^2/a^2), \quad v_\phi / r = v_0(1 - r^2/R^2).$$

При этом условие (4) выполняется в интервале $0 < r < a$, если $v_0^2 a^2 > v_0^2 (1 - 2a^2/R_2)^{-1} R^2/a^2$. Необходимая для устойчивости скорость вращения минимальна, когда $R = 2a$, и в этом случае должно быть $v_0 a > 2\sqrt{2}v_0$.

Условия устойчивости (4) легко обобщить на случай сжимаемой жидкости, когда уравнение для функции $f(r)$ представляется в виде [2].

$$\left(\frac{\rho \gamma y^2 c^2 f'}{\beta c^2 - r^2 y^2} \right)' - \left[\frac{m^2 \rho y^2}{r} - \frac{4\alpha^2 \rho v_\phi^2}{\beta r} - \left(\frac{\beta \rho c^2 q}{\beta c^2 - r^2 y^2} \right)' + \frac{\beta \rho r q^2}{\beta v^2 - r^2 y^2} \right] f = 0. \quad (5)$$

Здесь $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука, γ – показатель адиабаты, $q = 2u v_\phi / (\beta r) + v_\phi^2 / r^2$.

Вытекающее из (5) необходимое условие устойчивости при тех же предположениях, которые были сделаны при выводе (4), имеет вид

$$v_\phi^2 \left\{ 2 \left[v_z v_z' + \frac{v_\phi}{r} (r v_\phi)' \right] + v^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho v_\phi^2}{r} - \frac{T'}{T} \right) \right\} > 0. \quad (6)$$

Как показывает выражение (6), при постоянстве температуры T сжимаемость жидкости является стабилизирующим фактором.

2. Об устойчивости цилиндрических разрывов. Неустойчивость вихревого течения проявляется также в неустойчивости тангенциальных разрывов скорости. Проинтегрируем уравнение (1) в окрестности цилиндрической поверхности радиуса $r = r_0$, на которой возможны разрывы плотности ρ и компонент векторов v и j . Тогда получим

$$\left\langle \rho y^2 \frac{r f'}{f} \right\rangle + \left\langle 2\rho y \frac{v_\phi}{r} + \rho \frac{\beta v_\phi^2}{r^2} \right\rangle = 0, \quad (7)$$

где угловыми скобками обозначены разности $\langle A \rangle = A_e - A_i$ соответствующих величин при стремлении $r \rightarrow r_0$ с внешней и внутренней стороны. Уравнение (7), записанное через функцию $F = yf$, имеет вид

$$\left\langle \rho y^2 \frac{r F'}{F} \right\rangle + \left\langle \rho y (j_z + \alpha r j_\phi) + \frac{\rho \beta v_\phi^2}{r^2} \right\rangle = 0. \quad (8)$$

При подстановке в (7) или (8) решений уравнений (1) – (3), удовлетворяющих граничным условиям обращения в нуль при $r = 0$ внутри и при $r = a$ вне цилиндра $r = r_0$, получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений ω . Для однородных потоков $v_z = \text{const}$, $v_\phi/r = \text{const}$ внутри и вне цилиндра $r = r_0$ решения уравнения (1) выражаются через бесселевы функции [2]:

$$f(r) = \varepsilon Z_m(\kappa r) - \alpha \kappa r Z'_m(\kappa r),$$

где $\varepsilon = 2\alpha v_\phi / (rv)$, $\kappa^2 = \alpha^2 m^2 - \varepsilon^2$, и задача об устойчивости цилиндрических разрывов решается до конца [5]. Однако при этом частота ω входит в выражения для функций $f_{i,e}$, и мы приходим к трансцендентному дисперсионному уравнению. В случае безвихревого течения решения уравнения (3) не зависят от частоты ω и условие устойчивости разрыва можно записать в явном виде

$$\left\langle \rho y_0 \frac{rF'}{F} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\rho r F'}{F} \right\rangle \left\langle \rho y_0^2 \frac{rF'}{F} + \rho \beta \frac{v_\phi^2}{r^2} \right\rangle \geq 0, \quad (9)$$

где $y_0 = \alpha v_z - v_\phi / r$. Неравенство (9) позволяет рассмотреть, например, устойчивость потока с $v_{zi} = \text{const}$, $v_{\phi i} = 0$; $v_{ze} = \text{const}$, $rv_{\phi e} = \text{const}$. Заметим, что в предельных случаях $\rho_i \rightarrow 0$ или $\rho_e \rightarrow 0$ неустойчивость разрыва продольного потока ($v_\phi = 0$) исчезает. При наличии же вращения жидкости во внешней области при $\rho_i \rightarrow 0$ получаем из условия устойчивости (9)

$$v_{\phi e}^2 F'_e / F_e \leq 0. \quad (10)$$

Поскольку отношение $F'_e / F_e < 0$ (например, при условии $F_e(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $F_e = rK'_m(\kappa r)$), рассматриваемое течение оказывается устойчивым, причем устойчивость улучшается при увеличении скорости вращения.

Указанная устойчивость тангенциальных разрывов продольной скорости в случае, когда плотность одной из жидкостей стремится к нулю, объясняет то, что теория струй идеальной несжимаемой безвихревой жидкости хорошо описывает наблюдаемые течения лишь при условии малого отношения плотностей по обе стороны от разрыва [6]. Иллюстрацией устойчивости вращающейся жидкости снаружи от области с малой плотностью является, например, образование соответствующего вращающегося течения с воронкой при стоке воды в ванной.

В проведенном выше рассмотрении устойчивости идеальной жидкости разрывы стабильны лишь при равном нулю отношении плотностей. В случае малого, но конечного отношения плотностей необходимо, разумеется, принимать во внимание стабилизирующее действие вязкости.

3. Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для вращающейся жидкости со свободной границей в поле силы тяжести. Для установившегося аксиально-симметричного течения несжимаемой жидкости в поле силы тяжести можно получить точное решение уравнений Навье–Стокса

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p + \rho gz) + \rho\nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (11)$$

если предположить, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$. В таком течении

$$v_r = a/r, \quad v_\phi = b/r, \quad v_z = c/r^4. \quad (12)$$

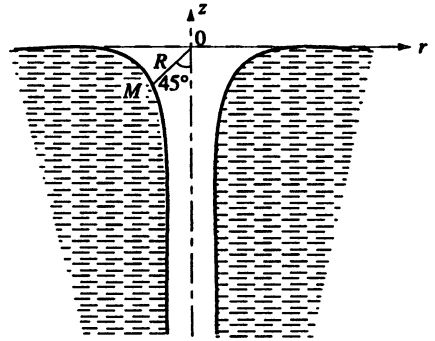
Функция тока ψ , определяемая равенствами $rv_r = -\partial\psi/\partial z$, $rv_z = \partial\psi/\partial r$, и пропорциональная ей функция $p - p_0$ соответственно равны

$$\psi = -az - c/(2r^2), \quad p - p_0 = -\rho(gz + (a^2 + b^2)/(2r^2)), \quad (13)$$

причем $a = -4v$. Форма свободной поверхности жидкости $p = p_0$ изображена на рисунке. В качестве размера, характеризующего ширину воронки, примем расстояние R от точки O до точки M . При этом квадрат скорости вращения жидкости оказывается равным

$$v_{\phi}^2 = \frac{gR^3}{\sqrt{2}r^2} \left(1 - \frac{16\sqrt{2}v^2}{gR^3} \right). \quad (14)$$

При достаточно малом коэффициенте вязкости v выражение (14) описывает вращающееся течение, а при фиксированном $v^2 = = gR^3 / (16\sqrt{2})$ — течение без вращения. Согласно проведенному выше анализу устойчивости разрывов, можно ожидать, что вращающийся поток (14) представляет устойчивое образование.



ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 3. С. 245.
3. Буриштейн Э.Л., Соловьев Л.С. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. С. 1266.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Соловьев Л.С., Явлинский Ю.Н. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. С. 309.
6. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

О РАЗВИТИИ ВИНТОВОЙ МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТИ*

Рассматривается процесс развития во времени винтовой неустойчивости [1–5] в торе с помощью численного решения на ЭВМ уравнений идеальной МГД. Показано, что при достаточно большой проводимости плазмы этот процесс приводит к образованию волокнистой структуры магнитных поверхностей.

Для описания процесса выбрана модель цилиндра с отождествленными торцами. Предполагается, что при развитии неустойчивости сохраняется винтовая симметрия, т.е. все физические величины зависят от координат r , $\theta = \varphi - \alpha z$ и времени t . В качестве исходной равновесной конфигурации выбрана цилиндрическая конфигурация с параболическим распределением продольного тока $j_z = 2\mu_0(1 - r^2/a^2)$ и однородным продольным магнитным полем $B_z = 1$. Плазма предполагается окруженной идеально проводящим экраном при $r = a = 1$, на котором удовлетворяются граничные условия

$$v_r = B_r = 0, \quad j_z = j_\varphi = 0.$$

Задача решалась при задании начальных возмущений магнитного поля \mathbf{B} или скорости \mathbf{v} , удовлетворяющих условию $\text{div } \mathbf{B} = 0, \text{div } \mathbf{v} = 0$,

$$\tilde{B}_r = \lambda r (1 - r^2) \sin 2\theta, \quad \tilde{B}_\varphi = \lambda r (1 - 2r^2) \cos 2\theta, \quad \tilde{B}_z = 0, \quad \lambda = 0,1, \quad (1)$$

$$\tilde{v}_r = -\lambda r (1 - r^2) \cos 2\theta, \quad \tilde{v}_\varphi = \lambda r (1 - 2r^2) \sin 2\theta, \quad \tilde{v}_z = 0, \quad \lambda = 0,1. \quad (2)$$

Уравнения идеальной МГД для проводящей плазмы имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S = \frac{\mathbf{v}}{\rho T} \cdot \mathbf{j}^2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}[\mathbf{v} \mathbf{B}] = -\text{rot } \mathbf{v} \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \quad (4)$$

\mathbf{B} – магнитное поле, \mathbf{v} – скорость, ρ – плотность, p – давление, S – энтропия, $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, \mathbf{v} – магнитная вязкость, T – температура. При заданных граничных условиях и $\mathbf{v} = \text{const}$ эта система имеет два интеграла, выражающих законы сохранения энергии и продольного потока:

$$\int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + \frac{B^2}{2} \right) dV = \text{const}, \quad \int B_z dV = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь $\epsilon = W - p/\rho$ – внутренняя энергия, W – энтальпия, $dW = TdS + dp/\rho$.

В данной работе уравнение для S заменялось модельным соотношением $p = c\rho$.

* Совместно с Н.И. Герлах, Н.М. Зуевой и А.И. Морозовым // Письма в ЖТФ. 1975. Т. 1. С. 1016–1019.

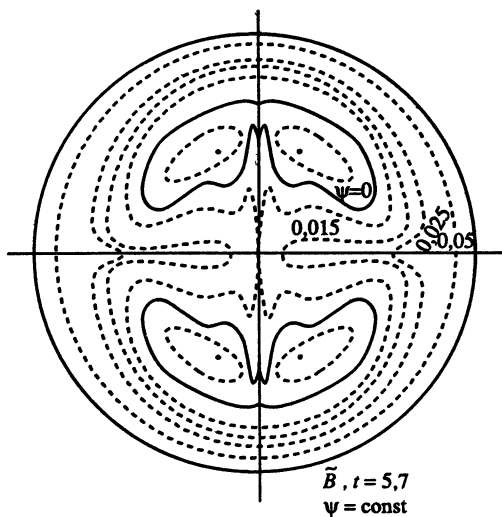


Рис. 1

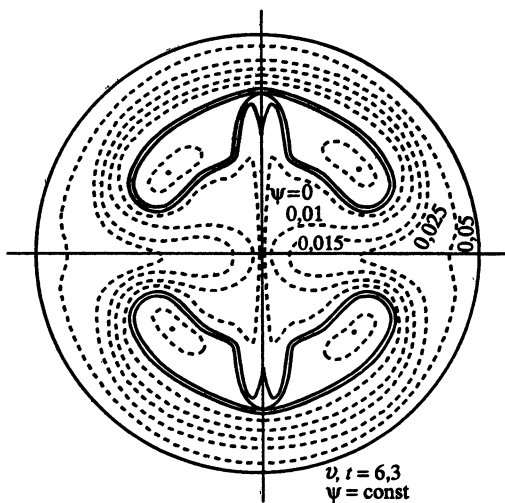


Рис. 2

Функция магнитных поверхностей $\psi = A_z + \alpha r A_\phi$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = -v (j_z + \alpha r j_\phi). \quad (6)$$

Рассматриваемая неустойчивость развивается при выполнении резонансного условия $\mu = \alpha$ при $r < a$, где $\mu = B_\phi / (r B_z)$ для равновесной конфигурации. Скорость процесса развития растет при увеличении α и λ . В данной задаче было принято $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1,1$.

Показана возможность радикальной перестройки магнитной конфигурации в результате развития МГД-неустойчивости при сохранении винтовой симметрии. При этом сечения магнитных поверхностей, которые в равновесном состоянии представляли собой систему вложенных окружностей, приобретают развитую волокнистую структуру. При одинаковых начальных возмущениях $B(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ получающиеся картины сечений топологически эквивалентны (рис. 1, 2). Характерное альфвеновское время процесса $\tau = \rho \alpha / B_\phi$. При развитии неустойчивости происходит существенное увеличение скоростей v и энергии продольного поля $\frac{1}{2} \int B_z^2 dV$. Источником

энергии служит азимутальное поле, энергия которого $\frac{1}{2} \int B_\phi^2 dV$ падает. Последнее обстоятельство приводит к падению индуктивности и напряжения.

Для образования особых точек семейства линий $\psi(r, \theta) = \text{const}$ необходимо наличие диссипативных членов в уравнении (6), однако определяющим является член $v \nabla \psi$. Образующаяся картина расщепленных магнитных поверхностей при достаточно малой вязкости ν не зависит от величины ν и может быть получена, в частности, за счет "машинной вязкости" счета. Увеличение ν приводит к диссипации магнитного поля, причем в зависимости от величины ν эта диссипация может происходить как до, так и после образования волокнистой структуры.

Таким образом, существует критическое значение $\nu_{\text{кр}}$ при превышении которого расщепление не происходит. В окрестности оси $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ образуется узкий слой с

резко спадающей плотностью. Для поведения магнитного поля в нем характерно изменение знака компоненты B_r при переходе через ось $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Последнее соответствует большому току j , текущему в этом слое. Образующийся слой, по-видимому, похож на нейтральные токовые слои, изучаемые С.И. Сыроватским и др. [6].

Получающаяся структура сечений магнитных поверхностей близка к структуре сечений в равновесных плазменных конфигурациях, обладающих винтовой симметрией [7, 8]. Явление топологической перестройки магнитных поверхностей, очевидно, играет весьма важную роль в процессе развития неустойчивости в плазме, поскольку оно с необходимостью должно приводить к аномально большой диффузии заряженных частиц плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б.Б. // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132.
2. Соловьев Л.С. // Там же. Вып. 3. С. 245.
3. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1973. Т. 2. С. 575.
4. Герлах Н.И., Зуева Н.М. Результаты расчета динамики винтовой МГД-неустойчивости. М., 1974. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 91).
5. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. О винтовой неустойчивости плазменного шнура. М., 1974. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 89).
6. Сыроватский С.И. // Нейтральные токовые слои в плазме. М.: Наука, 1974. (Тр. ФИАН; Т. 74).
7. Зуева Н.М. Изучение строения замкнутых магнитных конфигураций численными методами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1970.
8. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1967. Вып. 5. С. 92.

ИЗМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ*

Движение плазмы, возникающее в результате развития МГД-неустойчивости, приводит к существенным изменениям топологии магнитного поля. В работе [1] путем численного счета на ЭВМ показано, что при достаточно высокой проводимости σ образуется волокнистая структура магнитных поверхностей, а также "инверсные слои", в которые поперечное магнитное поле изменяет знак. В настоящей работе возникновение этих эффектов исследуется аналитическими методами.

1. Изменение магнитного поля \mathbf{B} при заданной скорости плазмы \mathbf{v} определяется уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{vB}] = -\text{rot } \mathbf{vj}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad (1)$$

где $\nu = c^2/(4\pi\sigma)$ – магнитная вязкость.

При наличии винтовой симметрии, когда в цилиндрической системе координат r, φ, z имеется зависимость только от r и $\theta = \varphi - \alpha z$, $\alpha = \text{const}$, уравнения (1) сводятся к двум уравнениям для $\psi = A_z + \alpha r A_\varphi$ и B_z . Если ограничиться случаем $\text{div } \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} = \text{const}$,

* Совместно с Н.М. Зуевой // Письма в ЖТФ. 1975. Т. 1. С. 1117–1122.

$v_z = 0$, то эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = v(\Delta \psi - 2\alpha B_z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla B_z = v \Delta B_z. \quad (3)$$

Компоненты магнитного поля выражаются через ψ и B_z соотношениями

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \alpha r B_z - B_\phi = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4)$$

Аналогично выражаются j_r и j_ϕ через функцию $I = B_z + \alpha r B_\phi$, а также v_r и v_ϕ через функцию потока ψ_0 , если $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Из уравнения (3) следует, что однородное в начальный момент магнитное поле $B_z = \text{const}$ при сделанных предположениях не изменяется во времени.

2. Форма магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ в общем случае описывается уравнением (2). Рассмотрим сначала предельный случай бесконечной проводимости ($v \rightarrow 0$), тогда имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = 0. \quad (5)$$

Следует отметить, что этому же уравнению удовлетворяет энтропия S для бездиссипативных процессов, а также плотность ρ при условии $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Общим решением уравнения (5) является произвольная функция интегралов его характеристик $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}$, $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}$. В случае $\psi_0 = \psi_0(r, \theta)$ первым интегралом будет $\psi_0 = \text{const}$. Второй интеграл легко находится, если ψ_0 представлено одной гармоникой по θ :

$$\psi_0 = \frac{\omega}{2m} r^2 (1 - r^2) \sin m\theta. \quad (6)$$

Соответствующее распределение скоростей удовлетворяет граничному условию $v_r(1, \theta) = 0$, причем $\omega = 3\sqrt{3} |v_r|_{\text{max}}$.

При заданной начальной функции $\psi(r, \theta, 0) = f(r^2)$ решение уравнения (5) имеет вид

$$\psi = f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\lambda}}{2} \text{sn} \left(F(\varphi, k) - \frac{\omega t}{2} \sqrt{1+\lambda} \right) \right\}, \quad (7)$$

где $\text{sn}(u)$ – эллиптическая функция Якоби, $F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл,

$$\sin \varphi = \frac{2r^2 - 1}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad k^2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{8m\psi_0}{\omega} = 4r^2(1-r^2) \sin m\theta, \quad r = \frac{\omega t}{2} \sqrt{1+\lambda}.$$

Выражение (7) представляется в форме

$$\psi = f \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \frac{(2r^2 - 1)\sqrt{1+\lambda} \text{cn } \tau \text{dn } \tau - 4 \text{sn } \tau r^2(1-r^2) \cos m\theta}{1+\lambda - \text{sn}^2 \tau (2r^2 - 1)^2} \right), \quad (8)$$

где $\text{cn } \tau$, $\text{dn } \tau$, $\text{sn } \tau$ – эллиптические функции Якоби. Величину ψ можно выразить в элементарных функциях, если воспользоваться грубой аппроксимационной формулой

$$\text{sn } u \approx k^2 \text{th } u + (1 - k^2) \sin u,$$

справедливой при $1 - k^2 \ll 1$, $k^2 \ll 1$ и $u \ll 1$.

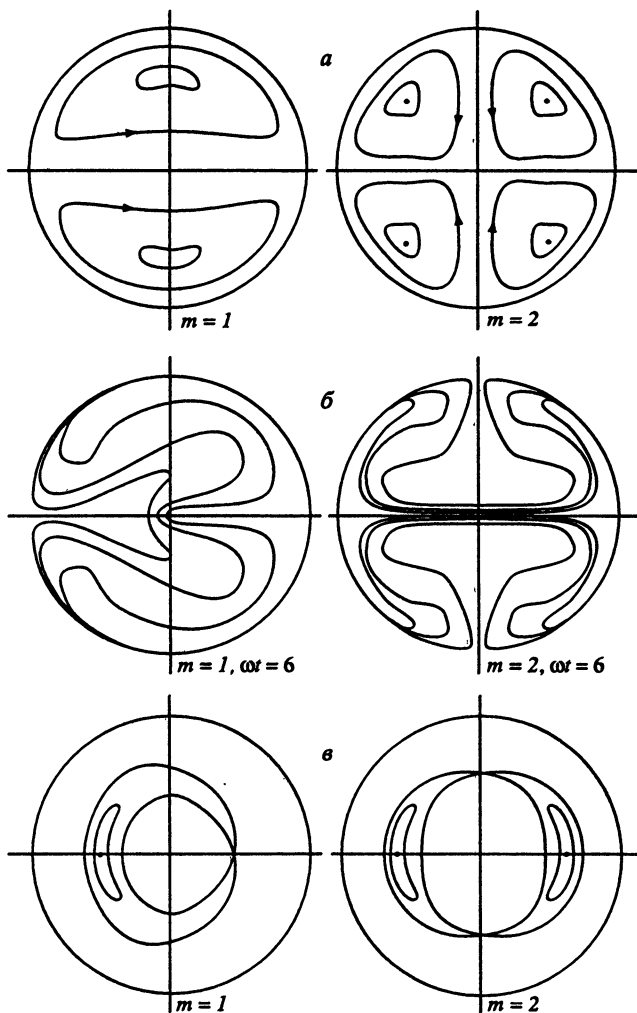


Рис. 1

Для $r^2 \ll 1$ получаем очень простую формулу

$$\psi = f(r^2 \operatorname{ch} \omega t - r^2 \operatorname{sh} \omega t \cos m\theta), \quad (9)$$

причем это выражение является точным решением для $\psi_0 = \frac{\omega}{2} r^2 \sin m\theta$. Таким образом, если скорости не меняются во времени, то магнитное поле изменяется экспоненциально с инкрементом ω , пропорциональным амплитуде скорости. При этом существенно изменяется распределение продольного тока j_z и электрического поля $\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{vB}]$:

$$j_z = 2\alpha B_z - \Delta\psi, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \mathbf{e}_z - B_z \nabla\psi_0 \right). \quad (10)$$

На рис. 1, а показаны линии тока плазмы в сечении r, θ , определяемые формулой (6) для $m = 1, 2$. На рис. 1, б приведены сечения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ при

$\omega t \gg 1$, соответствующие начальному однородному току $j_z = 2\mu$ и $B_z = \text{const}$, когда $f(r^2) = B_z(\alpha - \mu)r/2$. Так же ведут себя и линии равной плотности $\rho = \text{const}$, если начальное распределение ρ – параболическое: $\rho = \rho_0(1 - r^2)$. Характерно образование сложной структуры магнитных поверхностей и инверсных слоев с большей плотностью ρ .

3. При большой, но конечной проводимости происходит расщепление магнитных поверхностей и образование волокнистой структуры, характеризующейся наличием эллиптических и гиперболических точек в сечении r, θ . Действительно, при малых v и v решение уравнения (2) можно получить методом разложения по степеням t . Для рассматриваемой задачи найдем

$$\begin{aligned} \psi = f - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - v(\Delta f - 2\alpha B_z) \right\} t + \left\{ \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - v\Delta f \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} - v\Delta \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - v\Delta f \right) \right\} \frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Исследование этого решения, справедливого при малых ωt , показывает, что при $v \neq 0$ магнитные поверхности расщепляются в окрестности резонансной окружности $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Индекс возникающих особых точек $J_{nv} = \psi_{rr}\psi_{\theta\theta} - \psi_{r\theta}^2$ пропорционален v :

$$J_{nv} = -vt^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)^2 \frac{\partial^3 v_r}{\partial r \partial \theta^2}. \quad (12)$$

Начальные расщепления магнитных поверхностей отдельными гармониками скорости $m = 1, 2$ показаны на рис. 1, в.

4. Рассмотрим в заключение аксиально-симметричную задачу при наличии лишь одной компоненты магнитного поля $B = B_\phi$. Если $\text{div } v = 0$, то ρ и B_ϕ удовлетворяют уравнению непрерывности (5). При скоростях $v_\phi = 0$, $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}$, $v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}$, соответствующих функции потока

$$\psi_0 = \frac{\omega r^2}{2} \sin z, \quad (13)$$

решение уравнения (5) для начальных распределений $\rho = f_\rho(r^2)$ и $B_\phi = f_B(r^2)$ дает

$$\rho = f_\rho(r^2 \text{ch } \omega t - r^2 \text{sh } \omega t \cos z), \quad B_\phi = f_B(r^2 \text{ch } \omega t - r^2 \text{sh } \omega t \cos z). \quad (14)$$

В случае $p = p_0(\rho/\rho_0)$ уравнению равновесия $\nabla p = [\mathbf{jB}]$ удовлетворяют начальные распределения

$$\rho = \rho_0 e^{-r^2/a^2}, \quad B_\phi = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{2p_0}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(1 + \frac{\gamma r^2}{a^2}\right) e^{-\gamma r^2/a^2}}. \quad (15)$$

На рис. 2 показаны линии потока для скоростей $\psi_0 = \text{const}$ (а), линии равной плотности $\rho = \text{const}$ (б) и линии электрического тока $rB_\phi = \text{const}$ (в) при $\omega t \gg 1$. Напряженность электрического поля $\mathbf{E} = \frac{B_\phi}{cr} \nabla \psi_0$. Таким образом, заданные скорости приводят к образованию сужающейся перетяжки, в которой экспоненциально нарастают плотность плазмы, ток и электрическое поле.

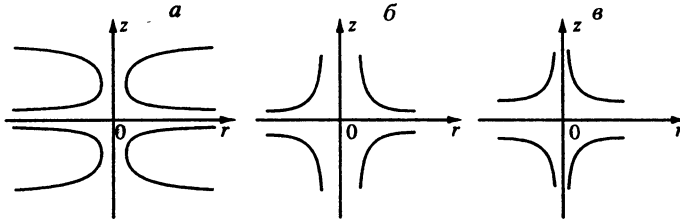


Рис. 2

5. В настоящей работе сделаны два основных допущения: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$.

Согласно первому предполагается, что плазма движется как несжимаемая жидкость. Второе условие соответствует развитию неустойчивости с малым инкрементом. Действительно, если ψ_0 содержит множитель $\operatorname{ch} \Omega t$, то все вытекающие из уравнения

(5) результаты не изменяются, если заменить t на $\frac{1}{\Omega} \operatorname{sh} \Omega t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. О развитии винтовой МГД-неустойчивости. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 74).

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЕННЫХ ШНУРОВ*

В настоящее время детально развита линейная теория устойчивости плазменных конфигураций. Однако еще со времен работ Ляпунова по устойчивости гравитирующих масс известно, что линейное приближение достаточно только в случаях, когда частота ω является комплексной величиной. Если же ω – вещественная (так называемый "нейтральный случай"), то линейного приближения недостаточно для решения вопроса об устойчивости при сколь угодно малом начальном возмущении [1]. Проблема устойчивости равновесных плазменных конфигураций при идеальной проводимости относится именно к этому "нейтральному случаю". Тем не менее в теории устойчивости плазменных конфигураций этот вопрос не обсуждался. Представляется естественным интерес к нелинейным стадиям эволюции возмущенного плазменного шнура (см., например, [2, 3]). В связи с этим авторами совместно с Герлах был проведен численный расчет [4–6] на ЭВМ эволюции прямых плазменных шнуров под действием начального возмущения скорости

$$v_{r0} = \lambda r^{m-1} (1 - r^2) \cos m\theta, \quad v_{\phi 0} = -\lambda r^{m-1} \left(1 - \frac{m+2}{m} r^2\right) \sin m\theta, \quad (1)$$

удовлетворяющего условию $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$. Здесь $\theta = \phi - \alpha z$, $\alpha = 2\pi/L$, $m = 2$, $v_{z0} = 0$.

Рассчитывалась система МГД-уравнений идеальной плазмы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{B}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [\mathbf{j} \mathbf{B}],$$

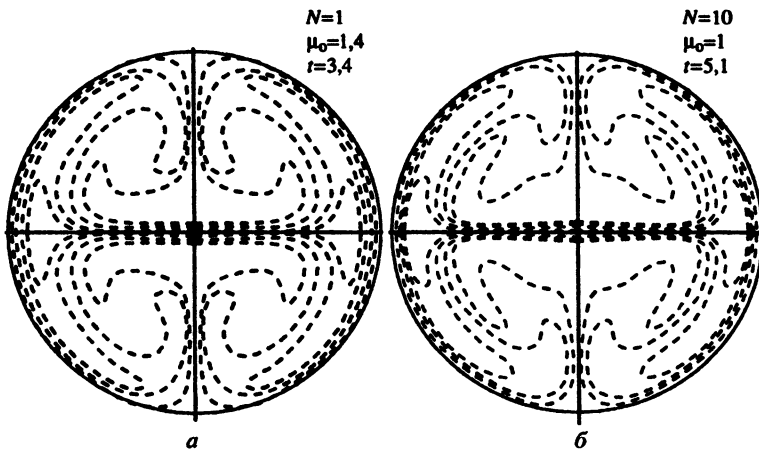


Рис. 1. Сечения магнитных поверхностей

* Совместно с Н.М. Зуевой и А.И. Морозовым // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. С. 284–288.

где $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$, $p = \rho^{\gamma} \exp s$, в предположении винтовой симметрии процесса (независимые переменные r , θ , t). Исходная равновесная конфигурация задавалась безразмерными параметрами

$$B_{z0} = 1, \quad j_{z0} = 2\mu_0(1 - r^{2N}), \quad N = 1; 10. \quad (3)$$

Случай $N = 1$ соответствует параболическому распределению тока, а случай $N = 10$ – квазиоднородному. В процессе расчета выяснилось, что при определенных "резонансных" параметрах μ_0/α все рассмотренные конфигурации "рассыпались" спустя несколько единиц времени (рис. 1), хотя амплитуды возмущения скорости (измеряемые в альфвеновских единицах) брались достаточно малыми ($\lambda = 10^{-1}$; 10^{-2}).

Согласно классической линейной теории устойчивости рассматриваемые конфигурации при данных возмущениях являются устойчивыми, поскольку приращение потенциальной энергии [7] $\delta W > 0$ (рис. 2).

Чтобы понять обнаруженные странные явления, будем искать решение системы (2) не методом линеаризации, при котором отбрасываются нелинейные члены, а следуя Трубникову [8], методом разложения всех параметров в ряды по степеням времени t :

$$a = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots$$

При этом получается следующее выражение для изменения во времени кинетической энергии плазменной конфигурации:

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \int \rho_0 v_0^2 \, d\tau + \frac{t^2}{2} \int \rho_0 v_0 v_2 \, d\tau + \frac{t^4}{6} \int (\rho_0 v_2^2 + O(v_0^4)) \, d\tau + \dots = \\ &= W_{k0} - t^2 \lambda^2 A_2 + t^4 \lambda^2 A_4 + O(t^4 \lambda^4) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\rho_0 v_2 = \nabla(v_0 \nabla p_0 + \gamma p_0 \text{div } v_0) + [\mathbf{j}_1 \mathbf{B}_0] + [\mathbf{j}_0 \mathbf{B}_1], \quad \mathbf{B}_1 = \text{rot } [v_0 \mathbf{B}_0].$$

Выражение для второго члена в (4) полностью совпадает с классическим функционалом δW потенциальной энергии линейной теории [7; 8] ($\xi = v_0 t$). Следовательно, в линейном приближении, если $A_2 > 0$, то конфигурация устойчива относительно данного начального возмущения, если же $A_2 < 0$, то – неустойчива. Как видно из выражения (4), третий член $\sim \lambda^2 t^4$ всегда положителен и в тех случаях, когда A_2 мало ("резонансы"), становится определяющим. Таким образом, мы приходим к выводу, что даже устойчивая в линейном приближении система ($A_2 > 0$) при сколь угодно малом возмущении ($\lambda \rightarrow 0$) теряет устойчивость при

$$t > t_0 = \sqrt{A_2 / (2A_4)}. \quad (5)$$

Анализ выражения для t_0 показывает, что в случае равновесной конфигурации (3) с квазиоднородным током ($N \gg 1$) при начальном возмущении (1) с $m = 2$ в окрестности резонанса $\mu_0 = \alpha$ $t_0 \approx |\alpha - \mu_0| / (2\mu_0^2)$. Разумеется, при достаточно больших временах существенную роль будут играть отброшенные члены разложения по t . Однако, как уже отмечалось выше, численный счет однозначно указывает на развитие неустойчивости, разрушающей начальную структуру шнура (см. рис. 1). На-

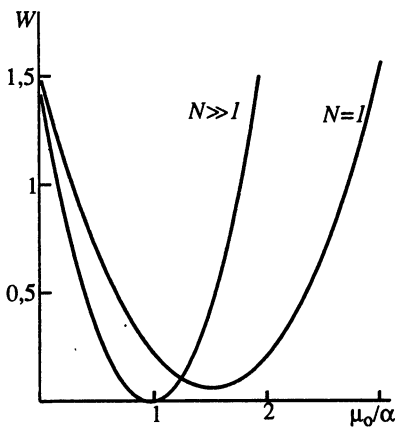


Рис. 2. Потенциальная энергия приближения для $N = 1$ и $N \gg 1$

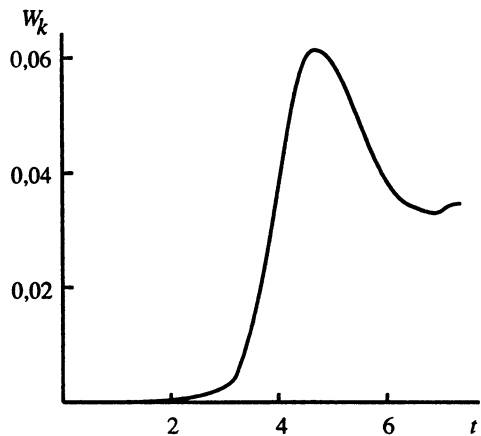


Рис. 3. Кинетическая энергия W_k для $N = 1$, $\mu_0 / \alpha = 1,4$, $\lambda = 0,01$

глядной иллюстрацией проведенного рассмотрения является вычисленный на ЭВМ путем интегрирования системы (2) ход W_k со временем, изображенный на рис. 3. Видно, что в соответствии с (4) величина W_k сначала медленно падает, поскольку $A_2 > 0$, а затем начинает быстро расти.

Представляет интерес отметить, что рассмотренная нелинейная неустойчивость развивается в основном за счет тепловой энергии плазмы. Действительно, при $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$ (что является условием минимизации δW) выражение для W_T , вычисленное аналогично W_k , имеет вид

$$W_T = \int \frac{p_0 d\tau}{\gamma - 1} - \frac{t^4}{8} \int \{ \rho_0 v_2^2 - v_2 ([j_1 \mathbf{B}_0] + [j_0 \mathbf{B}_1]) \} d\tau. \quad (6)$$

Поскольку полная энергия сохраняется ($W_k + W_T + W_B = \text{const}$), то согласно (4) и (6) в классическом линейном приближении на развитие неустойчивости расходуется только магнитная энергия W_B . Однако в окрестности $\min \delta W$, если основной вклад в развитие неустойчивости дают члены $\sim t^4$ и можно пренебречь величиной \mathbf{B}_1 , получаем качественно другой результат. А именно, при этом

$$\delta W_T = - \frac{t^4}{8} \int \rho_0 v_2^2 d\tau = - \int p_1 \text{div } \mathbf{v}_2 d\tau, \quad (7)$$

т.е. 3/4 вклада в δW_k дает тепловая энергия и 1/4 – магнитная энергия.

Таким образом, мы показали существование принципиально нелинейных неустойчивостей прямых плазменных шнуров, развивающихся при сколь угодно малых начальных возмущениях. Непосредственный перенос полученных результатов на тороидальный случай представляется неправомерным в силу неучета ряда важных факторов, присущих тороидальным конфигурациям ($\min B$, центробежные эффекты, неоклассическая диффузия и т.п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов М.А.* Общая задача об устойчивости движения. М.: ОНТИ, 1935.
2. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 45. С. 4.
3. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* // Там же. 1973. Т. 65. С. 2.
4. *Герлах Н.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С.* О развитии винтовой МГД-неустойчивости. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 74).
5. *Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С.* Винтовая МГД-неустойчивость идеальной плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 96).
6. *Зуева Н.М., Соловьев Л.С.* Эволюция магнитного поля при винтовом течении плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 95).
7. *Bernstein I.B.* // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
8. *Trubnikov V.A.* // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 184.

НЕЛИНЕЙНАЯ ВИНТОВАЯ МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТЬ*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для изучения развития во времени винтовой неустойчивости плазмы используется система МГД-уравнений [1] для идеального газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S \right) = \mathbf{v} \mathbf{j}^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} ([\mathbf{v} \mathbf{B}] - \mathbf{v} \mathbf{j}), \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + [\mathbf{j} \mathbf{B}]. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, T – температура, p – давление, S – энтропия, \mathbf{B} – магнитное поле, $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ – плотность тока, $\nu = c^2/(4\pi\sigma)$ – магнитная вязкость.

Связь параметров p , ρ и T задается уравнением состояния и термодинамическими соотношениями

$$G = \mathcal{E} + p/\rho, \quad dG = T dS + dp/\rho,$$

где \mathcal{E} – внутренняя энергия, G – энтальпия. Для идеального газа с уравнением состояния $p = \rho T$, $\mathcal{E} = T/(\gamma-1)$, $G = \gamma T/(\gamma-1)$, $S = (\ln p \rho^\gamma)/(\gamma-1)$. Вместо энтропии удобно использовать величину $K = p \rho^{-\gamma}$, тогда уравнение (2) заменится на

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla K = \frac{\gamma-1}{\rho^\gamma} \mathbf{v} \mathbf{j}^2. \quad (2a)$$

Винтовая неустойчивость является одной из наиболее опасных МГД-неустойчивостей в тороидальных плазменных конфигурациях с винтовыми магнитными силовыми линиями. При численном счете задачи о развитии винтовой неустойчивости мы ограничиваемся моделью плазменного цилиндра с отождествленными торцами $z = 0, 2\pi$, окруженного при $r = 1$ идеально проводящей оболочкой.

При условии сохранения винтовой симметрии задачи, когда в цилиндрической системе координат r, φ, z все величины зависят только от двух пространственных переменных r и $\theta = \varphi - \alpha z$, можно ввести функцию потока $\psi = A_z + \alpha r A_\varphi$ ($\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$),

$$r B_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \alpha r B_z - B_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5)$$

определяющую семейство винтовых магнитных поверхностей $\psi(r, \theta, t) = \text{const}$. Сог-

* Совместно с Н.М. Зуевой // Магнит. гидродинамика. 1977. Т. 3. С. 5–22.

ласно (3) функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = -v(j_z + \alpha r j_\varphi). \quad (6)$$

Для контравариантных компонент $B^k = \mathbf{B} \mathbf{e}^k$ уравнение (3) можно представить в дивергентной форме¹

$$\frac{\partial B^k}{\partial t} + \text{div}(B^k \mathbf{v} - v^k \mathbf{B} - v[\mathbf{e}^k \mathbf{j}]) = 0. \quad (7)$$

Для плазмы, находящейся внутри идеально проводящей оболочки, на которой удовлетворяются граничные условия

$$v_n = 0, \quad B_n = 0, \quad j_t = 0, \quad (8)$$

из (7) вытекают законы сохранения магнитных потоков

$$\langle B^k \rangle = \text{const}, \quad (9)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по объему плазмы. Кроме того, уравнения (1) – (4) содержат законы сохранения массы и полной энергии, равной сумме кинетической, магнитной и тепловой:

$$\langle \rho \rangle = \text{const}, \quad \left\langle \frac{\rho v^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{p}{\gamma - 1} \right\rangle = \text{const}. \quad (10)$$

Основными ограничениями в численном счете являются использование уравнений (1) – (4) для идеального газа и предположение о сохранении винтовой симметрии. В рамках этих ограничений мы будем рассматривать задачу о временном развитии неустойчивости при заданных начальных возмущениях.

2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В линейном приближении по скоростям система (1) – (4) для идеально проводящей плазмы $\mathbf{v} = 0$ приводится к виду

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\text{div} \rho \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla p - \gamma p \text{div} \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{Q}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \mathbf{L} \mathbf{v}, \quad \mathbf{L} \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \{ \nabla(\mathbf{v} \nabla p + \gamma p \text{div} \mathbf{v}) + \text{rot} [\mathbf{Q} \mathbf{B}] + [\mathbf{j} \mathbf{Q}] \}. \quad (12)$$

Здесь ρ , p , \mathbf{j} , \mathbf{B} – соответствующие невозмущенные величины, знаком \sim обозначены возмущения, $\mathbf{Q} = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}]$, $\nabla p = [\mathbf{j} \mathbf{B}]$.

В случае цилиндрической равновесной конфигурации азимутальными собственными функциями линеаризованного уравнения (12) являются тригонометрические функции $m\theta = m\varphi - m\alpha z$. При этом заданная в начальный момент отдельная гармоника скорости \mathbf{v} :

$$v_r^0 = f_r(r) \cos m\theta, \quad v_\varphi^0 = f_\varphi(r) \sin m\theta, \quad v_z^0 = f_z(r) \sin m\theta \quad (13)$$

сохраняет свою зависимость от θ и далее.

¹ В цилиндрической системе координат $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_\varphi/r$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_z$.

Для нахождения собственных функций зависимость скорости от времени предполагается $\sim \cos \omega t$. Это позволяет выразить v_ϕ и v_z через v_r . Опуская множители $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$, получаем

$$v_{\parallel} = \frac{y}{ms} \left(B_{\parallel} D - \frac{2\alpha B_{\phi} \xi}{r} \right), \quad v_t = -\frac{m\gamma p}{\rho\omega^2} D, \quad (14)$$

$$D = \frac{\rho\omega^2}{m^2\beta} \frac{sr\xi' - 2\alpha B_{\phi} B_{\parallel} \xi / r}{\gamma p y^2 - (B^2 + \gamma p)\rho\omega^2 m^{-2} + \rho^2\omega^4 r^2 / (m^4\beta)}. \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения $\xi = rv_r$, $y = \alpha B_z - B_{\phi}/r$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, $s = \rho\omega^2/m^2 - y^2$, $a_{\parallel} = a_z + \alpha r a_{\phi}$, $a_{\perp} = a_{\phi} - \alpha r a_z$, $v_t = v_z B_z + v_{\phi} B_{\phi}$, $D = \text{div } v$.

Величина, стоящая в знаменателе выражения (15), пропорциональна

$$\Gamma = (u^2 - c_T^2)(u^2 - B_x^2/\rho) - u^2 B_y^2/\rho,$$

где $u = \omega r / (m\sqrt{\beta})$, $c_T^2 = \gamma p/\rho$, $B_x = B_{\perp}/\sqrt{\beta}$, $B_y = B_{\parallel}/\sqrt{\beta}$. Она обращается в нуль при частотах ω , соответствующих фазовым скоростям быстрой и медленной магнитозвуковых волн [1]:

$$u = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{B^2}{\rho} + c_T^2 + \frac{2B_x c_T}{\sqrt{\rho}}} \pm \sqrt{\frac{B^2}{\rho} + c_T^2 - \frac{2B_x c_T}{\sqrt{\rho}}} \right\}. \quad (16)$$

В знаменателе выражения (14) для v_{\parallel} имеется также величина $s \sim u^2 - B_x^2/\rho$, которая обращается в нуль при частоте, соответствующей альфвеновской волне.

Подстановка (15) в (12) приводит к уравнению для радиальных собственных функций $r v_r = f(r) \cos m\theta$ вида [2]

$$\left(\frac{rs}{1 - \kappa \beta} \right)' - \left\{ \frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 y^2 B_{\phi}^2}{r\beta s} + \left(\frac{q + \kappa B_{\phi}^2 / r^2}{1 - \kappa} \right)' + \frac{\kappa}{1 - \kappa} \frac{\beta}{rs} \left(q + \frac{B_{\phi}^2}{r^2} \right)^2 \right\} f = 0, \quad (17)$$

где

$$q = \frac{2yB_{\phi}}{r\beta} + \frac{B_{\phi}^2}{r^2}, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{\beta m^2}{\rho r^2 \omega^2} \left(B^2 + \frac{\gamma p s m^2}{\rho\omega^2} \right).$$

Величина $1 - \kappa \sim \Gamma$, так что в уравнении (17) имеются сингулярные точки $1 - \kappa = 0$, соответствующие магнитозвуковым резонансам, и точка $s = 0$, соответствующая альфвеновскому резонансу. В пределе $\omega \rightarrow 0$ остается альфвеновский резонанс и резонанс на медленной магнитозвуковой волне.

Уравнение для несжимаемой жидкости получается из (17) предельным переходом $\kappa \rightarrow 0$:

$$\left(\frac{rs}{\beta} f' \right)' - \left(\frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 y^2 B_{\phi}^2}{r\beta s} + q' \right) f = 0. \quad (18)$$

Здесь осталась лишь альфвеновская сингулярность $s = 0$.

Рассматриваемая равновесная конфигурация является неустойчивой, если существует собственная функция $f(r)$ (удовлетворяющая уравнению (17) и граничным условиям $f(0) = f(a) = 0$) при мнимой частоте ω .

Можно выделить два типа решений уравнения (17), приводящих к неустойчивости. Действительно, если ограничиться исследованием решений с $\omega^2 \rightarrow 0$, т.е. в окрестности границы области устойчивости $\omega = 0$, то уравнение (17) примет вид

$$\left(\frac{rs}{\beta} f'\right)' - \left\{ \frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 y^2 B_\Phi^2}{r \beta s} + q' + \frac{\kappa \beta}{rs} \left(q + \frac{B_\Phi^2}{rs} \right)^2 \right\} f = 0. \quad (17a)$$

Рассмотрим решения, локализованные в окрестности резонансного радиуса r_s , где $y(r_s) = 0$. При этом имеются два различных случая: $y^2 \gg |\rho \omega^2 / m^2|$ и $y^2 \ll |\rho \omega^2 / m^2|$.

В первом случае уравнение (17) переходит в уравнение (18) для несжимаемой жидкости, и в окрестности $y = B_z(\alpha - \mu) = 0$ получаем

$$f'' - \left\{ \frac{m^2 \beta}{r^2} + \frac{2\mu^2 p'}{r B_z^2 \mu'^2} \frac{1}{(r - r_s)^2} \right\} f = 0, \quad (19)$$

где $\mu = B_\Phi / (r B_z)$, $\mu(r_s) = \alpha$. Из уравнения (19) вытекает необходимое условие устойчивости Сайдема [3]

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{2p'}{r B_z^2} \mu^2 > 0, \quad (20)$$

в котором стабилизирующим фактором при $p' < 0$ является шир ($\mu' \neq 0$). Сайдемовская неустойчивость соответствует резонансу на альфвеновской волне.

Во втором случае (17) сводится к уравнению

$$\left(\frac{\rho r}{\beta} f'\right)' - \left\{ \frac{m^2 p}{r} - \frac{2m^2 B_\Phi^2}{\omega^2 r^2 B^2} \left(p' + \frac{2\gamma p B_\Phi^2 / r}{B^2 + \gamma p} \right) \right\} f = 0, \quad (21)$$

из которого для областей $\mu' = 0$ получаем

$$p' + \frac{2\gamma p B_\Phi^2 / r}{B^2 + \gamma p} > 0 \quad \text{или} \quad - \frac{B^2 + \gamma p}{2r B_z^2} \frac{B_z'}{B_z} > \mu^2. \quad (22)$$

С учетом шири необходимым условием устойчивости будет

$$\frac{\mu'^2}{4} + 2\mu^2 \left(\frac{p'}{r B_z^2} + \frac{2\gamma p \mu^2}{B^2 + \gamma p} \right) > 0. \quad (22a)$$

Существование дополнительных областей устойчивости, обусловленных сжимаемостью плазмы, было показано в работах [4, 5] на основании вариационного принципа.

Если начальное возмущение скорости v^0 содержит конечное число собственных функций, то решение задачи с начальными данными $\mathbf{v} = v^0$, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ можно представить в виде сходящегося ряда по степеням t :

$$\mathbf{v} = v^0 + \frac{t^2}{2} L v^0 + \frac{t^4}{4!} L^2 v^0 + \dots = (\text{ch } t\sqrt{L}) v^0. \quad (23)$$

Для отдельной собственной функции $L v^0 = -\omega^2 v^0$ согласно (23) получаем $\mathbf{v} = v^0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_{mn}$.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Исследования устойчивости в рамках линейного приближения для равновесных конфигураций произвольной геометрии удобно производить с помощью так называемого вариационного принципа [6]. Имея в виду задачу с начальными данными, выведем выражения для потенциальной энергии возмущений δW методом разложения по степеням t [7] и рассмотрим также дальнейшие члены разложения кинетической энергии W_k по степеням t .

Вычисляя частные производные по времени кинетической энергии $W_k = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dt$ и воспользовавшись при этом свойством самосопряженности оператора L : $\int a L b dt = \int b L a dt$ [8] и условием равновесия $\rho dv / dt = -\nabla p + [jB] = 0$ в начальный момент $t = 0$, получим разложение

$$W_k = W_{k0} + W_{k1} \frac{t^2}{2} + W_{k2} \frac{t^4}{4!} + \dots, \quad (24)$$

где

$$W_{k1} = \int \rho v L v dt, \quad W_{k2} = 4 \int \rho (L v)^2 dt, \\ W_{k3} = 4^2 \int \rho L v L^2 v dt, \quad W_{k4} = 4^3 \int \rho (L^2 v)^2 dt, \dots \quad (25)$$

Видно, что четные члены разложения (24) по степеням t^2 всегда положительны.

Аналогично можно получить также разложения тепловой $W_T = \int \frac{p}{\gamma - 1} dt$ и

магнитной $W_B = \frac{1}{2} \int B^2 dt$ энергий, полагая $L = L_T + L_B$, где $\rho L_T v = \nabla(v \nabla p + \gamma p \operatorname{div} v)$, $\rho L_B v = \operatorname{rot} [QB] + [jQ]$. Последовательные члены разложений W_T и W_B выражаются интегралами

$$W_{T1} = - \int \rho v L_T v dt, \quad W_{T2} = -4 \int \rho L v L_T v dt, \dots, \quad (26)$$

$$W_{B1} = - \int \rho v L_B v dt, \quad W_{B2} = -4 \int \rho L v L_B v dt, \dots \quad (27)$$

Первый член разложения (24) определяет приращение кинетической энергии W_k при малых временах t для заданного начального распределения скоростей $v^0(r)$. Выражение для $W_{k1} t^2 / 2$, взятое с обратным знаком, очевидно, дает приращение потенциальной энергии $\delta W = \delta W_T + \delta W_B$. Опуская множитель t^2 , согласно (12) и (25) получаем

$$\delta W = - \frac{1}{2} \int \rho v L v dt = \frac{1}{2} \int \{ Q^2 + [jv]Q + (v \nabla p) \operatorname{div} v + \gamma p (\operatorname{div} v)^2 \} dt. \quad (28)$$

Полученное таким образом выражение (28) совпадает с классическим выражением [6] для потенциальной энергии возмущений в вариационном принципе (если заменить в (28) скорость на смещение).

Для исследования устойчивости в общем случае произвольных тороидальных равновесных конфигураций выражение для δW удобно преобразовать, воспользовавшись при этом натуральной системой координат Хамады [9] $dr = e_i dx^i$, связанной с магнитными поверхностями равновесной конфигурации, где $x^3 = V$ – текущий объем, отсчитываемый от магнитной оси. Величина δW представляется при этом в виде [10, 11]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \{ Q + [je] \xi \}^2 + \gamma p (\operatorname{div} v)^2 - (\Omega + [je]^2) \xi^2 \} dt, \quad (29)$$

где $\xi = v^3$, $e = e_3$. Фигурирующая здесь величина Ω является характеристикой

магнитной ямы. Так же как давление p и характеристика шира S , Ω в общем случае зависит только от V и выражается через производные по V от продольного и азимутального Φ и χ потоков B и соответствующих J и I потоков j :

$$p' = I'\Phi' - J'\chi', \quad \Omega = I'\Phi'' - J'\chi'', \quad S = \chi'\Phi'' - \Phi'\chi''.$$

Через введенные здесь характеристики выражаются критерии устойчивости для произвольных равновесий.

Обобщением критерия Сайдема (20) для равновесных конфигураций произвольной геометрии является необходимый критерий устойчивости Мерсье [10-12]

$$\frac{1}{4}S^2 + M - P > 0, \quad (30)$$

где

$$M = -p' \left\langle \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}'}{|\nabla V|^2} \right\rangle, \quad \mathbf{B}' = \frac{\Omega\mathbf{B} - \mathbf{j}S}{p'},$$

$$P = \left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2,$$

угловыми скобками обозначено усреднение по текущему объему δV слоя.

В натуральной системе координат $x^i = \vartheta, \xi, V$

$$\mathbf{j} = e_1 I' + e_2 J', \quad \mathbf{B} = e_1 \chi' + e_2 \Phi', \quad \mathbf{B}' = e_1 \chi'' + e_2 \Phi'', \quad P = p'^2 \Pi,$$

где

$$\Pi = \left\langle \frac{e_1^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{e_2^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{e_1 e_2}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2.$$

Обобщение критерия (22) для "сильно локализованных" возмущений можно получить, пренебрегая широм ($S \rightarrow 0$) в области локализации возмущений. Полученный таким образом необходимый критерий устойчивости

$$(\gamma p \Omega - p'^2) \left(\left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \Omega + P \right) > 0 \quad (31)$$

совпадает с критерием, выведенным Спейсом [13] для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями ($S \equiv 0$). Так как при $S = 0$ $\Omega = p'\Phi''/\Phi' = p'\chi''/\chi'$, критерий (31) можно записать также в виде

$$\left(\gamma p \frac{\Phi''}{\Phi'} - p' \right) \left(\left\langle \frac{\mathbf{B}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \frac{\Phi''}{\Phi'} + p' \Pi \right) > 0. \quad (32)$$

Условие аналогичного типа, отличающееся от (32) заменой второй скобки на $\langle B^2 \rangle \Phi''/\Phi' + p'$, было ранее получено Кадомцевым [14] также для конфигураций с замкнутыми магнитными силовыми линиями ($S \equiv 0$) при рассмотрении возмущений, постоянных вдоль силовых линий.

Применим теперь критерии (30) и (31) к тору с круговыми сечениями магнитных поверхностей при большом радиусе магнитной оси $R^2 \gg a^2$. В этом случае

$$\Phi' \approx B_z / (2\pi R), \quad \chi' \approx B_\varphi / (2\pi r), \quad |\nabla V| \approx 4\pi^2 Rr,$$

$$S \approx -\frac{r\mu' B_z}{|\nabla V|}, \quad M \approx \frac{p'}{|\nabla V|^4} \left\{ 2rB_z^2 \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) + p' \left(1 + \frac{2}{\mu^2 R^2} \right) \right\},$$

$$P \approx \frac{p'^2}{|\nabla V|^4} \left(1 + \frac{2}{\mu^2 R^2} \right), \quad (33)$$

где $\mu = B_\phi / (rB_z)$, B_z – продольное поле, B_ϕ – поперечное поле, а штрихи означают дифференцирование по расстоянию от магнитной оси r . Отсюда критерий (30) приводится к виду [15]

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{2p'}{rB_z^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) > 0. \quad (34)$$

В отличие от цилиндрической конфигурации здесь при $p' < 0$ появляется область устойчивости, ограниченная условием

$$\mu R < 1 \quad (35)$$

и не зависящая от стабилизации широм. Если $B_z = \text{const}$, а продольный ток распределен по закону $j_z = j_0(1 - r^2/a^2)^{N-1}$, то условие (35) сводится к ограничению

$$\mu(a)R < 1/N, \quad (35a)$$

которое соответствует ограничению на продольный ток $J < 2\pi a^2 B_z / (RN)$.

При $S \rightarrow 0$ в согласии с выражением для M

$$\Omega = \frac{p'}{B^2 |\nabla V|^2} \left\{ 2rB_z^2 \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) + p' \left(1 + \frac{2}{\mu^2 R^2} \right) \right\}.$$

Отсюда критерий устойчивости (31) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left\{ \frac{p'}{rB_z^2} + \frac{\delta \mu^2 R^2}{\delta + \mu^2 R^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) \right\} > 0, \quad (36)$$

где

$$\delta = 2\gamma p / (B^2 + \gamma p).$$

Следует отметить, что при нарушении приведенных выше локальных критериев устойчивости (34) и (36) неустойчивость развивается в окрестности резонансных магнитных поверхностей, на которых магнитные силовые линии замыкаются сами на себя. Эти поверхности определяются условием $\mu R = k/l$, где k – число обходов вокруг магнитной оси, а l – вокруг оси тора. Если возмущение задано одной винтовой гармоникой (13), то условие резонанса $\mu = \alpha$ приводит к равенству $\mu R = n/m$, где целые числа m и n определяют периодичность возмущения по ϕ и z . В торе согласно (34) все резонансы при $\mu R < 1$ оказываются застabilизированными.

При заданных возмущениях легко вычислить их потенциальную энергию. Если выполняется условие $\text{div } \mathbf{v} = 0$, что является условием минимизации δW при рассмотрении возмущений сайдемовского типа, то согласно (28)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{Q}^2 + [\mathbf{jv}]\mathbf{Q}) dt. \quad (28a)$$

Если исходная равновесная конфигурация цилиндрически симметрична, то, задавая возмущение в виде отдельной винтовой гармоники скорости

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \alpha r v_z - v_\phi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \Psi = \frac{1}{m} f(r) \sin m\theta \quad (37)$$

и обозначая через $g(r)$ радиальную зависимость электрического поля $E_r = v_\phi B_z - v_z B_\phi = m^{-1} g(r) \sin m\theta$, получим δW в виде одномерного функционала, зависящего от двух функций $f(r)$ и $g(r)$:

$$\delta W = \frac{\pi L}{2} \int \left\{ \left[rB_\phi \left(\frac{f}{r^2} \right)' + \alpha g \right]^2 + \frac{1}{r^2} (B_z f' + g)^2 + \left(\frac{m^2 y^2}{r^2} - \frac{2j_z B_\phi}{r^3} \right) f^2 \right\} r dr,$$

где L – длина цилиндра.

Дальнейшая минимизация по g приводит к соотношению

$$v_z + \alpha r v_\varphi = -\frac{2\alpha B_\varphi}{m r y} f \sin m\theta, \quad (38)$$

содержащему y в знаменателе, так что для конечных скоростей должно быть $f/y \neq \infty$.

При этом $g = -\beta^{-1} [B_z f' + \alpha r^3 B_\varphi (f/r^2)']$,

$$\delta W = \frac{\pi L}{2} \int \left\{ \frac{r}{\beta} \left(y f' + \frac{2B_\varphi}{r^2} f \right)^2 + \left(\frac{m^2 y^2}{r} - \frac{2j_z B_\varphi}{r^2} \right) f^2 \right\} dr. \quad (39)$$

Уравнение Эйлера для функции $f(r)$, минимизирующей функционал (39), совпадает с уравнением (18) в пределе $\omega \rightarrow 0$. Если вместо условия (38) положить $v_z = 0$, то получим выражение

$$\delta W = \frac{\pi L}{2} \int \left\{ r \left(y f' + \frac{2B_\varphi f}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2 y^2}{r} - \frac{2j_z B_\varphi}{r^2} \right) f^2 \right\} dr, \quad (40)$$

отличающееся от (39) отсутствием β .

Пусть начальное распределение скоростей, удовлетворяющих условиям $v_z = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, задается функцией

$$\Psi = \frac{\lambda}{m} r^m (1 - r^2) \sin m\theta. \quad (41)$$

Тогда для равновесных конфигураций с

$$B_z = 1, \quad j_z = 2\mu_0(1 - r^{2N}) \quad (42)$$

вычисление δW по формуле (40) дает для квазиоднородного тока $N \gg 1$ и параболического тока $N = 1$ соответственно выражения

$$\delta W = \frac{\lambda^2 \pi L y_0^2}{m + 2}, \quad y_0 \equiv \alpha - \mu_0, \quad (43)$$

$$\delta W = \frac{\lambda^2 \pi L}{m + 2} \left\{ y_0^2 + y_0 \mu_0 \frac{m^2 + 2m + 3}{(m + 1)(m + 3)} + \frac{\mu_0^2}{4} \frac{m^2 + 3m + 8}{(m + 3)(m + 4)} \right\}. \quad (44)$$

Графики зависимости δW от μ_0/α приведены и на рис. 1 для $m = 2$, $N \gg 1$ и $N = 1$. Видно, что $\delta W \geq 0$, так что конфигурация (42) устойчива относительно рассматриваемых возмущений (41). Однако если представить начальное распределение скоростей в виде суперпозиции собственных функций, то среди них могут оказаться и неустойчивые. При этом процесс развития неустойчивости при достаточно малых временах можно представить себе на основании разложения (24) кинетической энергии W_k по степеням t^2 . В окрестности минимума $\delta W = -W_{k1}$ определяющим быстро становится член $\sim W_{k2} t^4$, который всегда положителен и приводит к резкому нарастанию W_k . Таким образом, наиболее сильной неустойчивости следует ожидать при μ_0/α , со-

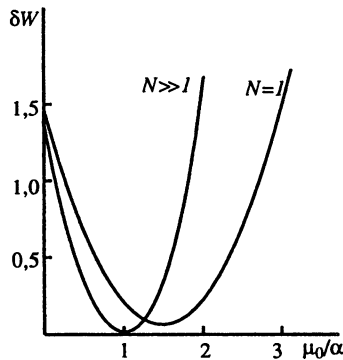


Рис. 1. Потенциальная энергия начальных возмущений δW для $m = 2$

ответствующих $\min \delta W$. Как показывает оценка W_{T2} и W_{B2} , при этом $\frac{3}{4}$ вклада в приращение W_k дает расход тепловой энергии W_T и $\frac{1}{4}$ – расход магнитной энергии W_B .

4. О МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

При развитии неустойчивости растет кинетическая энергия плазмы. Эта энергия может черпаться из тепловой и магнитной энергии токов в плазме. В зависимости от параметров равновесной конфигурации в кинетическую энергию W_k может перейти та или иная доля потенциальной энергии $W = W_T + W_B$, после чего рост W_k должен прекратиться. Мы рассмотрим здесь некоторые ограничения на потоки энергии, вытекающие из законов сохранения массы, энтропии и магнитных потоков. Эти ограничения приводят, в частности, к оценке максимально возможной кинетической энергии неустойчивости, определяющейся параметрами равновесной конфигурации.

В пренебрежении диссипативными процессами уравнение сохранения энтропии (2а) можно представить в виде

$$\frac{\partial p^{1/\gamma}}{\partial t} + \text{div } p^{1/\gamma} \mathbf{v} = 0, \quad (45)$$

откуда следует закон сохранения $\langle p^{1/\gamma} \rangle = \text{const}$.

Минимизируя тепловую энергию при дополнительном условии $\langle p^{1/\gamma} \rangle = \text{const}$, получим неравенство

$$\langle p \rangle \geq \langle p^{1/\gamma} \rangle^\gamma, \quad \gamma \geq 1. \quad (46)$$

Отсюда вытекает ограничение на расход тепловой энергии:

$$W_{T0} - W_T \leq \frac{V}{\gamma - 1} \left(\langle p_0 \rangle - \langle p_0^{1/\gamma} \rangle^\gamma \right), \quad \gamma > 1, \quad (47)$$

или при $\gamma \rightarrow 1$:

$$W_{T0} - W_T \leq V \left(\langle p_0 \ln p_0 \rangle - \langle p_0 \rangle \ln \langle p_0 \rangle \right), \quad \gamma = 1, \quad (47a)$$

где V – объем плазмы, а индексом "0" обозначены равновесные параметры.

Вычисление средних значений для цилиндрической равновесной конфигурации (42) приводит к условию

$$W_{T0} - W_T \leq V \mu_0^2 F(\gamma, N), \quad (47b)$$

причем для $N \gg 1$ $F = 0,055$ при $\gamma = 2$; $F = 0,1$ при $\gamma = 1$, а для $N = 1$ $F = 0,084$ при $\gamma = 2$; $F = 0,15$ при $\gamma = 1$.

Минимизация энергии продольного магнитного поля при условии (9) сохранения магнитного потока $\langle B_z \rangle = \text{const}$ приводит к неравенству

$$\langle B_z^2 \rangle - \langle B_z \rangle^2 \geq 0.$$

Отсюда следует, что убыль энергии продольного поля ограничена условием

$$W_{Bz0} - W_{Bz} \leq \frac{1}{2} V \left(\langle B_{z0}^2 \rangle - \langle B_{z0} \rangle^2 \right). \quad (48)$$

Видно, что энергия однородного поля $B_z = \text{const}$ может только расти и, следовательно, не может давать вклада в приращение кинетической энергии неустойчивости.

Минимизация энергии азимутального магнитного поля при условии (9) сохранения $\langle B_\varphi/r \rangle = \text{const}$ дает

$$\langle B_\varphi^2 \rangle - \left\langle \frac{B_\varphi}{r} \right\rangle^2 \bigg/ \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \geq 0,$$

откуда следует неравенство

$$W_{B_{\varphi 0}} - W_{B_\varphi} \leq \frac{1}{2} V \langle B_{\varphi 0}^2 \rangle. \quad (49)$$

Таким образом, при учетных ограничениях возможен переход всей энергии азимутального поля в остальные виды энергии. Для равновесной конфигурации (42) получим

$$W_{B_0} - W_B \leq V \mu_0^2 \begin{cases} 0,25, & N \geq 1, \\ 0,15, & N = 1. \end{cases} \quad (49a)$$

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Изменение во времени магнитных поверхностей для двухмерной задачи определяется в пренебрежении диссипативными процессами уравнением

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \Psi = 0. \quad (50)$$

Такому же уравнению удовлетворяет энтропия, а при условии $\text{div } \mathbf{v} = 0$ также плотность ρ и $p^{1/\gamma}$. В случае винтовой симметрии при дополнительном условии $u_z = 0$ изменение продольного поля B_z согласно (7) также подчиняется уравнению (50).

Представляет интерес рассмотрение эволюции магнитных поверхностей при заданной скорости $\mathbf{v}(r, t)$. Если пространственное распределение скорости не меняется со временем $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(r) F(t)$ (как это имеет место, например, в линейном приближении для собственных функций), то в ряде случаев удается найти точное решение соответствующей кинематической задачи [16–18]. Будем считать далее $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$, поскольку временной множитель легко исключается изменением масштаба времени t .

При соблюдении винтовой симметрии и условия $\text{div } \mathbf{v} = 0$ распределение скоростей определяется функцией тока $\Psi(r, \theta)$. Общим решением уравнения (50) является произвольная функция интегралов его характеристик

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (51)$$

Первым интегралом в общем случае будет

$$\Psi(r, \theta) = \text{const}. \quad (52)$$

Для нахождения второго интеграла ограничимся заданием отдельных гармоник (37) функции $\Psi(r, \theta)$.

Рассмотрим сначала первую гармонику $m = 1$. Согласно (41) $\Psi = \lambda r (1 - r^2) \sin \theta \equiv \equiv \lambda \Psi_0$, тогда второй интеграл (51) выражается через эллиптический интеграл $F(\varphi, k)$

$$F(\varphi, k) - \tau = \text{const}, \quad (53)$$

где

$$\tau = \lambda \sqrt{\alpha - \gamma} t, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{r^2 - \gamma - 2/3}{\beta - \gamma}}, \quad k^2 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma},$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad \beta = \frac{2}{3} \sin \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$\sin \varepsilon = 1 - \frac{27}{2} \Psi_0^2.$$

Согласно (52) и (53) решение уравнения (50), удовлетворяющее начальному условию $\Psi = \Psi_0(r, \theta)$ при $t = 0$, выражается через эллиптические функции Якоби:

$$\Psi = \Psi_0\left(u, \arcsin \frac{\Psi_0}{u(1-u^2)}\right), \quad u^2 = \frac{2}{3} + \gamma + (\beta - \gamma) \operatorname{sn}^2(F - \tau). \quad (54)$$

Обозначая $s = \operatorname{sn} \tau$, $c = \operatorname{cn} \tau$, $d = \operatorname{dn} \tau$, получим

$$\operatorname{sn}(F - \tau) = \frac{cd \sin \varphi - sr(1-r^2) \cos \theta / [\sqrt{\alpha - \gamma} (\beta - \gamma) \sin \varphi]}{1 - k^2 s^2 \sin^2 \varphi}. \quad (54a)$$

Рассмотрим далее задание скоростей, определяющихся гармоникой $\Psi = \frac{\lambda}{m} r^2 (1-r^2) \sin m\theta \equiv \frac{\lambda \Psi_0}{4m}$. В этом случае второй интеграл (51) имеет вид

$$F(\varphi, k) - \tau = \operatorname{const}, \quad (55)$$

где

$$\tau = \lambda \sqrt{1 + \Psi_0} t, \quad \sin \varphi = \frac{2r^2 - 1}{\sqrt{1 - \Psi_0}}, \quad k^2 = \frac{1 - \Psi_0}{1 + \Psi_0},$$

и, следовательно, решением (50) при начальном условии $\Psi = \Psi_0(r, m\theta)$ будет

$$\Psi = \Psi_0\left(u, \arcsin \frac{\Psi_0}{4u^2(1-u^2)}\right), \quad u^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - \Psi_0}}{2} \operatorname{sn}(F - \tau). \quad (56)$$

Выражение для $\operatorname{sn}(F - \tau)$ представляется в виде

$$k \operatorname{sn}(F - \tau) = \frac{(2r^2 - 1) \sqrt{1 + \Psi_0} cd - 4sr^2(1-r^2) \cos m\theta}{1 + \Psi_0 - (2r^2 - 1)^2 s^2}. \quad (56a)$$

Аналогичное решение для распределения скоростей, имеющего узлы радиальной скорости v_r , можно получить для функции $\Psi = \frac{\lambda}{2\pi m} \sin \pi r^2 \sin m\theta \equiv \frac{\lambda \Psi_0}{2\pi m}$. При этом второй интеграл (51) выражается в виде

$$F(\varphi, k) - \tau = \operatorname{const}, \quad (57)$$

где

$$\tau = \lambda t, \quad \sin \varphi = (1/k) \sin \pi(r^2 - n/2), \quad k^2 = 1 - \Psi_0^2, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

а решением задачи с начальным $\Psi = \Psi_0(r, m\theta)$ будет

$$\Psi = \Psi_0\left(u, \arcsin \frac{\Psi_0}{\sin \pi u^2}\right), \quad u^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin k \operatorname{sn}(F - \tau), \quad (58)$$

причем

$$k \operatorname{sn}(F - \tau) = \frac{cd \sin \pi(r^2 - n/2) - s \sin^2 \pi r^2 \cos m\theta}{1 - s^2 \cos^2 \pi r^2}. \quad (58a)$$

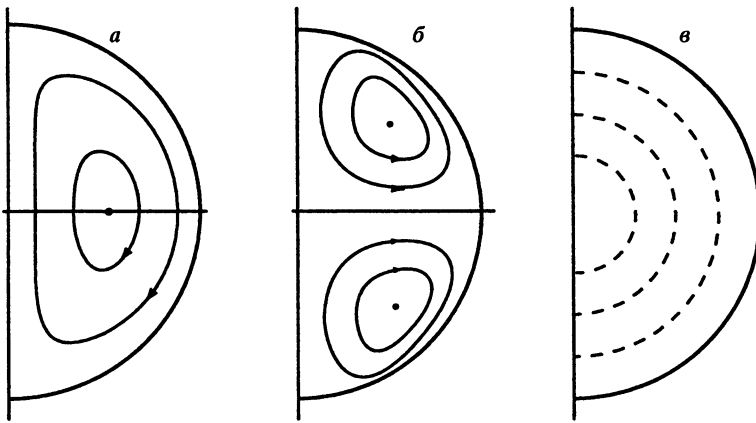


Рис. 2. Линии тока скоростей $\Psi = \text{const}$, $m = 1$ (а) и $m = 2$ (б) и магнитные поверхности $\psi = \text{const}$ при $\tau = 0$ (в)

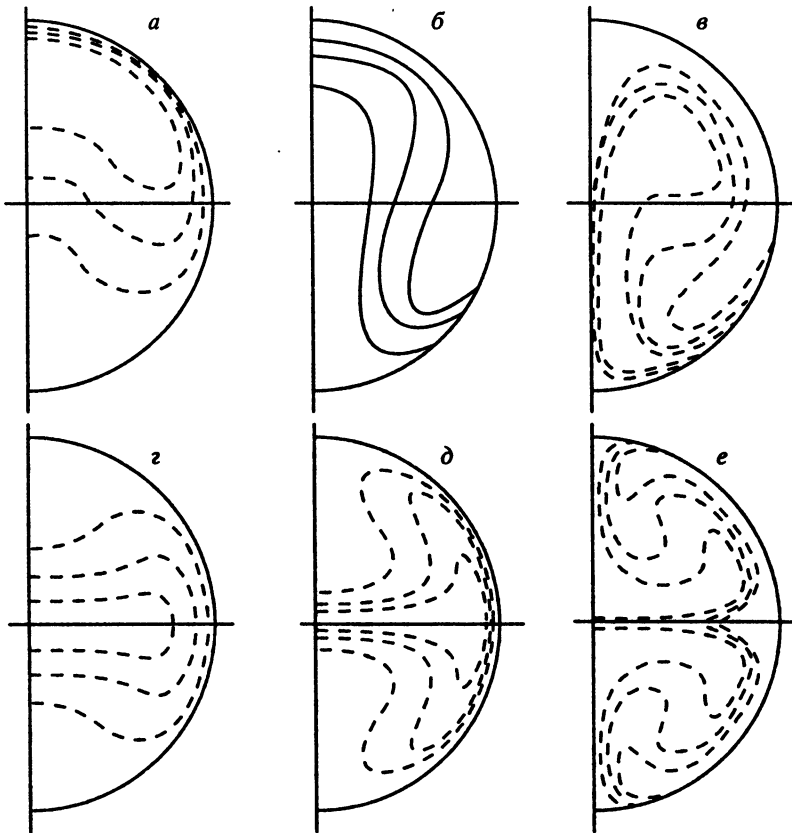


Рис. 3. Эволюция магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ в кинематической модели для $m = 1$ и $m = 2$ при разных $\tau = \lambda t$

$a-v$: $m = 1$ ($\tau = 1, 2, 4$ соответственно); $z-e$: $m = 2$ ($\tau = 2, 4, 8$ соответственно)

На рис. 2, а, б представлены линии скоростей $\Psi = \text{const}$ при $m = 1, 2$ для функции Ψ , определяющейся формулой (41), а на рис. 2, в – круговые магнитные поверхности $\psi = \text{const}$, последующая временная эволюция которых, рассчитанная по формулам (54) и (56) для $m = 1$ и 2 , показана на рис. 3. Видно, что сечения магнитных поверхностей деформируются весьма специфичным образом, наматываясь на центры вихревых трубок. При этом плазма как бы выворачивается наизнанку, так что внутренние слои выносятся на периферию. В результате образуются узкие "инверсные" слои и все силовые линии выходят на "стенку" $r = 1$. На основании рис. 3 легко представить себе эволюцию магнитных поверхностей для $m = 3; 4; \dots$.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Система МГД-уравнений (1) – (4) решалась численно на ЭВМ для равновесной конфигурации, представляющей собой цилиндр радиуса $r = 1$ с отождествленными торцами $z = 0$ и $z = 2\pi$, при заданных начальных скоростях и при условии сохранения винтовой симметрии [19–25]. Граничные условия при $r = 1$ брались в виде $v_r = B_r = 0$, $j_\varphi = j_z = 0$, $\rho v_\varphi^2 = \partial p / \partial r$. Рассматривались два варианта равновесных конфигураций (42): $N = 10$ и $N = 1$. При этом распределение азимутального поля и равновесного давления имеет вид

$$B_\varphi = \mu_0 r \left[1 - r^{2N} / (N + 1) \right] \quad (59)$$

$$p = \mu_0^2 \left[1 - r^2 - \frac{(N + 2)(1 - r^{2N+2})}{(N + 1)^2} + \frac{1 - r^{4N+2}}{(N + 1)(2N + 1)} \right]. \quad (60)$$

Уравнение адиабаты и соответствующее начальное распределение плотности задавалось в виде

$$p = p_0 (\rho / \rho_0)^{\gamma}. \quad (61)$$

Решение системы (1)–(4) находили для $m = 2$ в цилиндрической системе координат по схеме Эйлера, в то время как функция магнитных поверхностей ψ определялась из решения уравнения (6) методом численного интегрирования уравнений характеристик

$$\frac{dr}{dt} = v_r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\alpha v_z + \frac{v_\varphi}{r}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -v(j_z + \alpha r j_\varphi) \quad (62)$$

с известными правыми частями, которые брались из решения полной системы (1)–(4). Вариант $N = 10$ рассчитывался при $\rho_0 = 1$, а вариант $N = 1$ – при $\rho_0 = 5/12$. Соответственно безразмерными единицами скорости для этих вариантов являются альфвеновские скорости

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho(0)}} \begin{cases} 1, \\ \sqrt{5/12}, \end{cases} \quad (63)$$

а единицей времени – период $T_A = a / V_A$. Безразмерная магнитная вязкость $\nu = c^2 / (4\pi a V_A \sigma)$.

Из линейной теории следует, что равновесная конфигурация (42) неустойчива относительно локальных сайдемовских возмущений, если резонансная магнитная поверхность $\mu(r_s) = \alpha$ попадает внутрь плазмы $0 < r < 1$ и нарушается критерий устойчивости Сайдема (20). Для рассматриваемой конфигурации критерий (20) не выпол-

няется внутри круга $r = r_{кр}$. Для $N \gg 1$ $r_{кр} \approx 1$, а для $N = 1$

$$r_{кр}^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{16\alpha^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{16\alpha^2}\right)^2 - 2}.$$

Условие существования при $r < r_{кр}$ резонансной магнитной поверхности записывается в виде

$$1 - \frac{r_{кр}^{2N}}{N+1} < \frac{\alpha}{\mu_0} < 1.$$

Для квазиоднородного тока ($N \gg 1$) резонансная область параметров μ_0/α мала, в случае же параболического тока при $\alpha = 1$ получаем $r_{кр} = 0,92$ и $1 < \mu_0/\alpha < 1,8$, а при $\alpha = 1/3$ $r_{кр} = 0,75$ и $1 < \mu_0/\alpha < 1,4$.

Крупномасштабные возмущения. Задание крупномасштабных возмущений (41) при $m = 2$ эквивалентно заданию четырех винтовых вихревых трубок (см. рис. 2,б). Максимальная неустойчивость развивается при μ_0/α , соответствующих $\min \delta W$ (см. рис. 1). При этом сечения магнитных поверхностей претерпевают весьма существенные изменения, хотя при $\nu = 0$ и не меняют своей топологии. Плазма как бы выворачивается наизнанку, так что внутренние (горячие) слои попадают в окрестность стенки $r = 1$. Характерны образование узких инверсных слоев, внутри которых возникают большие градиенты поля и плотности, и выход силовых линий на стенку $r = 1$. При достаточно больших временах замечен эффект закручивания силовых линий вокруг центров вихревых трубок.

Описанная форма эволюции магнитных поверхностей при развитии максимальной неустойчивости для заданного отношения μ_0/α : практически не зависит от распределения тока, показателя адиабаты¹ ($\gamma = 1; 2$) и амплитуды возмущающей скорости λ . На рис. 4 приведены сечения магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ при $\nu = 0$ для $N = 10$ при резонансе $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1$ и для $N = 1$ в окрестности резонанса $\mu_0/\alpha = 1,4$ при $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/3$. Уменьшение μ_0 в 3 раза приводит к увеличению времени развития неустойчивости в 9 раз, в то время как уменьшение λ от $\lambda = 0,1$ до $\lambda = 0,01$ приводит лишь к незначительному затягиванию времени процесса (~1,5).

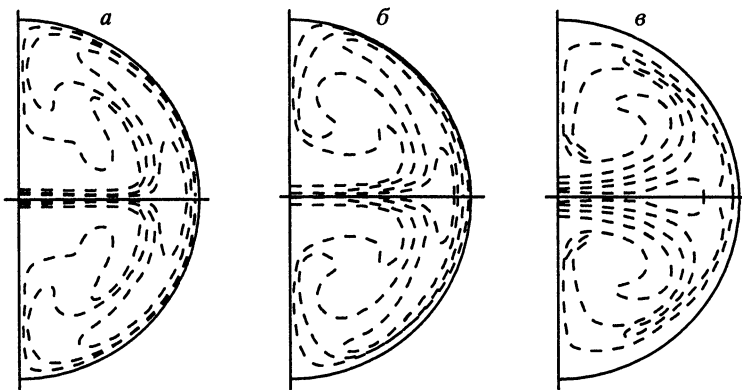
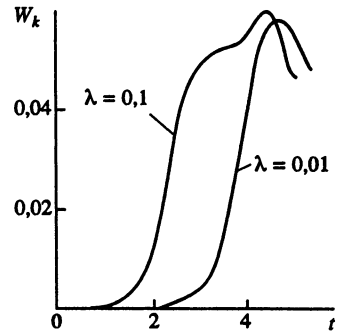


Рис. 4. Эволюция магнитных поверхностей при развитии резонансной неустойчивости $\nu = 0$, $m = 2$

a: $N = 10$, $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1$, $t = 5,1$; *б:* $N = 1$, $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1,4$, $t = 3,5$; *в:* $N = 1$, $\alpha = 1/3$, $\mu_0/\alpha = 1,4$, $t = 32,2$

¹ Случай $\nu = 0$ рассчитывался при $\gamma = 1$, а случай $\nu \neq 0$ – при $\gamma = 2$.

Рис. 5. Кинетическая энергия при $v = 0$, $m = 2$, $N = 1$, $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1,4$



Эволюция магнитных поверхностей при резонансной неустойчивости сходна с решением кинематической задачи разд. 5 для неизменной пространственной формы распределения скоростей. Следовательно, развитие этой неустойчивости, грубо говоря, происходит таким образом, что заданные скорости растут со временем, в среднем не меняя своего пространственного распределения. При этом магнитное поле как бы теряет свои удерживающие и стабилизирующие свойства и плазма с альфеновскими скоростями разлетается поперек магнитных силовых линий.

На рис. 5 показаны зависимости от времени кинетической энергии W_k для случая $N = 1$, $\alpha = 1$, $\mu_0 = 1,4$ при $\lambda = 0,1$ и $\lambda = 0,01$. В окрестности $t = 0$ W_k падает (в соответствии с $\delta W > 0$), а затем W_k бурно растет и достигает максимума, значение которого не зависит от λ .

При резонансных параметрах, отвечающих $\min \delta W$, в неустойчивость вовлекается вся плазма. Однако при выходе из резонанса соответствующий "круг неустойчивости" сужается. На рис. 6 показаны линии $\psi = \text{const}$ при $N = 1$ и μ_0/α , меньших и больших резонансного $\mu_s/\alpha \approx 1,5$. При $\mu_0 < \mu_s$ структура силовых линий внутри круга неустойчивости близка к описанной выше, а при $\mu_0 > \mu_s$ несколько отличается от нее. При выходе из области $1 < \mu_0/\alpha < 2$ существования резонансных магнитных поверхностей $\mu = \alpha$ неустойчивость исчезает. В случае $\mu_0/\alpha = 0,9$ рассматриваемые начальные возмущения приводят лишь к незначительной деформации внутренних магнитных поверхностей, а при $\mu_0/\alpha = 2,2$ несколько деформируются все магнитные поверхности, но процесс имеет ярко выраженный колебательный характер.

Неустойчивость не развивается также для конфигураций, устойчивых по критерию Сайдема (20).

Локализованные возмущения. Расчет развития неустойчивости для локализованных возмущений производился при задании начальной скорости

$$v_r = \frac{f}{r} \cos m\theta, \quad v_\phi = \left(\frac{2\alpha^2 B_\phi}{y} f - f' \right) \frac{\sin m\theta}{m\beta}, \quad v_z = \left(\frac{2\alpha B_\phi}{ry} f + \alpha r f' \right) \frac{\sin m\theta}{m\beta}, \quad (64)$$

где $f(r) = \lambda \zeta (1 - \zeta^2)^2$, $\zeta = (r^2 - r_s^2) / \Delta$ при $|\zeta| < 1$ и $f(r) = 0$ при $|\zeta| > 1$.

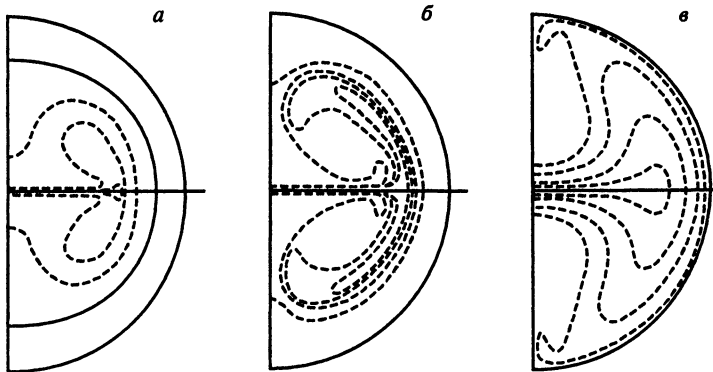


Рис. 6. Эволюция магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ при крупномасштабных возмущениях $v = 0$, $m = 2$, $N = 1$, $\alpha = 1$

а: $\mu_0 = 1$, $t = 8,7$; б: $\mu_0 = 1,1$, $t = 6,4$; в: $\mu_0 = 1,8$, $t = 2,6$

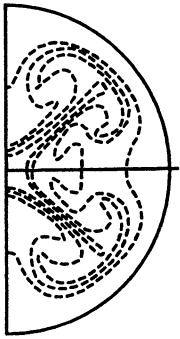


Рис. 7. Развитие неустойчивости при локализованных возмущениях (линии $\psi = \text{const}$ при $v = 0, m = 2, N = 1, \alpha = 1, \mu_0 = 1,14, r_s = 0,5, t = 5,3$)

Величина $\Delta = 0,1$, а $r_s = 0,5$, что в рассматриваемом случае $N = 1$ соответствует $\mu_0/\alpha = 1,14$. Выбранная скорость удовлетворяет условию $\text{div } v = 0$ и приводит к отрицательности δW , так что на линейной стадии развивается неустойчивость сайдемовского типа.

Результаты численного решения системы (1)–(4) при $v = 0, m = 2$ приведены на рис. 7. На нелинейной стадии неустойчивость не остается локализованной, а захватывает большую часть сечения плазмы, так что радиус круга неустойчивости $\sim 0,8$. В отличие от случая крупномасштабных возмущений существенно развивается кратная гармоника $m = 4$, которая приводит к соответствующей, характерной для круга неустойчивости структуре сечений магнитных поверхностей.

Влияние конечной проводимости. В случае $v \neq 0$ рассматривалась модельная задача с $v = \text{const}$, причем система уравнений (1)–(4) решалась при крупномасштабном возмущении скорости (41) для конфигурации (42) с $N = 1, \mu_0/\alpha = 1,4$, что соответствует максимальной неустойчивости при $v = 0$.

Результаты численного счета при $m = 2, \gamma = 2$ иллюстрируются рис. 8, где показана эволюция сечений магнитных поверхностей при различных значениях v .

Основной эффект, к которому приводит учет магнитной вязкости ($v \neq 0$), заключается в расщеплении магнитных поверхностей и образовании волокнистой структуры их сечений [26]. К такому же эффекту приводят и другие диссипативные процессы, в том числе и "машинная вязкость", которая исключается в наших расчетах ψ методом интегрирования уравнений характеристик (62).

Очевидно, что на фоне слабой неустойчивости, приводящей при $v = 0$ лишь к несущественной деформации сечений магнитных поверхностей, введение конечной вязкости носит дестабилизирующий характер, поскольку образующиеся при этом волокна способствуют увеличению диффузии плазмы поперек магнитного поля. Но на фоне рассматриваемой нами сильной неустойчивости, приводящей при $v = 0$ к выносу всех силовых линий на периферию плазмы, образование волокнистой структуры оказывается стабилизирующим фактором, поскольку внутри плазмы возникают магнитные трубки, представляющие собой "острова устойчивости" на карте сечений магнитных поверхностей. Кроме того, стабилизирующее влияние вязкости проявляется в сужении круга неустойчивости.

Детально процесс образования волокнистой структуры сечений магнитных поверхностей происходит следующим образом. Вначале расщепляется резонансная магнитная поверхность $r = r_s$. При этом образуются две эллиптические $\theta = \pm \pi/2$ и две гиперболические $\theta = 0, \pi$ особые точки сечений, так что возникают две винтовые магнитные трубки. Вместе с окружающими их магнитными поверхностями эллиптические точки движутся вдоль $\theta = \pm \pi/2$ к центру, а гиперболические – вдоль $\theta = 0, \pi$ к периферии. Затем каждая эллиптическая точка превращается в гиперболическую и пару новых эллиптических. Далее все четыре эллиптические точки начинают двигаться по направлению к центрам вихревых трубок ($\theta = \pm \pi/4, \pm 3\pi/4$), новые гиперболические точки продолжают движение к центру вдоль $\theta = \pm \pi/2$, а старые – к периферии вдоль $\theta = 0, \pi$. В результате этих превращений образуется конфигурация с четырьмя винтовыми магнитными трубками или с четырьмя островами устойчивости. Внутри магнитных трубок силовые линии не выходят за их пределы, в то время как все остальные силовые линии выходят на границу круга неустойчивости.

Описанные деформации относятся к случаям достаточно малой вязкости $v = 10^{-4}, 10^{-3}$. Дальнейшее увеличение v приводит к подавлению вторичного рас-

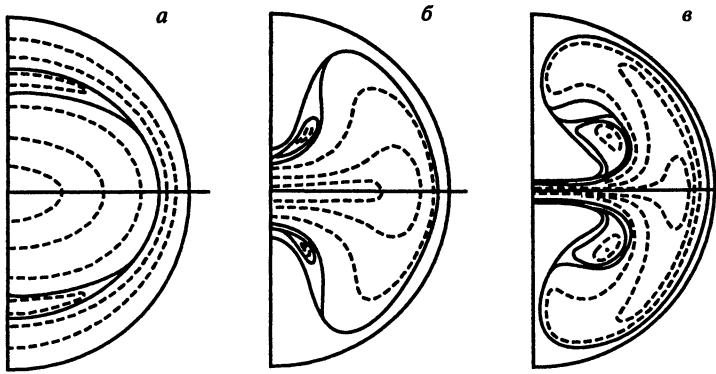


Рис. 8. Эволюция магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ при конечной проводимости $m = 2, N = 1, \alpha = 1, \mu_0 = 1,4$

$a: v = 10^{-3}, t = 1,8; b: v = 10^{-4}, t = 3,3; c: v = 10^{-4}, t = 4,1$

щепления. При $v = 10^{-2}$ в результате распухания возникших при первом расщеплении узких магнитных трубок образуется структура двух переплетенных винтовых трубок, разделенных узким инверсным слоем. Наконец, при $v = 10^{-1}$ рассматриваемая неустойчивость оказывается существенно застabilизированной вязкостью. В этом случае сечения магнитных поверхностей остаются близкими к окружностям, а появившиеся в результате первого расщепления волокна становятся достаточно узкими и стягиваются к центру.

7. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

При невыполнении критерия локальной устойчивости Сайдема (20) в плазменном цилиндре развивается винтовая МГД-неустойчивость, приводящая к существенной перестройке структуры сечений магнитных поверхностей. Неустойчивость развивается в основном внутри некоторого "круга неустойчивости", радиус которого определяется параметрами равновесной конфигурации. Образование характерных структур сечений магнитных поверхностей внутри круга неустойчивости для различных мод m хорошо описывается кинематической моделью разд. 5, в которой пространственное распределение начальных скоростей не меняется со временем. Таким образом, на существенной части времени процесса, грубо говоря, происходит квазилинейный экспоненциальный рост собственной функции скорости, отвечающей максимальному инкременту развития. Стабилизация неустойчивости, характеризующаяся прекращением роста кинетической энергии (см. рис. 5), обусловлена, по-видимому, достижением системой устойчивого стационарного состояния.

Учет малых диссипативных эффектов (например, конечной проводимости) не меняет общего характера процесса развития неустойчивости, но приводит к новому эффекту – образованию и размножению волокон в сечениях магнитных поверхностей. Получающаяся при этом картина сечений внутри круга неустойчивости содержит в себе черты, подтверждающие основные идеи о механизме развития неустойчивости, изложенные в работах [26] и [27].

Аналогичная вышеприведенным эволюция сечений магнитных поверхностей при развитии моды $m = 1$ была недавно получена в работе [28], в которой, однако, определяющая роль в объяснении механизма развития неустойчивости отводится влиянию конечной проводимости.

Рассмотренная в настоящей работе "винтовая" МГД-неустойчивость, по-видимому, стабилизируется в тороидальных конфигурациях при выполнении критерия

Мерсье (34), обобщающего критерий Сайдема (20). Не исключено, конечно, и существование дополнительных дестабилизирующих факторов, поскольку оба критерия (20) и (34) не являются достаточными условиями устойчивости.

В заключение следует подчеркнуть, что описанный выше нелинейный процесс развития МГД-неустойчивости в ограниченных конфигурациях носит достаточно общий характер и аналогично проявляется в ряде гидродинамических задач. В частности, в задаче о развитии конвективной неустойчивости гравитирующего газового шара (звезды) [29] картины меридиональных сечений изэнтропических поверхностей $S = \text{const}$ (в сферических координатах r, θ) в процессе развития неустойчивости эволюционируют аналогично сечениям $\psi = \text{const}$, изображенным на рис. 3. В результате внутренние слои горячего газа выносятся на поверхность, что, очевидно, приводит к очень большому увеличению светимости, которая пропорциональна четвертой степени температуры поверхности звезды.

Авторы признательны Н.И. Герлах и А.И. Морозову за существенную помощь в работе, а также Н.Н. Ченцову за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1967.
2. Соловьев Л.С. Симметричные магнитогидродинамические течения и винтовые волны в круглом плазменном цилиндре // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245.
3. Сайдем В. Об устойчивости самосжатоого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мирн. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.
4. Кадомцев Б.Б. Устойчивости плазмы низкого давления // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 1646.
5. Grad H. Magnetofluid dynamic spectrum and low shear stability // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1973. Vol. 70, N 12. P. 3277.
6. Бернштейн А., Фримен Е., Крускал М., Кулсруд Р. Энергетический принцип для проблемы гидромагнитной устойчивости // Проблемы современной физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
7. Trubnikov V.A. Dynamical principle of stability for magnetohydrostatic systems // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 184.
8. Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132.
9. Hamada S. Hydromagnetic equilibria and their proper coordinates // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 2, N 1/2. P. 23.
10. Соловьев Л.С. К теории гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
11. Соловьев Л.С. Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1972. Вып. 6. С. 210.
12. Mercier C. Equilibre et stabilite d'un system toroidal magnetohydrodynamique an voisinage d'un axe magnetique // Nucl. Fusion. 1964. Vol. 4, N 3. P. 213.
13. Spies G.O. Magnetohydrodynamic stability theory with closed magnetic field lines // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17, N 2. P. 400.
14. Кадомцев Б.Б. О конвективной неустойчивости плазмы // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 380.
15. Шафранов В.Д., Юрченко Э.И. Критерий желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 1157.
16. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Эволюция геометрии магнитного поля при винтовом течении плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 95).
17. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Изменение геометрии магнитного поля в движущейся плазме // Письма в ЖТФ. 1975. Т. 1, вып. 24. С. 1117.

18. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. О винтовой неустойчивости плазменного шнура. М., 1974. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 89).
19. Герлах Н.И., Зуева Н.М. Результаты расчета динамики винтовой МГД-неустойчивости. М., 1974. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 91).
20. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. О развитии винтовой МГД-неустойчивости. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 74).
21. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. О развитии винтовой МГД-неустойчивости // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 1. С. 1016.
22. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Винтовая МГД-неустойчивость идеальной плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 96).
23. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Винтовая МГД-неустойчивость при конечной проводимости. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 111).
24. Зуева Н.М., Морозов А.И., Соловьев Л.С. Нелинейная неустойчивость плазменных шнуров // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. № 284.
25. Данилов Ю.Н., Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Попов А.М. Нелинейные винтовые волны в плазме с учетом конечной проводимости // Физика плазмы. 1976. Т. 2. С. 167.
26. Морозов А.И., Соловьев Л.С. О типичной структуре тороидального магнитного поля // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1963. Т. 45. С. 955.
27. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // Там же. 1973. Т. 65. С. 575.
28. Waddel B.V., Rosenbluth M.N., Monticello D.A., White R.B. Non-linear growth of the $m = 1$ tearing mode // Nucl. Fusion. 1976. Vol. 16. P. 528.
29. Зуева Н.М., Михайлова М.С., Соловьев Л.С. О конвективной неустойчивости газового шара // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 165.

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГАЗОВОГО ШАРА*

1. В работах [1–4] рассматривалась нелинейная винтовая МГД-неустойчивость в плазменном цилиндре. Было показано, что в процессе развития неустойчивости плазма как бы выворачивается наизнанку, так что внутренние слои оказываются на периферии. Полученные в [1–4] характерные нелинейные структуры сечений магнитных поверхностей оказываются типичными также для изэнтропических поверхностей, образующихся при развитии конвективной неустойчивости газового шара (звезды).

Уравнения движения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla N = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla P}{\rho} - \nabla G, \quad (1b)$$

$$\Delta G = 4\pi \kappa \rho, \quad (1r)$$

где ρ – плотность, P – давление, $N = P\rho^{-\gamma}$, \mathbf{v} – скорость, G – гравитационный потенциал, решаются в сферических координатах r, θ, φ в предположении аксиальной симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$).

Исходная равновесная конфигурация соответствует модели Лейна–Эмдена [5]

* Совместно с Н.М. Зуевой и М.С. Михайловой // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 165–168.

$P = P_0(\rho/\rho_k)^{\gamma_0}$ с $\gamma_0 = 2$, при этом в безразмерных переменных

$$\kappa = \pi/2, \quad P = \rho^2, \quad G = -2\rho, \quad \rho = (\sin \pi r)/(\pi r). \quad (2)$$

Начальные возмущения скорости можно задать в виде стационарных течений $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$, описывающихся функцией тока Ψ :

$$v_r = \frac{1}{\rho r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3)$$

Регулярные при $r \rightarrow 0$ и удовлетворяющие условию $v_r = 0$ при $r = 1$ гармоники Ψ можно представить, например, в виде

$$\Psi = \lambda r^{n+1} \rho^2 \sin^2 \theta P'_n(\cos \theta),$$

где P_n – полиномы Лежандра.

2. Рассмотрим сначала *кинематическую* модель эволюции первой моды $n = 1$ возмущения, полагая, что скорости не меняют своей пространственной формы и описываются функцией $\Psi = \lambda r^2 \rho^2 \sin^2 \theta$, где $\rho = 1 - r^2$.

Решение уравнения (16) для функции $N(r, \theta)$, удовлетворяющей начальному условию $N = N_0(r)$ при $t = 0$, выражается эллиптическими функциями Якоби [3]

$$N = N_0(u), \quad u^2 = 2/3 + \delta + (\beta - \delta) \operatorname{sn}^2(F - \tau),$$

$$\operatorname{sn}(F - \tau) = \frac{c \, d \sin \varphi - s \, r (1 - r^2) \cos \theta / [\sqrt{\alpha - \delta}(\beta - \delta) \sin \varphi]}{1 - k^2 s^2 \sin^2 \varphi}, \quad (4)$$

где

$$\sin^2 \varphi = \frac{r^2 - \delta - 2/3}{\beta - \delta}, \quad k^2 = \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}, \quad \tau = 2\lambda \sqrt{\alpha - \delta} t,$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad \beta = \frac{2}{3} \sin \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$\sin \varepsilon = 1 - \frac{27}{2} \frac{\Psi}{\lambda},$$

c, s и d – соответственно $\operatorname{cn}(\tau)$, $\operatorname{sn}(\tau)$ и $\operatorname{dn}(\tau)$.

Сечения вначале сферических сечений изэнтропических поверхностей $N = \operatorname{const}$ для момента $\tau = 1$ представлены на рис. 1. В процессе эволюции внутренние области газового шара всплывают на поверхность, а внешние области попадают внутрь.

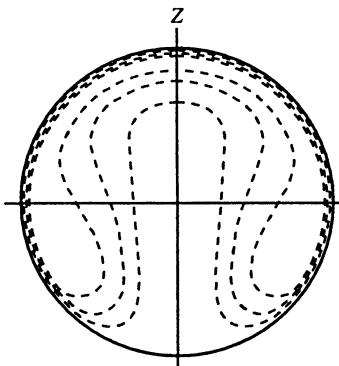


Рис. 1

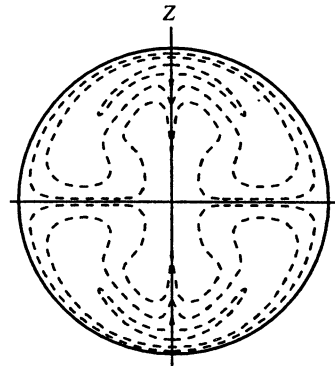


Рис. 2

3. Полная система уравнений (1) решалась численно на ЭВМ для равновесной конфигурации (2) при допущении о неизменности гравитационного потенциала G . Начальные возмущения скорости, удовлетворяющие условию $\text{div } \mathbf{v} = 0$, задавались функцией тока второй гармоники $n = 2$

$$\psi = \lambda r^3 (1 - r^2) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (5)$$

При решении задачи использовалось граничное условие $v_r(1) = 0$. На рис. 2 представлены сечения изэнтропических поверхностей для $\gamma = 5/3$, $\lambda = 0,1$ в момент времени $t = 5,09$. На рис. 3 приведены графики изменения кинетической энергии в функции от t .

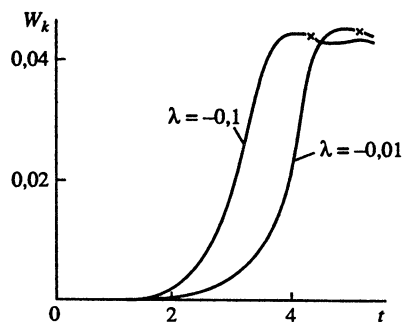


Рис. 3

Необходимым условием конвективной устойчивости является требование $N(r) > 0$ или для равновесной модели Лейна-Эмдена $\gamma_0 < \gamma$.

В рассмотренных выше случаях условие конвективной устойчивости было нарушено во всем интервале $0 < r < 1$ и соответственно в неустойчивость вовлекался весь шар. В результате развития неустойчивости внутренние изэнтропические слои выносятся на поверхность, и, поскольку энтропия заморожена в вещество, на периферию выносятся внутренние горячие слои газа. В соответствии с этим растет температура поверхности $kT = mNp\gamma^{-1}$. В рассмотренных примерах при $\gamma = 5/3$ температура поверхности T_1 достигает $\sim 0,2T_0$. Характерное время развития неустойчивости $\Delta t \sim R / \sqrt{\gamma_0 - \gamma c_0}$, где $c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0$. Для звезды типа Солнца, полагая $P_0 / \rho_0 \sim \kappa M_\odot / R$, получим $\Delta t_\odot \sim (\gamma_0 - \gamma)^{-1/2}$ часов. Повышение температуры поверхности Σ должно с необходимостью приводить к очень сильному увеличению излучения $\sim T_\Sigma^4$.

Авторы признательны Н.Н. Ченцову, Н.А. Козыреву и С.И. Брагинскому за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Винтовая МГД-неустойчивость идеальной плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 96).
2. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Эволюция геометрии магнитного поля при винтовом течении плазмы. М., 1975. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 95).
3. Герлах Н.И., Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Нелинейная винтовая МГД-неустойчивость. М., 1976. (Препр. / ИПМ АН СССР; № 84).
4. Зуева Н.М., Соловьев Л.С., Морозов А.И. // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23, С. 284.
5. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.

О γ -НЕУСТОЙЧИВОСТИ ШАРА И ЦИЛИНДРА*

Известно, что гравитирующий газовый шар (звезда) становится неустойчивым [1, 2] при показателе адиабаты $\gamma \leq 4/3$. Оказывается, что аналогичная МГД γ -неустойчивость существует также и в плазме. Ограничиваясь одномерными движениями, мы рассмотрим некоторые точные автоматические решения задач о звезде и цилиндрической плазменной струе в магнитном поле В.

1. Решение изэнтропических уравнений движения для газового шара с плотностью $\rho(r)$ и давлением $p(r)$ в гравитационном поле $\Phi(r)$ при $v = v_r(r)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\pi G \rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \rho v = 0, \quad \frac{\partial p^{1/\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 p^{1/\gamma} v = 0$$

ищем в виде $v = -r\dot{g}/g$, где $g = g(t)$, $g(0) = 1$. При этом решениями уравнений для ρ , p и Φ будут

$$\rho = g^3 \rho_0(x), \quad p = g^{3\gamma} p_0(x), \quad \Phi = g\Phi_0(x), \quad x = gr, \quad (2)$$

где индексом "0" обозначены начальные значения соответствующих величин. Подстановка (2) в (1) дает

$$\frac{dv}{dt} = -g^{3\gamma-2} \frac{p'_0}{\rho_0} - g^2 \Phi'_0. \quad (3)$$

Отсюда видно, что на границе области устойчивости $\gamma = 4/3$ возможно свободное движение $dv/dt = 0$, если при $t = 0$ удовлетворено условие равновесия $p'_0/\rho_0 = -\Phi'_0$. Выбирая начальное возмущение плотности так, чтобы $p'_0 = -\rho_0 \Phi'_0 + \alpha r \rho_0$, получим для произвольного равновесного распределения при $\gamma = 4/3$

$$\frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = -\frac{g^3}{2} \frac{d}{dg} \frac{g^2}{g^4} = -\alpha g^3. \quad (4)$$

Решение (4), описывающее свободное сжатие ($\alpha > 0$) и расширение ($\alpha = 0$) звезды, выражается формулами

$$\frac{\sqrt{g-1}}{g} + \arctg \sqrt{g-1} = \sqrt{2\alpha} t, \quad \frac{\sqrt{1-g}}{g} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-g}}{1-\sqrt{1-g}} = \sqrt{-2\alpha} t. \quad (5)$$

Движение элемента массы, находившегося при $t = 0$ в точке $r = r_0$, определяется соотношением $r = r_0/g$.

При $\gamma \neq 4/3$ точное решение (3) можно получить для $\rho_0 = \text{const}$, $\Phi_0 = k^2 r/2$, $k^2 = 8\pi G \rho_0/3$. При этом для равновесного распределения $\rho_0(r)$ получим

$$\int_1^g \frac{dg}{g^2 \sqrt{g-1 - \frac{g^{3\gamma-3}-1}{3\gamma-3} + \lambda^2}} = kt, \quad (6)$$

где $\lambda = \dot{g}(0)/k$. Для $|g-1| \ll 1$ имеем

$$g = \frac{\lambda}{\Omega} \sin k\Omega t, \quad \Omega^2 = 3\gamma/2 - 2.$$

* Совместно с Т.Д. Кузнецовой // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3. С. 622-625.

Аналогичные решения задач о гравитирующих цилиндре и плоском слое показывают, что $\gamma_{кр}$ зависит от числа измерений пространства n согласно формуле $\gamma_{кр} = 2(n-1)/n$.

2. Радиальные изэнтропические движения гравитирующей цилиндрической плазменной струи описываются системой МГД-уравнений

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{v_\phi^2}{r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{B_z}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{B_\phi}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\phi, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = 4\pi G \rho, \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r F_i v_r = 0, \quad (8)$$

где $F_i = \rho, p^{1/\gamma}, B_z, B_\phi/r, \rho v_z, \rho v_\phi$. Полагая $v_z = -r\dot{g}/g$, получаем решение (8) в виде

$$\phi = \phi_0(x), \quad F_i = g^2 F_{i0}(x), \quad x = gr. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) с учетом уравнения равновесия дает

$$\frac{dv_r}{dt} = (g^{2\gamma-1} - g^3) \left(\frac{B_{z0} B'_{z0}}{\rho_0} - \frac{v_{\phi 0}^2}{x} \right) - (g^{2\gamma-1} - g) \left(\frac{B_{\phi 0} (x B_{\phi 0})'}{\rho_0 x} - \phi'_0 \right). \quad (10)$$

Отсюда следует, что для продольного магнитного поля и вращения $\gamma_{кр} = 2$, а для азимутального магнитного поля и гравитации $\gamma_{кр} = 1$. В пренебрежении гравитацией согласно (10) имеем

$$\frac{dv_r}{dt} = (g^3 - g^{2\gamma-1}) \frac{p'_0}{\rho_0} + (g^3 - g) \frac{B_{\phi 0} (x B_{\phi 0})'}{x \rho_0}. \quad (11)$$

Для получения точного решения полагаем $p'_0(r) = -v r \rho_0(r)$, $(r B_{\phi 0})' B_{\phi 0} / r = \kappa r \rho_0(r)$, где $v = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. При этом условием устойчивости будет

$$(2 - \gamma)v < \kappa, \quad (12)$$

а уравнение (11) приводится к квадратуре

$$\int_1^g \frac{dg}{g^2 \sqrt{v \left(g^2 - 1 - \frac{g^{2\gamma-2} - 1}{\gamma - 1} \right) + \kappa (\ln g^2 + 1 - g^2) + \lambda^2}} = t, \quad (13)$$

где $\lambda = \dot{g}(0)$.

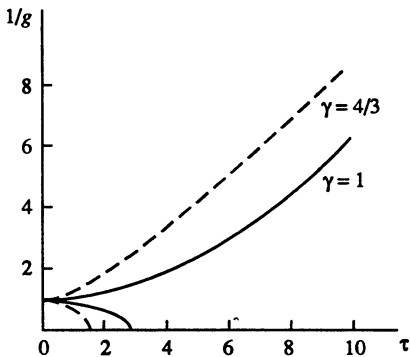


Рис. 1

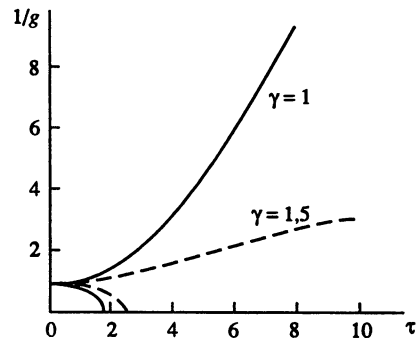


Рис. 2

На рис. 1 представлены графики $1/g$ при $\gamma = 4/3$ в функции от $\tau = \sqrt{2|\alpha|}t$ и при $\gamma = 1, \lambda = 1/10$ в функции от $\tau = kt$ для газового шара (см. (5), (6)).

На рис. 2 даны графики $1/g$ при $\gamma = 3/2, \nu = 3\kappa, \lambda = 0,1$ и при $\gamma = 1, \nu = 2\kappa, \lambda = 0,1$ в функции от $\tau = \sqrt{|\kappa|}t$ для плазменного цилиндра (см. (13)). Типичным является расширение до конечного радиуса. Неограниченное расширение происходит лишь при $\gamma = 1$. Предельная величина g определяется обращением в нуль знаменателя в (13).

В случае $g \ll 1, \lambda^2 \rightarrow 0$ получаем $2 \ln g_{\text{пр}} = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} \frac{\nu}{\kappa} - 1$.

В рамках рассмотренного автомодельного решения движение границы $r = a$ приводит к возникновению поверхностного тока. Например, при $B_{ze} = \text{const}$ $i_\phi = -B_{zi}(a_0)(1 - a_0^2/a^2)$, поэтому для реализации такого решения требуется изменение внешнего поля B_{ze} , компенсирующее скачок $p + B^2/2$ при $r = a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
2. Имиенник В.С. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. С. 1287.

О ЛОКАЛЬНОЙ МГД-УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ*

Выводится необходимый критерий устойчивости для произвольных равновесных конфигураций, который при малом отношении скорости звука к альфвеновской переходит в критерий Мерсье [1], а при исчезающем шире – в критерий Шпиза [2].

Потенциальная энергия [3] возмущений ξ для плазмы в магнитном поле \mathbf{B} в натуральной [4] системе координат $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dx^i$ представляется в виде [5]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ (Q + [\mathbf{j}\mathbf{e}]\xi)^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - (\Omega + [\mathbf{j}\mathbf{e}]^2)\xi^2 \right\} d\tau, \quad (1)$$

где $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}]$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$, $\xi = \xi^3$, $x^3 = V$ – текущий объем, отсчитываемый от магнитной оси замкнутой тороидальной плазменной конфигурации. Представив ξ в виде разложения $\xi = \alpha \mathbf{j} + \beta \mathbf{B} + \xi \mathbf{e}$, получим

$$\mathbf{Q} = p' [\nabla \alpha \nabla V] + \mathbf{e} (\mathbf{B} \nabla \xi) - \mathbf{B} \xi' - \mathbf{B}' \xi, \quad \operatorname{div} \xi = \mathbf{j} \nabla \alpha + \mathbf{B} \nabla \beta + \xi'. \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_1 I' + \mathbf{e}_2 J', \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 \chi' + \mathbf{e}_2 \Phi', \quad (3)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{e}_1 \chi'' + \mathbf{e}_2 \Phi'' = \frac{1}{p'} (\Omega \mathbf{B} - \mathbf{j} S),$$

J и Φ – продольные, а I и χ – поперечные потоки \mathbf{j} и \mathbf{B} внутри V ,

$$p' = I' \Phi' - J' \chi', \quad \Omega = I' \Phi'' - J' \chi'', \quad S = \chi' \Phi'' - \Phi' \chi'', \quad (4)$$

штрихом обозначено дифференцирование по V .

Рассмотрим возмущения, локализованные в тонком слое $x = V - V_s \sim \varepsilon$ в окрестности магнитной поверхности $V = V_s$ с замкнутыми силовыми линиями \mathbf{B} , тогда $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_0 x + \dots$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'_0 x + \dots$, $p' = p'_0 + p''_0 x + \dots$.

Представляя компоненты смещения ξ в виде разложений $\alpha = \frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \alpha_1 \dots$, $\beta = \frac{\beta_0}{\varepsilon} + \beta_1 + \dots$, $\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \dots$, получим, что в низшем приближении по степеням ε подынтегральное выражение (1) равно

$$L = \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ [(\mathbf{B} \nabla \alpha_0) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \nabla \alpha_0 + \xi'_0) \mathbf{B}]^2 + \gamma p (\mathbf{j} \nabla \alpha_0 + \mathbf{B} \nabla \beta_0 + \xi'_0)^2 \right\}. \quad (5)$$

Здесь и далее опущены индексы нуль у величин \mathbf{j}_0 , \mathbf{B}_0 и p'_0 . Выражение (5) обращается в нуль, если $\mathbf{B} \nabla \alpha_0 = \mathbf{B} \nabla \beta_0 = \mathbf{B} \nabla \xi_0 = 0$, $\mathbf{j} \nabla \alpha_0 = -\xi'_0$. В следующем приближении

* Журн. техн. физики. 1978. Т. 48. С. 21–24.

получаем

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{B}\nabla\alpha_1)\mathbf{j} - (\mathbf{j}\nabla\alpha_1 + \xi_1')\mathbf{B} - (x\xi_0)'\mathbf{B}', \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \xi = \mathbf{B}\nabla\beta_1 + \mathbf{j}\nabla\alpha_1 + \xi_1' + \frac{x}{p'}(\Omega\xi_0' - S\mathbf{j}\nabla\beta_0).$$

Минимизация члена $\int \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 d\tau$ по β_1 дает

$$\operatorname{div} \xi = \langle \lambda \rangle, \quad \lambda = \mathbf{j}\nabla\alpha_1 + \xi_1' + \frac{x}{p'}(\Omega\xi_0' - S\mathbf{j}\nabla\beta_0), \quad (7)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по слою $|V - V_s| \rightarrow 0$:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{d}{dV} \int \lambda d\tau = \oint \lambda \frac{dl}{B} / \oint \frac{dl}{B}.$$

Если $S \neq 0$, то $\operatorname{div} \xi$ можно обратить в нуль, выбрав соответствующее $\mathbf{j}\nabla\beta_0$, что приводит к критерию Мерсье [1]. Однако для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, когда $S \equiv 0$, этого сделать нельзя, и в результате дальнейшей минимизации для $S \equiv 0$ Шпиз получает другой критерий устойчивости [2]. Поскольку конфигурации с $S \equiv 0$ являются слишком частным случаем, представляет интерес получение общего необходимого критерия устойчивости, который остается также справедливым и в областях малого шира $S \rightarrow 0$.

Подстановка (6) в подинтегральное выражение (1) дает

$$L = B^2 \left[\lambda - \frac{\mathbf{jB}}{B^2} \mathbf{B}\nabla\alpha_1 + \left(\frac{p'}{B^2} + \frac{\Omega}{p'} \right) \xi_0 - \frac{S}{p'} \left(\frac{\mathbf{jB}}{B^2} (x\xi_0)' - x\mathbf{j}\nabla\beta_0 \right) \right]^2 + \gamma p \langle \lambda \rangle^2 +$$

$$+ \frac{|\nabla V|^2}{B^2} \left[p' \mathbf{B}\nabla\alpha_1 + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \xi_0 + S(x\xi_0)' \right]^2 - \left(\Omega + \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right) \xi_0^2. \quad (8)$$

Выберем $\mathbf{j}\nabla\beta_0 = \frac{\mathbf{jB}}{B^2} \xi_0' + \left(\left\langle \frac{\mathbf{jB}}{B^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) / \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \xi_0$, после чего минимизируем

$\langle L \rangle$ по $\tilde{\lambda} = \lambda - \langle \lambda \rangle$, используя неравенство Шварца $\langle a^2/b^2 \rangle \geq \langle a \rangle^2 / \langle b^2 \rangle$, где знак равенства реализуется при $\tilde{a} = \langle a \rangle \tilde{b}^2 / \langle b^2 \rangle$. Следующая минимизация по $\langle \lambda \rangle$ производится алгебраически, и в результате получаем

$$\langle L \rangle = \frac{\gamma p}{1 + \left\langle \frac{\gamma p}{B^2} \right\rangle} \left\langle \left\{ \frac{p'}{B^2} + \frac{\Omega}{p'} - \frac{S}{2p'} \left(\frac{\mathbf{jB}}{B^2} + \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right) / \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \right\} \xi_0 - \frac{\mathbf{jB}g}{B^2 p'} \right\rangle^2 +$$

$$+ \left\langle \frac{|\nabla V|^2}{B^2} \left(g + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \xi_0 + S(x\xi_0)' \right)^2 \right\rangle - \left\langle \Omega + \frac{j^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \xi_0^2, \quad (9)$$

где $g = p' \mathbf{B}\nabla\alpha_1$. Для минимизации второго члена (9) по g используем метод Лагранжа

$$g + \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \xi_0 + S(x\xi_0)' = \lambda_1 \frac{B^2}{|\nabla V|^2} + \lambda_2 \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2}. \quad (10)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – множители Лагранжа (отвечающие условиям $\langle g \rangle = 0$, $\langle (\mathbf{jB}/B^2)g \rangle$ фиксированы).

ровано), которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \lambda_1 + \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle (\lambda_2 - \xi_0) &= S(x\xi_0)', \\ \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle \lambda_1 + \left\langle \frac{(\mathbf{jB})^2}{B^2 |\nabla V|^2} \right\rangle (\lambda_2 - \xi_0) &= \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{B^2} \right\rangle S(x\xi_0)' + \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{B^2} g \right\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Дальнейшая минимизация производится алгебраически по переменной $\left\langle \frac{\mathbf{jB}}{B^2} g \right\rangle$, после чего $\langle L \rangle$ представляется квадратичной формой от ξ_0 и $(x\xi_0)'$. Для окончательной минимизации используем неравенство [6] $\int (x\xi_0)'^2 dx \geq 1/4 \int \xi_0^2 dx$. В результате требование положительности δW приводит к следующему необходимому условию устойчивости:

$$\frac{S^2}{4} - \frac{(M + p'\Pi)(p' - \gamma p M/a)}{1 + \gamma p \Pi/a} > 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle, \quad M = \frac{1}{p'} \left\langle \frac{\Omega B^2 - S \mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}'}{|\nabla V|^2} \right\rangle, \\ \Pi &= \frac{1}{p'^2} \left(\left\langle \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{jB}}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 \right) = \left\langle \frac{\mathbf{e}_1^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle \left\langle \frac{\mathbf{e}_2^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{|\nabla V|^2} \right\rangle^2 > 0. \end{aligned}$$

При $\gamma p/B^2 \rightarrow 0$ условие (12) переходит в критерий Мерсье [1, 5, 6]

$$\frac{1}{4} S^2 - p'M - p'^2 \Pi > 0, \quad (13)$$

а для областей, где мал шир ($S \rightarrow 0$), – в критерий Шпиза [2, 7]

$$\left(a \frac{\Omega}{p'} + p'\Pi \right) \left(p' - \gamma p \frac{\Omega}{p'} \right) < 0, \quad (14)$$

где $\Omega/p' = \Phi''/\Phi' = \chi''/\chi'$.

Критерий аналогичного типа $\left\langle B^2 \frac{\Omega}{p'} + p' \right\rangle \left(p' - \gamma p \frac{\Omega}{p'} \right) < 0$ более мягкий, чем (14),

был ранее получен Кадомцевым [8] также для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями ($S \equiv 0$), но без предположения о локализации рассматриваемых возмущений (см. также [9, 10]).

Для тороидальной конфигурации с круглыми поперечными сечениями магнитных поверхностей (токамак) при условии малой тороидальности

$$S = - \frac{r B_z^2 \mu'}{|\nabla V|^2}, \quad M = - \frac{2r B_z^2}{|\nabla V|^3} \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{p'}{|\nabla V|^3} \left(1 + \frac{2}{\mu^2 R^2} \right),$$

$$\Pi = \frac{1}{|\nabla V|^2} \left(1 + \frac{2}{\mu^2 R^2} \right),$$

где B_z – продольная, B_ϕ – поперечная компонента \mathbf{B} , $\mu = B_\phi/rB_z$, штрих означает диф-

ференцирование по расстоянию r от круговой магнитной оси радиуса R . При этом критерий (12) принимает вид

$$\frac{\mu'^2}{4} + 2 \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left\{ \frac{p'}{rB_z^2} + \frac{\kappa \mu^2 R^2}{\kappa + \mu^2 R^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) \right\} > 0, \quad (15)$$

где $\kappa = 2\gamma\rho/(B^2 + \gamma\rho)$. Как и в общем случае (12), критерий (15) оказывается более мягким, чем соответствующий критерий [11] при $\gamma\rho/B^2 \rightarrow 0$, что указывает на стабилизирующее влияние сжимаемости плазмы. Последнее обстоятельство представляется существенным для опасных областей с $S = 0$, внутри которых локальный критерий устойчивости Мерсье (13) не является необходимым и налагает слишком жесткие ограничения на параметры равновесной конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mercier C. // Proc. Intern. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion. Salzburg, 1961. P. 95.
2. Spies G.O. // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17, N 2. P. 400.
3. Bernstein I.B. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. Vol. 244. P. 17.
4. Hamada S. // Nucl. Fusion. 1962. Vol. 1. P. 23.
5. Соловьев Л.С. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 626.
6. Green J.M., Johnson J.I. // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 7. P. 401.
7. Шафранов В.Д., Фроленков А.В. // VII Европ. конф. по физике плазмы и УТС. Лозанна, 1975.
8. Кадомицев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 4. С. 380.
9. Кадомицев Б.Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1959. Т. 37. С. 1646.
10. Grad H. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1973. Vol. 70, N 12. P. 3277.
11. Шафранов В.Д., Юрченко Э.И. // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1967. Т. 53. С. 1157.

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГАЗЕ*

Рассматривается развитие конвективной неустойчивости газа, находящегося в поле силы тяжести. С помощью численного решения двумерной задачи на ЭВМ показано, что развитие неустойчивости во вращающемся газе приводит к сильному возрастанию угловой скорости в окрестности оси вращения.

1. В предположении аксиальной симметрии задачи уравнения движения идеального газа в поле силы тяжести записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla N &= 0, & \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla I &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{I^2}{r^3}, & \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность, p – давление, \mathbf{v} – скорость, $I = r v_\phi$, $N = \rho p^{-\gamma}$, γ – показатель адиабаты, g – ускорение свободного падения. Будем рассматривать начальную скорость \mathbf{v} в качестве возмущения, а равновесное распределение давления и плотности

* Совместно с Н.М. Зуевой и В.В. Палейчик // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. С. 436–440.

зададим в виде

$$p = \frac{\rho^{\gamma_0}}{\gamma}, \quad \rho^{\gamma_0-1} = 1 - \frac{\gamma_0-1}{\gamma_0} \gamma g z. \quad (2)$$

За единицу скорости принята скорость звука $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ при $z = 0$. Соответствующее равновесное состояние при $\gamma_0 > \gamma$ является конвективно неустойчивым [1].

Как показывает линейная теория, основная собственная функция граничной задачи: $v_r = 0$ при $r = a$, $v_z = 0$ при $z = 0$ и $z = b$ в отсутствие вращения при слабой неустойчивости имеет вид $v_z = J_0(x_{11}r/a) \sin(\pi z/b)$, где x_{11} – первый корень $J_1(x)$. При этом неустойчивость развивается с инкрементом $|\omega|$, определяющимся формулой

$$-\omega^2 = \frac{g^2}{c^2} \frac{1 - \gamma/\gamma_0}{1 + \pi^2 a^2 / (x_{11}^2 b^2)}. \quad (3)$$

2. При развитии неустойчивости тепловая и потенциальная энергия газа переходят в кинетическую энергию движения, так что сохраняется их сумма:

$$W_T + W_g + W_k = \int \frac{p}{\gamma-1} dV + \int \rho g z dV + \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV = \text{const.}$$

Используя законы сохранения массы и энтропии, можно найти ограничение на расход тепловой энергии [2]

$$-\delta W_T \leq \frac{V}{\gamma-1} \left(\langle p \rangle - \langle p^{1/\gamma} \rangle^\gamma \right)_0, \quad (4)$$

выражающийся через начальное распределение давления p . Для параметров $\gamma = 3/2$, $\gamma_0 = 2$, $g = 1$, $a = b = 1$ формула (4) дает $-\delta W_T \leq 0,116$. В случае $gb/c_0^2 \ll 1$ из (4) следует $-\delta W_T \leq \rho_0 V g^2 b^2 / (24 c_0^2)$.

3. Нелинейная граничная задача о развитии неустойчивости решалась численными методами на ЭВМ путем решения системы уравнений (1) для равновесного состояния (2) при начальном возмущении скорости v

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (5)$$

$$v_\xi = vr, \quad \Psi = \lambda r^2 (1 - r^2) \sin \pi z,$$

внутри цилиндра $r < 1$, $0 < z < 1$ при использовании граничных условий $v_r = 0$ при $r = 1$, $v_z = 0$ при $z = 0$; 1 и $l = \text{const}$ при $r = 1$, $N = \text{const}$ при $z = 0$; 1 . Параметры: $\gamma = 3/2$, $\gamma_0 = 2$, $g = 1$, $v = 0, 1$.

На рис. 1 представлены графики кинетических энергий меридионального и азимутального движения в функции от времени для $\lambda = -0,01$ и $\lambda = -0,1$ (кривые с индексом (1) и (2) соответственно).

На рис. 2 показаны меридиональные сечения поверхностей $l = \text{const}$ при $t = 8,4$.

На рис. 3 изображены азимутальные скорости $v_\phi = l/r$ в сечении $z = 0$ при $t = 0$; $3,8$; $7,0$; $8,4$.

Как видно из рис. 1, независимо от амплитуды начального возмущения λ кинетическая энергия неустойчивости достигает максимума, который определяется параметрами равновесной конфигурации. Этот максимум по порядку величины совпадает с максимально возможным расходом тепловой энергии $-\delta W_T$. Следует отметить, что аналогичный характер кривой с максимумом имеют также графики зависимости кинетической энергии от времени при развитии винтовой МГД-неустойчивости [2] и конвективной неустойчивости в гравитирующем газовом шаре [3].

Приведенное решение нелинейной задачи с заданным начальным возмущением

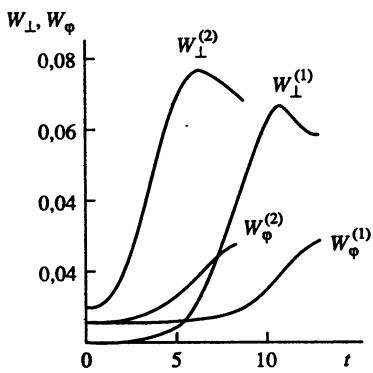


Рис. 1

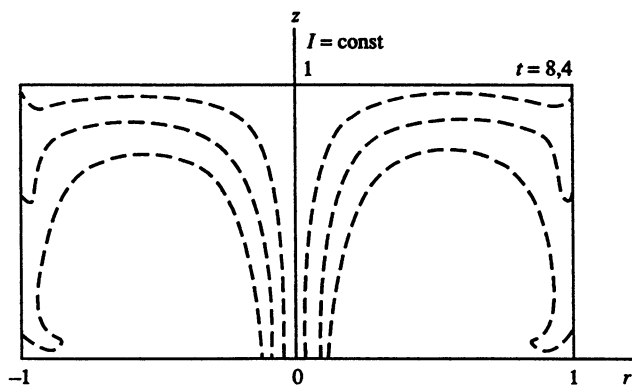


Рис. 2

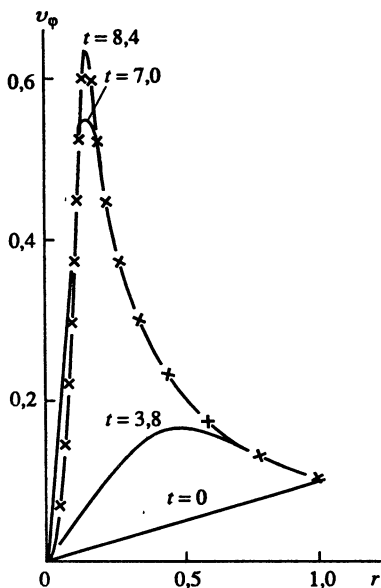


Рис. 3

свидетельствует о возможности генерации больших угловых скоростей вращения в результате развития конвективной неустойчивости.

Рассмотренный механизм генерации основан на развитии неустойчивости меридионального движения, которое приводит к "сгребанию" вращательного момента rv_ϕ к оси z из всего объема, в котором возникла неустойчивость. При этом на нелинейной стадии развивается, грубо говоря, основная собственная функция линейной задачи. Предлагаемая модель позволяет, по-видимому, качественно объяснить механизм возникновения смерчей в атмосфере в результате развития конвективной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
2. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. // Магнит. гидродинамика. 1977. Т. 3. С. 5.
3. Зуева Н.М., Михайлова Л.С., Соловьев Л.С. // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 165.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВИНТОВОЙ МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТИ*

Теория МГД-устойчивости, как более общая, должна была бы в принципе включать в себя также проблемы устойчивости обычной гидродинамики. Однако исследования МГД-устойчивости р а в н о в е с н ы х конфигураций продвинуты в настоящее время в некотором смысле дальше, чем чисто гидродинамические, главным образом благодаря классическим работам [1, 2], в которых получены критерии МГД-устойчивости для конфигураций произвольной геометрии. Как показано в [1], при наличии перекрещенности магнитных силовых линий (shear) наиболее опасными являются возмущения, относительно которых среда ведет себя как несжимаемая, в то время как согласно [2] в случае конфигураций с замкнутыми силовыми линиями сжимаемость среды выступает как стабилизирующий фактор. В работах [1, 2] рассматривались мелкомасштабные возмущения, приводящие к наиболее жестким критериям устойчивости. Однако, как правило, по-видимому, в первую очередь развиваются крупномасштабные возмущения, имеющие существенно большие инкременты развития, а также другую их зависимость от параметров равновесной конфигурации.

Для нахождения крупномасштабных собственных функций и соответствующих им инкрементов развития неустойчивости проще всего ограничиться рассмотрением двумерной задачи. Наиболее общей симметрией, позволяющей свести задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, является винтовая симметрия. В настоящей работе исследуется характер собственных функций и инкрементов в граничной задаче о развитии двумерной МГД-неустойчивости, обладающей винтовой симметрией. Показано, что с наибольшими инкрементами развивается неустойчивость крупномасштабных собственных функций. При этом в зависимости от параметров равновесной конфигурации неустойчивые собственные функции могут иметь ограниченную область локализации, вне которой они быстро спадают. Последний результат объясняет в рамках линейной теории образование на существенно нелинейной стадии [3] некоторого "круга неустойчивости", вне которого неустойчивость не развивается.

Если рассматривать процесс развития неустойчивости как переход от неустойчивого состояния к устойчивому стационарному движению, то полученные здесь результаты свидетельствуют о принципиальной возможности образования устойчивых крупномасштабных с т а ц и о н а р н ы х конфигураций.

1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Система линеаризованных уравнений движения для идеальной жидкости в общем случае записывается в виде

$$\rho \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = \nabla(\mathbf{v} \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}) + [\mathbf{j} \mathbf{Q}] - [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{Q}], \quad (1)$$

где ρ – плотность, p – давление, \mathbf{v} – скорость, \mathbf{B} – магнитное поле, $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{B}]$, $\nabla p = [\mathbf{j} \mathbf{B}]$.

Если равновесная конфигурация обладает цилиндрической симметрией, то решения (1) в цилиндрических координатах r, φ, z представляются суммой гармоник, в которых $u_r \sim \cos m\theta$, $u_\varphi, u_z \sim \sin m\theta$, где $\theta = \varphi - \alpha z$, $\alpha = 2\pi/L = \text{const}$. Используя эти соотношения и временную зависимость $\sim \cos \omega t$, можно u_φ и u_z выразить через u_r .

* Совместно с Н.И. Герлах и Н.М. Зуевой // Магнит. гидродинамика. 1978. Т. 4. С. 49–54.

Опуская далее множители $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$, получим

$$v_{\parallel} = \frac{y}{ms} (B_{\parallel} D - 2\alpha b_{\phi} f), \quad v_t = -\frac{my \gamma p}{\rho \omega^2} D, \quad (2)$$

$$D = -\frac{m^2 \kappa}{\rho r^2 \omega^2} \frac{sr f' - 2\alpha b_{\phi} B_{\parallel} f}{1 - \kappa}, \quad \kappa = \frac{1}{\beta m^2} \frac{\rho r^2 \omega^2}{B^2 + m^2 \gamma ps}, \quad (3)$$

где $f = rv_r$, $D = \text{div } \mathbf{v}$, $y = \alpha B_z - b_{\phi}$, $b_{\phi} = B_{\phi}/r$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, $s = \rho \omega^2/m^2 - y^2$, $a_{\parallel} = a_z + \alpha r a_{\phi}$, $v_t = \mathbf{v} \mathbf{B}$. Уравнение (1) сводится к уравнению для радиальных собственных функций [4]

$$\left(\frac{rs}{1 - \kappa} \frac{f'}{\beta} \right)' - \left[\frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 y^2 b_{\phi}^2 r}{\beta s} + \left(\frac{q + \kappa b_{\phi}^2}{1 - \kappa} \right)' + \frac{\kappa}{1 - \kappa} \frac{\beta}{rs} (q + b_{\phi}^2)^2 \right] f = 0, \quad (4)$$

где $q = 2yb_{\phi}/\beta + b_{\phi}^2$. Граничными условиями являются аналитичность при $r \rightarrow 0$: $f \rightarrow r^m$ и обращение v_r в нуль на границе цилиндра: $f(1) = 0$.

Случай несжимаемой жидкости можно получить предельным переходом $\gamma \rightarrow \infty$. При этом $\kappa \rightarrow 0$ и уравнение (4) переходит в

$$\left(\frac{rs}{\beta} f' \right)' - \left(\frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 y^2 b_{\phi}^2 r}{\beta s} + q' \right) f = 0. \quad (4a)$$

Однородный ток. В случае равновесной конфигурации $\rho = \text{const}$, $j_z = \text{const}$, $B_z = \text{const}$ уравнение (4a) имеет точное решение, выражающееся через бесселевы функции [4]:

$$f_m = \varepsilon J_m(\nu r) - \alpha \nu J_m'(\nu r), \quad \nu^2 = \varepsilon^2 - \alpha^2 m^2, \quad (5)$$

где $\varepsilon = 2\alpha y b_{\phi}/s = \text{const}$. Собственные значения ω^2 определяются формулой

$$\rho \omega^2 / m^2 = y^2 \pm 2\alpha b_{\phi} y / \sqrt{x_{mn}^2 + \alpha^2 m^2}, \quad (6)$$

где x_{mn} – корни $f_m(\nu r)$.

Если удовлетворяются условия $\gamma p y^2 / (B^2 + \gamma p) \ll |\rho \omega^2 / m^2| \ll (B^2 + \gamma p) / (\beta r^2)$, то в уравнении (4) можно пренебречь величиной κ по сравнению с единицей, так что остается лишь последний член, содержащий κ/s .

Полагая, кроме того, $y \ll b_{\phi}$, $B_{\phi}^2 \ll B_z^2$, $\gamma p \ll B^2$, получим

$$\frac{1}{r} (r f')' - \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{4\alpha^2 y^2 b_{\phi}^2}{s^2} + \frac{4\rho \omega^2 b_{\phi}^4}{m^2 B_z^2 s^2} \right) f = 0. \quad (4б)$$

Здесь по сравнению с (4a) появился последний (дестабилизирующий) член $\sim \omega^2$. Решение (4б) имеет вид $f = J_m(2\alpha b_{\phi} r / \sqrt{-s})$ и соответственно

$$\rho \omega^2 / m^2 = y^2 - 4\alpha^2 b_{\phi}^2 / x_{mn}^2. \quad (7)$$

Величина ω^2 в функции от y изображена на рис. 1, где сплошная линия соответствует учету сжимаемости (7), штриховая – случаю несжимаемой жидкости при $\alpha^2 m^2 \ll 1$.

Таким образом, при учете сжимаемости максимум инкремента достигается при резонансе $y = 0$, а величина $|\omega^2|_{\text{max}}$ в 4 раза превосходит $|\omega^2|_{\text{max}}$ для несжимаемой

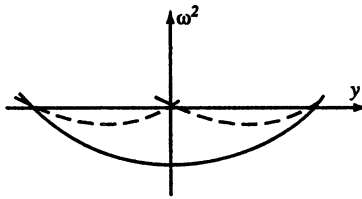


Рис. 1. Функция $\omega^2 = \omega^2(y)$ при $\rho = \text{const}$, $B_z = \text{const}$, $j_z = \text{const}$, $\alpha^2 r^2 \ll 1$

жидкости. Границы области неустойчивости $y = \pm 2\alpha b_\phi / x_{mn}$ для обоих случаев совпадают. Ширина области неустойчивости $|y| < \pm 2\alpha b_\phi / x_{mn}$ и $|\omega^2|_{\text{max}}$ уменьшается с номером n радиальной моды. Область локализации основной собственной функции $n = 1$ занимает все сечение цилиндра.

Конфигурации с замкнутыми силовыми линиями. В случае $\mu \equiv B_\phi / r B_z = \text{const}$ имеется неустойчивость в окрестности $y = B_z(\alpha - \mu) = 0$. Необходимый критерий устойчивости легко получить из (4), полагая $y = 0$. Он имеет вид

$$\gamma p b_\phi^2 + (B^2 + \gamma p) \dot{p} > 0, \quad (8)$$

где точкой обозначена производная по r^2 .

Аналогично случаю однородного тока здесь неустойчивость также захватывает все сечение изучаемой среды. Действительно, ограничиваясь условиями $\rho = \text{const}$, $B_\phi^2 \ll B_z^2$, $\gamma p \ll B^2$, $\gamma p \mu^2 \ll |\dot{p}|$ и полагая $y = 0$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} (r f')' - \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{4m^2 \mu^2 p}{\rho \omega^2} \right) f = 0, \quad (4в)$$

которое при параболическом давлении $\dot{p} = \text{const}$ имеет решение $f = J_m \left(2m\mu \sqrt{\omega^2 \dot{p} / \rho} \right)$. Неустойчивость при $\dot{p} < 0$ развивается с инкрементом $|\omega|$, определенным равенством $\rho \omega^2 / m^2 = 4\mu^2 \dot{p} / x_{mn}^2$.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Потенциальная энергия винтовых возмущений описывается функцией

$$W = \int_0^1 \left\{ \frac{4r^4}{\beta} y^2 \xi^2 + \left[\left(m^2 - \frac{1 - \alpha^2 r^2}{\beta^2} \right) y^2 - \frac{4\alpha^2 r^2 b_\phi}{\beta^2} y + \frac{4\alpha^2 r^2 \dot{p}}{\beta} \right] \xi^2 \right\} r dr, \quad (9)$$

где $u_r = \xi(r) \cos m\theta$. Необходимым условием устойчивости относительно заданного возмущения $\xi(r)$ является положительность W . Уравнение Эйлера, минимизирующее W , совпадает с уравнением (4а) для несжимаемой жидкости, в котором $\omega = 0$.

Локальные моды. Для возмущений, локализованных в окрестности резонансного радиуса r_s , где $y = 0$, из (9) вытекает необходимое условие устойчивости Сайдема [5]:

$$r^2 B_z^2 \dot{\mu}^2 + 4\mu^2 \dot{p} > 0. \quad (10)$$

Таким образом, для существования неустойчивости достаточно наличия резонансной точки $r = r_s$ внутри среды $0 < r < 1$ и невыполнения критерия (10) при $r = r_s$. Первый (стабилизирующий) член определяется перекрещенностью силовых линий \mathbf{V} (широм).

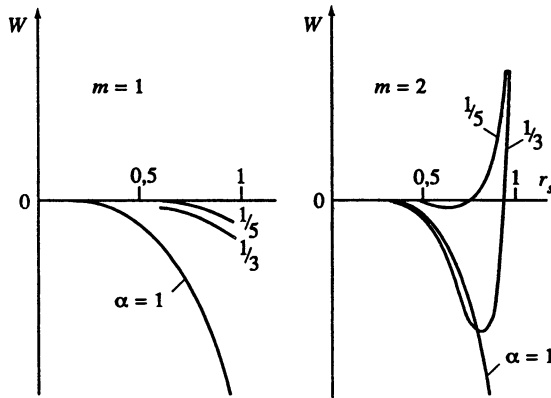


Рис. 2. Потенциальная энергия W для $m = 1$ и $m = 2$

Треугольные моды. Рассмотрим пробную функцию $\xi = r^{m-1}$ ($0 < r < r_s$); $\xi = 0$ ($r_s < r < 1$). При этом график $(r\xi)^{1/m}$ имеет вид треугольника. Нетрудно убедиться, что крутой спад $\xi(r)$ в окрестности $r = r_s$ (где $y(r_s) = 0$) не дает вклада в интеграл от ξ^2 . Ограничимся случаем $\alpha^2 \ll 1$, $B_z = 1 + \varepsilon r^2$, $\varepsilon \sim \alpha^2$, $j_z = 2\mu_0(1 - kr^2)$, когда $y = \dot{\mu}_0(r_s^2 - r^2)$. Пусть, далее, $p = p_0 + \dot{p}_0 r^2$, тогда, вычисляя интеграл (9), получим необходимые условия устойчивости:

а) для $m = 1$ (с точностью до членов $\sim \alpha^4$)

$$W = \alpha^2 r_s^4 \left(\frac{7\dot{\mu}_0^2}{24} r_s^4 + \frac{\mu_0 \dot{\mu}_0}{3} r_s^2 + \dot{p}_0 \right) > 0; \quad (11)$$

б) для $m \geq 2$ (с точностью до членов $\sim \alpha^2$)

$$W = \frac{2r_s^{2m+2}}{m+1} \left(\frac{m-1}{m+2} \dot{\mu}_0^2 r_s^2 + \alpha^2 \dot{p}_0 \right) > 0. \quad (11a)$$

Итак, критерий (11) вместо положительного члена в (10) содержит комбинацию, знак которой зависит от знака $\dot{\mu}_0$. В частности, для случая $B_z = 1$, $j_z = 2\mu_0(1 - r^2)$ получим отрицательное значение $W = -\alpha^2(3\mu_0^2/32 - \dot{p}_0)$ при $r_s = 1$, т.е. для возмущения с областью локализации $0 < r < 1$. Для $m \geq 2$ критерий (11a) имеет ту же структуру, что и (10), но в отличие от (10) он зависит от номера азимутальной моды m . Для $m = 2$ условие (11a) совпадает с (10), а для $m > 2$ оно более мягкое, чем (10).

На рис. 2 приведены графики $W(r_s)$ (в произвольном масштабе), полученные путем вычисления интеграла (9) для $B_z = 1$, $j_z = 2\mu_0(1 - r^2)$, $\alpha = 1, 1/3, 1/5$.

Параболические моды. Пусть пробная функция имеет вид $\xi = r^{m-1}(1 - r^2/r_0^2)$ ($0 < r < r_0$); $\xi = 0$ ($r_0 < r < 1$); тогда вычисление интеграла (9) с точностью $\sim \alpha^2$ дает

$$W = \frac{2r_0^{2m}}{m+2} \left\{ \dot{\mu}_0^2 \left[\frac{m^2 + 3m + 8}{(m+3)(m+4)} r_0^4 - 2 \frac{m^2 + 2m + 3}{(m+1)(m+3)} r_0^2 r_s^2 + r_s^4 \right] + \frac{2\alpha^2 r_0^2 \dot{p}_0}{(m+1)(m+3)} \right\}. \quad (12)$$

А. Для фиксированного r_0 величина W_i минимальна, когда $r_0^2 = \frac{(m+1)(m+3)}{m^2 + 2m + 3} r_s^2$.

Отсюда для $m = 1$ и $m = 2$ получаем необходимые условия устойчивости

$$W_1 = \frac{r_0^4}{6} \left(\frac{\dot{\mu}_0^2}{5} r_s^2 + \alpha^2 \dot{p}_0 \right) < 0, \quad W_2 = \frac{2r_0^6}{45} \left(\frac{7\dot{\mu}_0^2}{11} r_s^2 + \alpha^2 \dot{p}_0 \right) > 0. \quad (12a)$$

Б. Для $r_s = 0$ из (12) вытекает условие устойчивости

$$\frac{m^2 + 3m + 8}{m + 4} \dot{\mu}_0^2 r_0^2 + \frac{2\alpha^2 \dot{p}_0}{m + 1} > 0. \quad (12б)$$

В. Полагая $r_0 = 1$, получим необходимые условия отсутствия неустойчивых мод, захватывающих все сечение $0 < r < 1$, соответственно для $m = 1$ и $m = 2$:

$$3\dot{\mu}_0^2/20 + \alpha^2 \dot{p}_0 > 0, \quad 7\dot{\mu}_0^2/15 + \alpha^2 \dot{p}_0 > 0. \quad (12в)$$

Бессиловые конфигурации. В случае $p'(r) = 0$, $j = 2\mu_0 B$ равновесная конфигурация имеет распределение магнитного поля $B_z = J_0(2\mu_0 r)$, $B_\phi = J_1(2\mu_0 r)$. При этом решением уравнения Эйлера, минимизирующего функционал (9), будет функция $\xi = f_m / y$, где f_m определяется выражением (5), в котором $\varepsilon = 2\mu_0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае, при $2\mu_0 > x_{mn}$, где x_{mn} – корни $f_m(vr)$, развивается неустойчивость с областью локализации $0 < r < 1$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

Собственные функции и инкременты $|\omega|$ для сжимаемой ограниченной плазмы определялись методом численного решения уравнения (4) для равновесной конфигурации $B_z = 1$:

$$j_z = 2\mu_0(1 - r^2), \quad p = (5\mu_0^2/12)(1 - 2r^2/5)(1 - r^2)^2, \quad \rho = p/\mu_0^2. \quad (13)$$

На рис. 3 представлены собственные функции v_r при различных значениях $r_s = \sqrt{2 - 2\alpha/\mu_0}$ и параметрах $\alpha = 1, 1/3, 1/10$. Видно, что основные собственные функции локализованы внутри некоторого "круга неустойчивости", радиус которого r_z уменьшается с уменьшением α . Для $m = 1$ всегда возможна неустойчивость с $r_z = 1$, а для $m = 2$ значение $r_z = 1$ может быть достигнуто только при достаточно больших α . При малых α и достаточно больших r_s собственные функции резко спадают почти до нуля в окрестности $r = r_s$, так что радиус круга неустойчивости r_z практически совпадает с r_s .

На рис. 4 приведены собственные функции с нулями в интервале $0 < r < 1$. При увеличении числа нулей n собственные функции стремятся к сайдемовским, а инкременты спадают.

4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Необходимым условием устойчивости для "локализованных" возмущений является критерий Сайдема (10). Собственные функции локализованных возмущений имеют максимум в окрестности резонансной точки $r = r_s$, где $\mu = \alpha$, и большое число узлов в интервале $0 < r < 1$. Для развития сайдемовской неустойчивости требуется, таким образом, наличие резонансной точки внутри $0 < r < 1$. Инкремент развития неустойчивости сайдемовских мод очень мал.

Критерий (10) не является необходимым, если $\dot{\mu} = 0$, и в этом случае необходимым условием устойчивости является критерий (8), более мягкий, чем (10) при $\dot{\mu} \rightarrow 0$. Неустойчивость бесшировых ($\dot{\mu} = 0$) конфигураций представляется опасной, поскольку

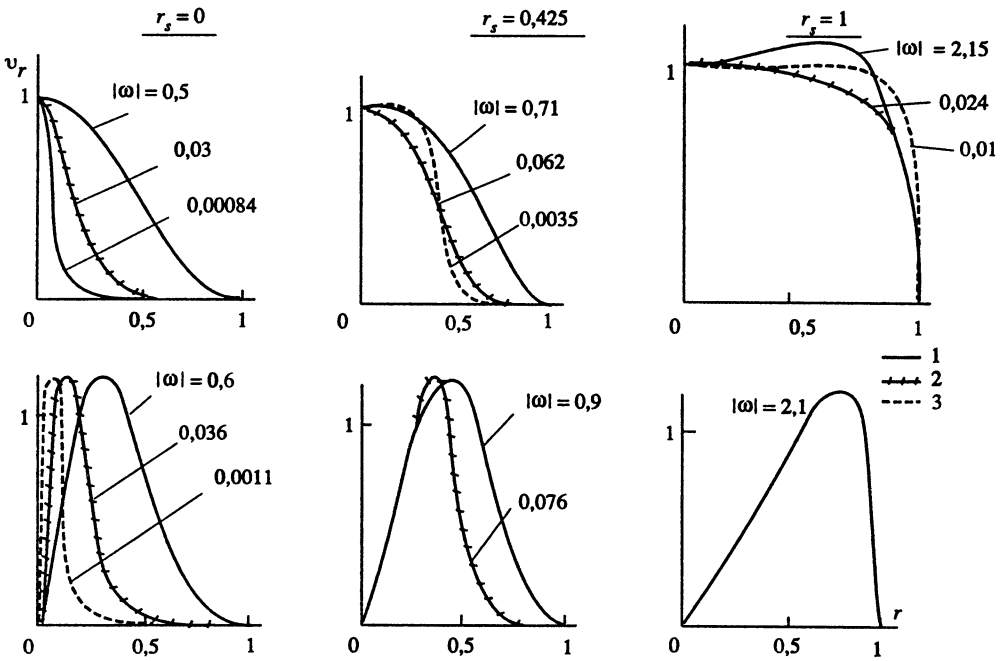


Рис. 3. Основные собственные функции v_r для $m = 1$ и $m = 2$ при $\alpha = 1$ (кривые 1), $1/3$ (кривые 2) и $1/10$ (кривые 3)

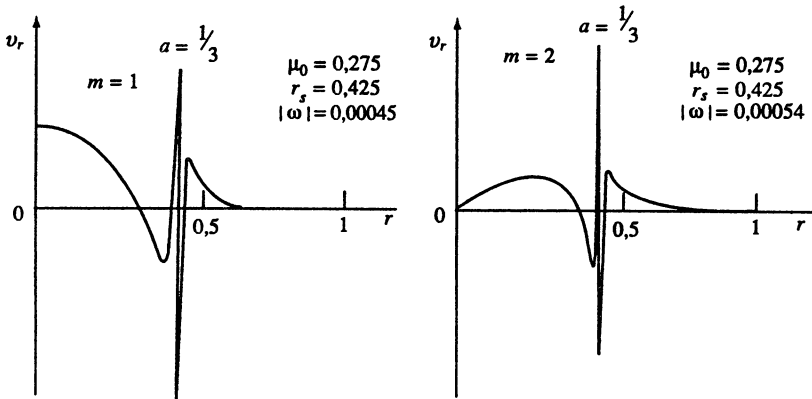


Рис. 4. Сайдемовские собственные функции для $m = 1$ и $m = 2$

ку область локализации основной собственной функции захватывает все сечение плазменного цилиндра.

Для основных собственных функций, развивающихся с наибольшими инкрементами, характерно наличие некоторого круга локализации $0 < r < r_z$, причем вне круга $r = r_z$ собственная функция быстро стремится к нулю. Когда резонансная точка r_s находится в окрестности $r = 0$, все моды m примерно одинаково неустойчивы и $-\omega^2 \sim \alpha^4$. Область неустойчивости при этом близка к определяемой по Сайдему, но несколько шире, поскольку неустойчивы также и конфигурации без резонансных точек внутри $0 < r < 1$.

Если r_s достаточно велико, то в случае $\alpha \ll 1$ область неустойчивости для $m \geq 2$ близка к сайдемовской, а для $m = 1$ при спадающем токе неустойчивые основные моды существуют во всем интервале $0 < r_s < 1$. Максимальный радиус круга неустойчивости r_z растет с α , а при заданном α – наибольший для $m = 1$. При $\alpha \ll 1$ $r_z \rightarrow r_s$.

Учет сжимаемости приводит для крупномасштабных мод к существенному увеличению инкрементов развития неустойчивости за счет расхода тепловой энергии.

Авторы признательны А.И. Морозову и Н.Н. Ченцову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mercier C.* Equilibre et stabilite d'un system toroidal magnetohydrodynamique en voisinage d'un axe magnetique // Nucl. Fusion. 1964. Vol. 1, N 3. P. 213.
2. *Spies G.O.* Magnetohydrodynamic stability theory with closed magnetic field lines // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17, N 2. P. 400.
3. *Зуева Н.М., Соловьев Л.С.* Нелинейная винтовая МГД-неустойчивость // Магнит. гидродинамика. 1977. Т. 3. С. 5.
4. *Соловьев Л.С.* Симметричные МГД-течения и винтовые волны в круглом плазменном цилиндре // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245.
5. *Сайдем В.* Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. II Междунар. конф. по мир. использованию атом. энергии. М.: Атомиздат, 1959. Т. 1: Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. С. 89.

СОДЕРЖАНИЕ

От редколлегии	5
Леонид Сергеевич Соловьев.....	6
<i>1955</i>	
О распространении основной волны между параллельными поверхностями.....	9
<i>1956</i>	
О дифракции конечного пучка электромагнитных волн на цилиндрическом препятствии	13
К теории знакопеременной фокусировки	16
<i>1958</i>	
Движение заряженных частиц в магнитной ловушке	20
О гашении колебаний плазменного шнура.....	27
<i>1959</i>	
Интегралы дрейфовых уравнений	47
<i>1960</i>	
Движение частиц в тороидальном гофрированном магнитном поле	51
Движение частиц в винтовом тороидальном магнитном поле	61
Об ускорении плазмы в коаксиале	73
<i>1961</i>	
Гамильтониан усредненного движения	78
Магнитогидродинамические поверхностные волны	82
О магнитных поверхностях	94
Магнитные поверхности трехзаходного винтового магнитного поля, возмущенного гофрированным полем	105
Кинетическое рассмотрение некоторых равновесных плазменных конфигураций.....	110
<i>1962</i>	
Об устойчивости цилиндрической плазменной струи в магнитном поле.....	121
Аксиально-симметричные колебания плазменного цилиндра.....	125

1963

О симметричных магнитогидродинамических течениях	140
О гидромагнитной устойчивости вращающейся плазмы	144
О типичной структуре тороидального магнитного поля	149

1964

О симметричных течениях проводящей жидкости поперек магнитного поля	154
Равновесие плазменного шнура с винтовыми возмущениями	158
Токовые вихри и критические поверхности в магнитогидродинамическом потоке.....	162
Стационарные аксиально-симметричные течения плазмы поперек азимутального магнитного поля	170
Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла	185
Об ускорении вращающейся плазмы в аксиально-симметричных каналах	198

1965

Пробочная магнитная ловушка с полем, возрастающим во все стороны.....	213
---	-----

1966

Устойчивость магнитных поверхностей.....	219
К теории равновесия плазмы в тороидальных магнитных ловушках	223
Замкнутые конфигурации с минимумом B	227
Спиральные магнитные конфигурации с минимумом B	242

1967

К теории гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций	251
Гидромагнитная устойчивость плазмы в квазиоднородном магнитном поле	268

1968

Критерий гидромагнитной устойчивости плазмы в окрестности магнитной оси.....	275
О гидромагнитной устойчивости стационарных течений.	278
Равновесие и устойчивость плазмы в аксиально-симметричных тороидальных системах...	287

1969

Об устойчивости плазмы в замкнутых системах	299
Гидромагнитная устойчивость симметричных плазменных конфигураций	314

1971

Гидродинамическая неустойчивость цилиндрических разрывов	325
Условия гидромагнитной устойчивости плазмы.	328

1972

О конфигурационной устойчивости течений	338
Об устойчивости вращающейся жидкости	342

1975

О развитии винтовой МГД-неустойчивости	346
Изменение геометрии магнитного поля в движущейся плазме	348

1976

Нелинейная неустойчивость плазменных шнуров.....	353
--	-----

1977

Нелинейная винтовая МГД-неустойчивость.....	357
О конвективной неустойчивости газового шара	375
О γ -неустойчивости шара и цилиндра	378

1978

О локальной МГД-устойчивости равновесных плазменных конфигураций.....	381
О конвективной неустойчивости во вращающемся газе	384
Линейная теория винтовой МГД-неустойчивости	387

Научное издание

Соловьев Леонид Сергеевич

СОБРАНИЕ ТРУДОВ

**РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ
ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ**

Т о м I

Утверждено к печати

Ученым советом

*Института земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн РАН*

Зав. редакцией *Р.С. Головина*

Редактор *Л.Е. Кононенко*

Художественный редактор *Т.В. Болотина*

Технический редактор *А.Л. Шелудченко*

Корректоры *А.В. Морозова, В.М. Ракитина,*

О.Е. Русакова

Набор и верстка выполнены в издательстве
на компьютерной технике

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 14.03.2001

Формат 70×100¹/16. Гарнитура Таймс

Печать офсетная

Усл.печ.л. 32,5 + вкл. 0,13, Усл.кр.-отг. 32,6. Уч.-изд.л. 30,1

Тип. зак. 3889

Издательство "Наука"

117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34, 9-я линия, 12

**АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ
ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА"**

Магазины "Книга–почтой"

121009 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 75 (код 812) 235-05-67

Магазины "Академкнига" с указанием отделов "Книга–почтой"

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 ("Книга–почтой"); (код 4232) 5-27-91
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга–почтой"); (код 3432)
55-10-03
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 ("Книга–почтой"); (код 3952) 46-56-20
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00
117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79
103054 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96
103624 Москва, Б. Черкасский пер., 4; 298-33-73
630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60
630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 ("Книга–почтой"); (код 3832) 35-09-22
142292 Пущино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга–почтой"); (13) 3-38-60
443022 Самара, проспект Ленина, 2 ("Книга–почтой"); (код 8462) 37-10-60
191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16;
(код 812) 323-34-62
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 22-60-36
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга–почтой"); (код 3472) 24-47-74
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49 (код 3472) 22-91-85

Коммерческий отдел, г. Москва

Телефон 241-03-09

E-mail: AKADEM. KNIGA @ g. 23 relcom.ru

Склад, телефон 291-58-87

Факс 291-87-68

*По вопросам приобретения книг
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (095) 334-98-59
E-mail: initsiat @ naukaran.ru*

ISEN 5-02-002506-2



9785020025066